MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

56. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

56. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 56. Bandes.

Baer, R., Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen 1

Barner, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare 409

Bose, S. K., On Laplace Transform 84

Bose, S. K., Some properties of the maximum function of a meromorphic function 223

Carleson, L., On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals 289

Erwe, F., Über die Schlichtheitsschranken gewisser Funktionenfamilien 57

Gaier, D., Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze 326

Gaschütz, W., Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen 376

Haacke, W., Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I. 65

Haken, H., Zum Identitätsproblem bei Gruppen 335

Heegner, K., Diophantische Analysis und Modulfunktionen 227

Hellwig, G., Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems 388

Jurkat, W. und Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen 152

Karamata, J., Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe 219

Löbell, F., Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen 208

Meyer-König, W., Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen . . 179

Mönnig, P., Über die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen 49

Müller, C., Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl 80

Müller, C., Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen . . 261

Nevanlinna, R., Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit der Differentiationen 120

Perron, O., Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste 122

Peyerimhoff, A. siehe Jurkat, W.

Pickert, G., Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten 131

Prasad, B. N. and Singh, U. N., On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series 280

Puppe, S. D., Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten 33

Rembs, E., Zur Verbiegung von Flächen im Großen 271

RICHERT, E., Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I. 21

ROSE, A., A Formalisation of Post's m-valued Propositional Calculus 94

RUND, H., The Theory of Subspaces of a Finsler Space. I. 363

SPRAGUE, R., Über additive Zerlegungen in lauter verschiedene Glieder einer Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe 258

SHAH, S. M., A Note on Entire Functions of Perfectly Regular Growth 254

SINGH, U. N. siehe PRASAD, B. N.

WEVER, F., Über reduzierte freie Liesche Ringe 312

WEYL, H., Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges 105

WEYL, H., Errata 442

WIELANDT, H., Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes 206

ZELLER, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen. 18

ZELLER, K., Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren 134

ZIMMERMANN, W., Stetige Abbildungen topologischer Räume auf endliche abstrakte Komplexe. 296

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 1—17 (1952).

Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen.

Lothar Heffter zum 90. Geburtstag am 11. Juni 1952 gewidmet.

Von

Reinhold Baer in Urbana, Illinois.

In der vorliegenden Untersuchung wollen wir Kriterien für die Existenz der Ringeins angeben, die sich wesentlich mit der idealtheoretischen Struktur des Ringes befassen. Das klassische Beispiel für ein solches Kriterium ist der wohlbekannte Satz, daß die Eins in halbeinfachen Ringen existiert, in denen die Minimalbedingung von den Rechtsidealen erfüllt wird. Wir werden derartige Kriterien auf drei wesentlich verschiedenen Niveaus angeben: Im ersten Abschnitt werden wir die Existenz eines idempotenten Elements voraussetzen, das die Eins in R/N [N = Radikal von R im Sinne von Perlis-Jacobson] repräsentiert; im zweiten Abschnitt werden wir wenigstens die Existenz der Eins in R/N voraussetzen und im dritten Abschnitt werden wir keine derartigen Annahmen machen. Der vierte Abschnitt ist dann der Anwendung dieser Resultate auf Ringe mit einer interessanten Autodualitätseigenschaft gewidmet.

Verstehen wir unter einer Linkseins ein $ex = x$ für alle x in R erfüllendes Element e in R, so erweist es sich als zweckmäßig, Kriterien für die Existenz einer Linkseins anzugeben. Daß dies für unsere Zwecke ausreicht, folgt aus der einfachen und bekannten Bemerkung, daß im Ringe R dann und nur dann die Eins existiert, wenn R eine Linkseins, aber keine von Null verschiedenen Linksannullatoren besitzt.

1. Um das in diesem Abschnitt behandelte Problem auszusprechen, müssen wir zunächst an den Begriff des *Radikals eines Ringes* R [im Sinne von Perlis-Jacobson] erinnern. Dies ist ein zweiseitiges Ideal, das wir stets mit N bezeichnen werden. Ist r ein Element in N, so gibt es stets ein der Bedingung

$$s - r + rs = s - r + sr = 0$$

genügendes Element s in R; und N ist das umfassendste Rechtsideal [wie auch das umfassendste Linksideal] mit dieser Eigenschaft. Wir erinnern weiter daran, daß das Radikal von R/N gleich Null ist, und daß N alle nilpotenten Ideale [sogar alle Nilideale] in R enthält.

Sei nun e eine *Linkseins für* R. Das bedeutet, daß $ex = x$ für jedes x in R gilt. Natürlich ist dann $e = e^2$ ein idempotentes Element

in R. Weiter ist $N+e$ eine Linkseins für R/N. Nun bilden aber die Linksannullatoren [wie auch die Rechtsannullatoren] des Rings R/N ein zweiseitiges Ideal, dessen Quadrat gleich Null ist, und das also selbst Null ist. Daraus folgt aber, daß *in R/N die drei Begriffe: Linkseins* $[ex = x]$, *Rechtseins* $[xe = x]$ *und Eins* $[ex = xe = x]$ *gleichbedeutend sind.* Insbesondere repräsentiert also eine Linkseins von R im Ringe R/N das Einselement. In diesem Abschnitt wollen wir Kriterien dafür angeben, daß jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R auch Linkseins in R ist.

Wir stellen zunächst einige einfache, auf der Pierceschen Zerlegung beruhende Formeln zusammen. Für diese benötigen wir den folgenden Begriff. Wenn a ein Element des Ringes R ist, so sei a_R *die Gesamtheit der $ax = 0$ erfüllenden Elemente x in R*; und entsprechend ist a_L die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung $xa = 0$. Es ist klar, daß a_R ein Rechtsideal und a_L ein Linksideal in R ist.

Lemma 1. *Wenn $e = e^2$ ein idempotentes Element in R ist, so gilt:*

$$R = Re + e_L = eR + e_R,\ 0 = ee_R = e_Le. \tag{1}$$

$$e_LR = e_Le_R = Re_R \tag{2}$$

ist ein zweiseitiges Ideal.

$$e_L^* = R(e_L \cap e_R) = e_L(e_L \cap e_R),\ e_R^* = (e_R \cap e_L)R = (e_R \cap e_L)e_R. \tag{3}$$

$$R(e_L \cap e_R)R = e_L(e_L \cap e_R)e_R = e_LRe_R = e_L^*e_R = e_L^*R = Re_R^* = e_Le_R^*. \tag{4}$$

Beweis. Da e idempotent ist, so ist e_L die Gesamtheit der Elemente der Form $x - xe$; und hieraus folgt sofort (1). Aus (1) folgt aber

$$e_LR = e_L(eR + e_R) = e_Le_R,$$

womit (2) bewiesen ist.

Sind x und y Elemente in e_L, so gilt $0 = xe = ye$; und es wird also $xy = x(y - ey)$. Da e_L ein Linksideal ist, so gehört mit y auch $y - ey$ zu e_L; und es folgt aus $e = e^2$, daß $y - ey$ zu e_R gehört. Also gehört $y - ey$ zu $e_L \cap e_R$ und $xy = x(y - ey)$ gehört mithin zu $e_L(e_L \cap e_R)$. Hieraus und aus (1) folgt nun, daß

$$e_L^* \leqq e_L(e_L \cap e_R) = (Re + e_L)(e_L \cap e_R) = R(e_L \cap e_R) \leqq e_L^*$$

gilt, woraus (3) folgt; und (4) folgern wir mühelos aus (2) und (3).

Die in Lemma 2 und 3 auftretenden Ringeigenschaften werden in dem Hauptsatz dieses Abschnitts eine Rolle spielen.

Lemma 2. *Die folgenden beiden Eigenschaften des Ringes R sind miteinander äquivalent.*

(i) $Z = RZ$ *für jedes zweiseitige Ideal Z in R.*

(ii) *Ist Z ein zweiseitiges Ideal in R und x ein $Rx \leqq Z$ erfüllendes Element in R, so gehört x zu Z.*

Bemerkung. Bedingung (ii) besagt, daß es keine von 0 verschiedenen Rechtsannihilatoren von R/Z gibt. Vgl. auch die Bemerkung zu Zusatz 2 weiter unten.

Beweis. Hat der Ring R die Eigenschaft (i), und ist Z ein zweiseitiges Ideal in R, so bezeichnen wir mit T die Gesamtheit der $Rx \leqq Z$ erfüllenden Elemente x in R. Es ist klar, daß T ein Z enthaltendes zweiseitiges Ideal in R ist. Also folgt aus (i) und der Definition von T, daß

$$Z \leqq T = RT \leqq Z \text{ oder } Z = T$$

ist. Ist also $Rx \leqq Z$, so gehört x zu $T = Z$, womit wir gezeigt haben, daß (ii) aus (i) folgt.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß der Ring R die Eigenschaft (ii) hat. Ist dann Z ein zweiseitiges Ideal in R, so ist $RZ = V$ ebenfalls ein zweiseitiges Ideal in R. Ist z in Z, so ist $Rz \leqq V$ und es folgt aus (ii), daß z zu V gehört. Damit haben wir gezeigt, daß

$$Z \leqq V = RZ \leqq Z \text{ oder } Z = RZ$$

ist, und daß also auch (i) aus (ii) folgt.

Folgerung 1. *Ist $Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R, so ist*

$$(e_L e_R)^2 = e_L R e_R = e_L e_R \tag{5}$$

für jedes idempotente Element e in R.

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt insbesondere $R = R^2$. Ist e ein idempotentes Element in R, so ergibt sich also aus Lemma 1, (2)

$$(e_L e_R)^2 = e_L e_R e_L e_R = e_L R^2 e_R = e_L R e_R.$$

Weiter folgern wir aus $R e_R = e_L e_R$, unserer Voraussetzung und Lemma 2, daß e_R in dem zweiseitigen Ideal $e_L e_R$ enthalten ist. Hieraus schließen wir, daß

$$e_L e_R \leqq e_L (e_L e_R) \leqq e_L e_R \text{ oder } e_L e_R = e_L^2 e_R = e_L R e_R$$

ist, womit der Beweis von (5) erbracht ist.

Lemma 3. *Die folgenden beiden Eigenschaften des Ringes R sind miteinander äquivalent.*

(i) *Jedes von R verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal enthalten und das Radikal N ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale.*

(ii) *Jedes von R/N verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal [in R/N] enthalten und das einzige $N + J = R$ erfüllende Rechtsideal J in R ist $J = R$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst die Gültigkeit von (i) an. Ist U ein von R/N verschiedenes Rechtsideal in R/N, so gibt es ein N enthaltendes und $U = V/N$ erfüllendes Rechtsideal V in R. Natürlich ist $V \neq R$ und es gibt also ein maximales Rechtsideal M in R, das V enthält. Dann ist $N \leqq V \leqq M$ und M/N ist ein maximales Rechtsideal in R/N, das U enthält. Ist weiter J ein Rechtsideal in R, das $R = N + J$

erfüllt, und ist $J < R$, dann gibt es [wegen (i)] ein maximales Rechtsideal M in R, das J enthält. Dann ist [wegen (i)] $N \leqq M$ und folglich wird

$$R = N + J \leqq N + M = M < R,$$

was unmöglich ist. Also ist $J = R$, womit gezeigt ist, daß (ii) aus (i) folgt.

Wir nehmen nun umgekehrt die Gültigkeit von (ii) an. Es ist unmöglich, daß $R = N$ ist, da sonst aus $R = N + 0$ folgen würde, daß $0 = R$ ist, in welchem trivialen Falle alles stimmt. Dann ist aber bekannt, daß N Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Rechtsideale von R ist; siehe etwa JACOBSON [1; p. 311, Theorem 18] oder KAPLANSKY [1; p. 692, Lemma 1]. Ist nun M ein maximales Rechtsideal in R, das N nicht enthält, so wird natürlich $M < M + N$ und also $M + N = R$, woraus [wegen (ii)] $M = R$ folgt, was unmöglich ist. Also ist N in jedem maximalen Rechtsideal enthalten, so daß N der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale ist. Ist weiter U ein von R verschiedenes Rechtsideal, so folgt zunächst aus dem zweiten Teil der Bedingung (ii), daß $N + U < R$ ist. Also ist $(N + U)/N$ ein von R/N verschiedenes Rechtsideal; und wir folgern aus dem ersten Teil der Bedingung (ii) die Existenz eines maximalen Rechtsideals W in R/N, das $(N + U)/N$ enthält. Dann ist aber $W = V/N$ und V ist ein maximales Rechtsideal in R, das $N + U$ und also auch U enthält. Mithin ist (i) eine Folge von (ii).

Hilfssatz 1. *Gehört x zu Nx [oder zu xN], so ist $x = 0$.*

Beweis. Gehört etwa x zu Nx, so gibt es ein $x = nx$ erfüllendes Element n in N. Aus der Definition des Radikals folgt dann die Existenz eines Elements m in R, das der Gleichung $n = m - mn$ genügt. Dann wird aber

$$x = nx = (m - mn)x = mx - m(nx) = mx - mx = 0,$$

wie wir beweisen wollten.

Satz 1. *Gibt es in dem Ringe R idempotente Elemente, die die Eins in R/N repräsentieren, so sind die folgenden Eigenschaften von R untereinander äquivalent.*

(i) *Jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R ist Linkseins in R.*

(ii) *Es existiert eine Linkseins in R.*

(iii) *x gehört zu Rx [für jedes x in R].*

(iv) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$.*

(v) *$Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R; und ein Element x, das zu NxN gehört, gehört auch zu Rx oder zu xR.*

(vi) *Jedes von R verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal enthalten und das Radikal N ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale.*

(vii) *Wenn J ein $N + J = R$ erfüllendes Rechtsideal in R ist, so ist $J = R$.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) [und der allgemeinen Voraussetzung unseres Satzes] folgt; und es ist ebenfalls klar, daß (iii) eine Folge von (ii) ist. Aus (iii) und Hilfssatz 1 folgt sofort (iv). Gilt (iv) und ist e ein idempotentes Element, das eine Eins in R/N repräsentiert, so betrachten wir ein Element x in e_R. Dann ist

$$Rx = [Re + e_L]\, x = e_L x.$$

Da aber $N + e$ das Einselement in R/N ist, so ist e_L in N enthalten, so daß

$$Rx = e_L x \leqq Nx \leqq Rx \text{ oder } Rx = Nx$$

wird. Aus (iv) folgern wir nun $x = 0$, so daß also $e_R = 0$ ist. Ist nun r irgendein Element in R, so gehört $r - er$ wegen der Idempotenz von e zu e_R. Also wird $r - er = 0$ oder $r = er$, so daß e eine Linkseins von R ist. Damit haben wir gezeigt, daß (i) aus (iv) folgt und daß also die Bedingungen (i) bis (iv) untereinander äquivalent sind.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv), so gilt auch (v) [etwa als Folge von (ii)]. Gilt umgekehrt (v) in R, so betrachten wir ein idempotentes Element e in R, das die Eins in R/N repräsentiert. Ist zunächst x irgendein Element in R, so bilden wir das zweiseitige Ideal $T = Rx + RxR$. Aus $Rx \leqq T$, Bedingung (v) und Lemma 2 folgt nun, daß x zu T gehört. Also gilt:

(v. a) $\qquad x$ gehört zu $Rx + RxR$.

Da $e = e^2$ die Eins in R/N repräsentiert, so sind e_R und e_L in N enthalten. Ist x insbesondere ein Element in e_R, so erhalten wir wie üblich

$$Rx = (Re + e_L)\, x = e_L x \leqq Nx \leqq Rx \text{ oder } Rx = Nx.$$

Nun folgt aus (v. a), daß das Element $x^* = RxR + x$ in $R/RxR = R^*$ zu $R^* x^*$ gehört; und aus $Rx = Nx$ folgt, daß $R^* x^* = N^* x^*$ ist, wo N^* das Radikal von R^* ist. Dann folgt aber aus Hilfssatz 1, daß das Element x^* in $N^* x^*$ gleich Null ist; und damit haben wir folgendes gezeigt:

(v. b) $\qquad$ Gehört x zu e_R, so gehört x zu RxR.

Sei nun insbesondere x ein Element in dem Durchschnitt $e_R \wedge e_L$. Dann folgt aus (v. b) [und Lemma 1, (1)], daß x zu

$$RxR = (Re + e_L)\, x\, (eR + e_R) = e_L x e_R \leqq NxN$$

gehört. Wenden wir nun Bedingung (v) an, so folgt, daß x zu

$$Rx = e_L x \leqq Nx \text{ oder } xR = xe_R \leqq xN$$

gehört; und in beiden Fällen folgt $x = 0$ aus Hilfssatz 1. Damit haben wir gezeigt, daß

(v. c) $\qquad e_R \wedge e_L = 0$

ist. Aus Bedingung (v) folgt Anwendbarkeit der Folgerung 1, (5). Also folgt aus (v. c) und Lemma 1, (3), (4), daß

$$Re_R = e_L e_R = e_L R e_R = R(e_L \cap e_R) R = 0$$

ist. Wegen (v) gilt aber Bedingung (ii) von Lemma 2. Also ist $e_R = 0$. Ist nun r ein Element in R, so folgt aus $e = e^2$, daß $r - er$ zu e_R gehört und also gleich 0 ist. Mithin ist $r = er$, e eine Linkseins von R und (i) eine Folge von (v), womit die Äquivalenz der ersten fünf Bedingungen erwiesen ist.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i) bis (v), so existiert eine Linkseins e in R. Ist J ein von R verschiedenes Rechtsideal in R, so ist e nicht in J enthalten, da ja $eR = R$ ist. Also gibt es ein maximales, J enthaltendes und e nicht enthaltendes Rechtsideal J' in R. Ist J'' ein Rechtsideal in R, und ist $J' < J''$, so enthält J'' das Element e [da ja J in J' und also in J'' enthalten ist]. Also wird $J'' = eR = R$, so daß J' ein maximales Rechtsideal ist. Damit ist die Existenz eines maximalen Rechtsideals erwiesen, daß J enthält. Ist weiter D der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale in R, so folgt aus einem Satz von Jacobson [1, p. 311, Theorem 18], daß

$$N = RN \leqq D \leqq N \text{ oder } D = N$$

ist. Also folgt (vi) aus (i) bis (v).

Daß (vii) aus (vi) folgt, ist in Lemma 3 enthalten. Gilt schließlich Bedingung (vii), so betrachten wir ein idempotentes Element e in R, das die Eins in R/N repräsentiert. Dann ist eR ein Rechtsideal und e_R in N enthalten, so daß

$$R = eR + e_R = N + eR$$

ist. Dann folgt aber $R = eR$ aus Bedingung (vii); und hieraus folgt ohne weiteres, daß e Linkseins von R ist [wegen $e(ey) = e^2 y = ey$]. Also ist (i) eine Folge von (vii); und damit haben wir die Äquivalenz aller Bedingungen (i) bis (vii) erwiesen.

Bemerkung. In Bedingung (v) des vorstehenden Satzes werden Elemente x mit der Eigenschaft

(*) $\qquad x$ *gehört zu* NxN

betrachtet. Natürlich hat 0 diese Eigenschaft (*); und es scheint eine offene Frage zu sein, ob es von 0 verschiedene Elemente mit der Eigenschaft (*) geben kann. Ist insbesondere R kommutativ, so folgt natürlich aus Hilfssatz 1, daß 0 das einzige Element x in R derart ist, daß x zu $NxN = xN^2$ gehört. Ist 0 das einzige Element mit der Eigenschaft (*), so kann man die zweite Hälfte der Bedingung (v) fortlassen. In diesem Zusammenhang scheint das folgende Kriterium nicht ohne Interesse zu sein.

Zusatz 1. *Ist* $Z = RZ$ *für jedes zweiseitige Ideal* Z *in* R, *ist* 0 *das einzige* $W^2 = W \leqq N$ *erfüllende zweiseitige Ideal* W *in* R, *so ist*

jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R Linkseins von R.

Beweis. Sei $e = e^2$ ein die Eins in R/N repräsentierendes idempotentes Element in R. Dann sind e_L und e_R in N enthalten. Wegen der ersten Voraussetzung können wir Folgerung 1 auf das zweiseitige Ideal $W = e_L e_R$ anwenden. Es gilt also $W^2 = W \leqq N$; und nun folgt $W = 0$ aus unserer zweiten Annahme. Es folgt dann aber aus Lemma 1, daß $0 = W = e_L e_R = R e_R$ ist. Aus der ersten Annahme und Lemma 2 folgt dann aber $e_R = 0$, woraus, wie üblich, folgt, daß das idempotente Element e Linkseins in R ist.

Bemerkung. Die zweite Bedingung von Zusatz 1 ist nicht notwendig, wie man leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß KÖTHE [1] ein Beispiel eines kommutativen Ringes K angegeben hat, der $K = K^2 = N$ erfüllt, und daß natürlich dieser Ring Radikal eines kommutativen Ringes mit Eins ist. Andererseits ist die zweite Bedingung des Zusatz 1 nicht selten erfüllt. Z. B. hat JACOBSON [1; p. 306, Theorem 11] gezeigt, daß aus der Maximalbedingung für Rechtsideale eine viel schärfere Bedingung folgt.

2. Im vorigen Abschnitt haben wir i. a. die Existenz eines idempotenten Elements, das die Eins in R/N repräsentiert, vorausgesetzt. Wir werden jetzt nur noch annehmen, daß R/N eine Eins besitzt.

Satz 2. *Wenn in R/N die Eins existiert, so sind die folgenden Eigenschaften von R äquivalent:*

(i) *In R existiert eine Linkseins.*

(ii) *x gehört stets zu Rx; und R ist das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R.*

(iii) *x gehört stets zu Rx; und y gehört zu yR, wenn $R = N + yR$ ist.*

(iv) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; und y gehört zu yR, wenn $R = N + yR$ ist.*

(v) *x ist ein Nilelement $[x^k = 0]$, wenn $Rx = Nx$ ist; und R ist das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R.*

Beweis. Man erschließt ohne Mühe aus Satz 1, daß (ii) eine Folge von (i) ist. Ist R das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R, so folgt natürlich aus $R = N + yR$, daß y zu yR gehört. Gehört x stets zu Rx, so folgt aus Hilfssatz 1, daß 0 das einzige $Rx = Nx$ erfüllende Element x in R ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, daß (iii) eine Folge von (ii) und (iv) eine Folge von (iii) ist.

Wir nehmen nun die Gültigkeit von (iv) an. Da in R/N die Eins existiert, so können wir diese in der Form $N + a$ darstellen. Da dann aber $R/N = (N + a)(R/N)$ ist, so wird auch $R = N + aR$. Nun folgern wir aus dem zweiten Teil der Bedingung (iv), daß a zu aR gehört, und daß es also ein $a = ab$ erfüllendes Element b in R gibt. Dann ist auch $a = ab^2$ und hieraus folgt

$$a(b - b^2) = 0.$$

Da a die Eins in R/N repräsentiert, so wird

$$a = ab \equiv b \text{ modulo } N,$$

so daß also auch b die Eins in R/N repräsentiert. Weiter ist $R = N + Ra$ eine Folge davon, daß $N + a$ die Eins in R/N ist. Mithin wird

$$R(b - b^2) = (N + Ra)(b - b^2) = N(b - b^2);$$

und es folgt aus dem ersten Teil der Bedingung (iv), daß $b - b^2 = 0$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß b ein die Eins in R/N repräsentierendes idempotentes Element ist. Der erste Teil der Bedingung (iv) ist aber mit Bedingung (iv) von Satz 1 identisch; und nun folgt aus Satz 1, daß b eine Linkseins von R ist. Also ist (i) eine Folge von (iv), womit die Äquivalenz der ersten vier Bedingungen erwiesen ist.

Die erste Hälfte der Bedingung (v) ist eine triviale Folge aus der ersten Hälfte der Bedingung (iv); und die zweite Hälfte der Bedingung (v) ist mit der zweiten Hälfte der Bedingung (ii) identisch. Also folgt (v) aus den äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv).

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (v) an. Dann zeigen wir zunächst:

(v. a) Es gibt ein die Eins in R/N repräsentierendes Element e in R derart, daß $e - e^2$ ein Nilelement ist.

Sei wieder a irgendein die Eins repräsentierendes Element in R. Dann ist, wie vorher, $R = N + aR$. Also folgt $aR = R$ aus (v), woraus wir die Existenz eines $a = ae$ erfüllenden Elements e in R folgern. Wie oben sehen wir zunächst ein, daß auch e die Eins in R/N repräsentiert, daß $a(e - e^2) = 0$ ist, und daß $R(e - e^2) = N(e - e^2)$ ist. Schließlich folgt nun aus (v), daß $e - e^2$ ein Nilelement ist.

Weiter zeigen wir — unabhängig von der Gültigkeit der Bedingung (v) — die Gültigkeit der folgenden Tatsache:

(v. b) Gibt es in R ein die Eins in R/N repräsentierendes Element r derart, daß $r - r^2$ ein Nilelement ist, so gibt es auch ein die Eins in R/N repräsentierendes, idempotentes Element in R.

Nennen wir nämlich Exponent des Nilelements w die kleinste positive, $w^n = 0$ erfüllende Zahl n, so können wir aus der Voraussetzung von (v. b) die Existenz eines Elements e mit folgenden Eigenschaften erschließen:

(1) $N + e$ ist die Eins in R/N.

(2) $e - e^2$ ist ein Nilelement.

(3) Der Exponent des Nilelements $e - e^2$ ist minimal.

Dann bilden wir [nach Dickson-Köthe] das Element $f = e - 2ec + c$, wo $c = e^2 - e$ ist. Da $N + e$ die Eins in R/N ist, so gehört c zu N, so daß auch f die Eins in R/N repräsentiert. Da e und c vertauschbar sind, so wird $f^2 - f = 4c^3 - 3c^2$; und der Exponent dieses Nilelements wäre kleiner als der von $e^2 - e$, wenn $e^2 - e \neq 0$ wäre. Daraus folgt $e = e^2$ wegen (3), womit der Beweis von (v. b) erbracht ist.

Aus (v. a) und (v. b) zusammen folgt nun die Existenz eines die Eins in R/N repräsentierenden, idempotenten Elements in R. Da aber der zweite Teil der Bedingung (v) mit der Bedingung (vii) des Satzes 1 identisch ist, so folgt aus Satz 1 die Existenz einer Linkseins in R. Also folgt (i) aus (v), womit der Beweis der Äquivalenz unserer fünf Eigenschaften erbracht ist.

Bemerkung. Da es im Ringe R/N keine von 0 verschiedenen Rechtsannullatoren dieses Ringes gibt, so folgt aus $Rx = Nx$ stets, daß x zu N gehört. Der erste Teil der Bedingung (v) ist also sicher dann erfüllt, wenn N ein Nilideal ist.

Um diese Bemerkung auszubeuten, definieren wir die folgenden beiden aufsteigenden Ketten zweiseitiger Ideale N_σ und ${}_\sigma N$.

$N_0 = {}_0N = 0$.

$\begin{matrix} N_{\sigma+1} \\ {}_{\sigma+1}N \end{matrix}$ ist die Gesamtheit der $\begin{matrix} xN \leqq N_\sigma \\ Nx \leqq {}_\sigma N \end{matrix}$ erfüllenden Elemente x in R.

Ist σ eine Limeszahl, so ist $\begin{matrix} N_\sigma \\ {}_\sigma N \end{matrix}$ die Vereinigungsmenge aller $\begin{matrix} N_\nu \\ {}_\nu N \end{matrix}$ mit $\nu < \sigma$.

Natürlich ist $N_\alpha = N_{\alpha+1} = \ldots$ und ${}_\beta N = {}_{\beta+1}N = \ldots$ für hinreichend großes [endliches oder unendliches] α bezw. β. Wir werden uns besonders mit Ringen beschäftigen, wo wenigstens eine dieser Ketten mit R endigt. Daß dies in vielen interessanten Fällen geschieht, geht aus der leicht verifizierbaren Äquivalenz der folgenden drei Eigenschaften eines Ringes R hervor: (i) $N_k = R$ für endliches k; (ii) ${}_hN = R$ für endliches h; (iii) $N^m = 0$ für endliches m.

Hilfssatz 2: *Ist $R = N_\alpha$ oder $R = {}_\beta N$, so ist N ein Nilideal.*

Beweis: Wir beweisen induktiv, daß jedes $N \cap N_\sigma$ ein Nilideal ist. Dies ist sicherlich für $\sigma = 0$ der Fall. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ und daß $N \cap N_\nu$ mit $\nu < \sigma$ ein Nilideal ist. Ist dann zunächst σ eine Limeszahl, so ist $N \cap N_\sigma$ die Vereinigungsmenge aller $N \cap N_\nu$ mit $\nu < \sigma$ und also ein Nilideal. Ist weiter $\sigma = \varrho + 1$ und x ein Element in $N \cap N_\sigma$, so ist x^2 als Element in $N_{\varrho+1}$ $N \leqq N_\varrho$ ein Nilelement, so daß x selber ein Nilelement ist. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Ist $N_\alpha = R$, so ist $N = N \cap N_\alpha$ ein Nilideal. Die zweite Behauptung folgt nun aus Symmetriegründen.

Folgerung 2: *Es existiert eine Linkseins in R, wenn*

(a) *die Eins in R/N existiert,*

(b) *${}_\sigma N = R\,{}_\sigma N$ für jedes σ gilt und*

(c) *$R = {}_\beta N$ für hinreichend großes β ist.*

Beweis: Es folgt aus (c) und Hilfssatz 2, daß N ein Nilideal ist. Folglich gilt der erste Teil der Bedingung (v) des Satzes 2, wie wir in der Bemerkung zu Satz 2 ausgeführt haben.

Weiter sei J ein Rechtsideal in R derart, daß $R = N + J$ ist. Wir werden induktiv zeigen, daß jedes ${}_\sigma N \leqq J$ ist. Dies ist sicher wahr, wenn $\sigma = 0$ ist. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ ist und daß J jedes

${}_{\nu}N$ mit $\nu < \sigma$ enthält. Ist σ zunächst Limeszahl, so enthält J auch die Vereinigungsmenge ${}_{\sigma}N$ all dieser ${}_{\nu}N$ mit $\nu < \sigma$. Ist aber $\sigma = \varrho + 1$, so ist wegen (b) und Induktionsannahme

$$ {}_{\sigma}N = R\,{}_{\sigma}N = [N + J]\,{}_{\sigma}N = N\,{}_{\varrho+1}N + J\,{}_{\sigma}N \leqq {}_{\varrho}N + J \leqq J. $$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig erbracht. Insbesondere ist also $R = {}_{\beta}N$ in J enthalten, so daß $J = R$ aus $R = N + J$ folgt. Damit ist auch die zweite Hälfte der Bedingung (v) des Satzes 2 verifiziert. Da aber wegen (a) die Eins in R/N existiert, so folgt schließlich aus Satz 2 die Existenz einer Linkseins in R.

Bemerkung: Bedingungen (a) und (b) sind notwendig für die Existenz einer Linkseins, Bedingung (c) aber nicht.

Zusatz 2: *Es existiert eine Linkseins in R, wenn*

(a) *die Eins in R/N existiert,*

(b) $x = 0$ *aus* $Rx = 0$ *folgt,*

(c) $N_\sigma x = 0$ *aus* $N_\sigma R x = 0$ *folgt und*

(d) $R = N_\beta$ *für hinreichend großes* β ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst die folgende Eigenschaft:

(e) Ist $N + w$ die Eins in R/N, so ist $w_R = 0$.

Sei etwa x ein $wx = 0$ erfüllendes Element in R. Dann beweisen wir induktiv, daß $N_\sigma x = 0$ ist. Dies ist sicher wahr, wenn $\sigma = 0$ ist. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ und $N_\nu x = 0$ für jedes $\nu < \sigma$ gilt. Ist zunächst σ eine Limeszahl, so ist N_σ die Vereinigungsmenge aller N_ν mit $\nu < \sigma$, so daß auch $N_\sigma x = 0$ ist. Sei weiter $\sigma = \varrho + 1$. Da $N + w$ die Eins in R/N ist, so ist $R = N + Rw$. Also wird

$$ N_\sigma R x = N_\sigma [N + Rw] x = N_{\varrho+1} N x \leqq N_\varrho x = 0, $$

da ja $wx = 0$ ist. Wir wenden (c) an und sehen, daß auch $N_\sigma x = 0$ ist. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig erbracht. Also ist insbesondere $Rx = N_\beta x = 0$ [wegen (d)]; und nun folgt $x = 0$ aus (b). Damit ist (e) bewiesen.

Es folgt aus Hilfssatz 2, daß N ein Nilideal ist. Repräsentiert also r die Eins in R/N — und solche Elemente existieren wegen (a) — so ist $r - r^3$ als Element in N auch Nilelement. Nun können wir aber den während des Beweises des Satzes 2 bewiesenen Hilfssatz (v. b) anwenden. Also existiert ein die Eins in R/N repräsentierendes, idempotentes Element a in R. Aus (e) folgern wir dann, daß $a_R = 0$ ist; und hieraus folgt wie üblich, daß a Linkseins von R ist.

Bemerkung. Die Bedingungen (a), (b), (c) sind notwendig für die Existenz einer Linkseins, während (d) es nicht ist. Wir wollen noch zeigen, daß die Bedingungen (b), (c) [und mehr] aus der Bedingung

$$ (+) \qquad Z = RZ \text{ für jedes zweiseitige Ideal } Z $$

folgt. Daß (b) aus (+) folgt, ist in Lemma 2 enthalten. Sei nun T irgendein zweiseitiges Ideal und T^* die Gesamtheit der $Tx = 0$ er-

füllenden Elemente x in R. Dann ist auch T^* ein zweiseitiges Ideal. Ist nun $TRx = 0$, so ist $Rx \leqq T^*$; und es folgt aus (+) und Lemma 2, daß x zu T^* gehört. Damit haben wir gezeigt:

Aus (+) folgen die folgenden beiden Eigenschaften von R.

Aus $Rx = 0$ folgt $x = 0$; und aus $ZRx = 0$ folgt $Zx = 0$, wenn Z ein zweiseitiges Ideal in R ist.

Zusatz 3. *Wenn in R/N die Eins existiert, so sind die folgenden Eigenschaften von R untereinander äquivalent.*

(i) *In R existiert die Eins.*

(ii) *x gehört stets zu $Rx \cap xR$.*

(iii) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; und y gehört stets zu yR.*

(iv) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; aus $yR = 0$ folgt $y = 0$; und z gehört zu zR, wenn $R = N + zR$ ist.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt. Daß (iii) aus (ii) folgt, ergibt sich unter Benutzung von Hilfssatz 1; und es ist klar, daß (iv) aus (iii) folgt. Gilt schließlich (iv), so ergibt sich aus Satz 2 die Existenz einer Linkseins in R; und diese ist notwendig die Eins in R, da ja $x = 0$ aus $xR = 0$ folgt. Damit ist die Äquivalenz von (i) bis (iv) erwiesen.

Bemerkung. Die Bedingungen (i) und (ii) bleiben unverändert, wenn man links und rechts vertauscht. Also ergeben sich durch diese Vertauschung aus (iii) und (iv) zwei weitere äquivalente Eigenschaften.

3. Im gegenwärtigen Abschnitt werden wir ein Existenzkriterium herleiten, in dem die Existenz einer Eins in R/N nicht vorausgesetzt wird.

Satz 3. *Dann und nur dann existiert eine Linkseins in R, wenn*

(a) *$R = aR$ für wenigstens ein a in R gilt und*

(b) *x zu Rx gehört, wenn $R = xR$ ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser beiden Bedingungen (a) und (b) ist trivial. Wir nehmen also an, daß die Bedingungen (a) und (b) in R gelten. Dann gibt es ein Element a in R derart, daß $R = aR$ ist. Weiter folgt aus (b), daß a zu Ra gehört. Also gibt es ein $a = ea$ erfüllendes Element e in R. Dann ist auch $a = e^3a$, woraus wir $(e - e^3)a = 0$ und

$$(e - e^2)R = (e - e^3)aR = 0$$

erschließen. Folglich wird

$$e^3 - e^4 = (e - e^2)(e + e^2) \leqq (e - e^3)R = 0$$

oder

$$e^2 = (e^2)^2.$$

Weiter ist

$$R = aR = e^2aR = e^2R.$$

Also ist e^2 ein idempotentes Element, das $R = e^2R$ erfüllt, woraus sofort folgt, daß e^2 eine Linkseins von R ist.

4. Wir wollen in diesem Abschnitt als Anwendung von Zusatz 3 einen Existenzsatz von M. Hall [1; p. 362, Theorem 3.2] verallgemeinern. Diesem Satz müssen wir einige Betrachtungen über eine spezielle Klasse von Ringen vorausschicken, die auch unabhängig von ihrer Anwendung von Interesse sind.

Ist A eine Teilmenge des Ringes R, so bezeichnen wir mit A_R *die Gesamtheit der* $Ax = 0$ *erfüllenden Elemente* x *in* R; und unter A_L verstehen wir entsprechend die Gesamtheit der $xA = 0$ erfüllenden Elemente. Es ist klar, daß A_R ein Rechtsideal und A_L ein Linksideal ist. Diese Operationen sind durch eine Reihe einfacher Beziehungen miteinander verknüpft, von denen wir aber nur

$$AA_R = 0 = A_L A$$

erwähnen.

Der Ring $R\,[\neq 0]$ werde nun *autodual* genannt, wenn

$J = J_{LR}$ *für jedes Rechtsideal* J *in* R *und*

$Q = Q_{RL}$ *für jedes Linksideal* Q *in* R *gilt.*

Der Name „autodual" erklärt sich daraus, daß in autodualen Ringen die Abbildungen

$$J \to J_L \text{ für Rechtsideale } J \text{ und } Q \to Q_R \text{ für Linksideale } Q$$

zueinander reziproke Dualitäten zwischen dem Verband der Rechtsideale und dem Verband der Linksideale in R herstellen [Dualitäten sind eineindeutige und monoton abnehmende Verbandsabbildungen]. — Autoduale Ringe sind vielfach untersucht worden; wir weisen nur auf die Arbeiten von Baer, Hall, Kaplansky und Nakayama hin.

Lemma 4. *Der autoduale Ring* R *hat die folgenden Eigenschaften.*

(a) $(aR)_L = a_L$, $(Ra)_R = a_R$.

(b) a *gehört zu* $aR \cap Ra$.

(c) $R \neq N$.

(d) $N_R = N_L = S$ *ist die Summe aller minimalen Rechtsideale und ist auch die Summe aller minimalen Linksideale.*

(e) N *ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale und auch der Durchschnitt aller maximalen Linksideale.*

(f) $a \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R$.

(g) *Das Rechtsideal* J *hat dann und nur dann die Eigenschaft* $J = aJ$, *wenn das Linksideal* J_L *der folgenden Bedingung genügt:*

x *gehört dann und nur dann zu* J_L, *wenn* xa *zu* J_L *gehört.*

(h) *Sind* J *und* J' *Rechtsideale mit den Eigenschaften:* $J = aJ$ *und* x *gehört dann und nur dann zu* J', *wenn* ax *zu* J' *gehört, so sind* $V = J \cap J'$ *und* $V' = J + J'$ *Rechtsideale mit den Eigenschaften:* $V = aV$ *und* x *gehört dann und nur dann zu* V', *wenn* ax *zu* V' *gehört.*

(j) *Dann und nur dann ist*

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} a^i R \wedge [\bigwedge_{i=1}^{\infty} R a^i]_R = 0,$$

wenn $\bigwedge_{i=1}^{\infty} R a^i = R a^n$ *für hinreichend großes* n *gilt.*

(k) *Das Radikalelement* r *erfüllt dann und nur dann* $r^n = 0$, *wenn* $\bigwedge_{i=1}^{\infty} R r^i = R r^n$ *ist.*

Vorbemerkung. Da die Autodualitätsvoraussetzung gleichmäßig für Rechts- und Linksideale gilt, so gilt jede für Rechtsideale in autodualen Ringen gültige Aussage mutatis mutandis auch für Linksideale. Wir haben infolgedessen oft nur eine dieser beiden Aussagen aufgeführt und werden immer nur eine dieser beiden Aussagen beweisen.

Beweis. Aus $0 = 0_{RL} = R_L$ folgt sofort, daß

$$x = 0 \text{ eine Folge von } xR = 0$$

ist. Also gehört x dann und nur dann zu $(aR)_L$, wenn $(xa)R = 0$ und also auch $xa = 0$ ist, woraus (a) folgt. Aus (a) erschließen wir weiter, daß a zu $a_{LR} = (aR)_{LR} = aR$ gehört. Also gilt (b). Aus (b) und Hilfssatz 1 folgt (c).

Da $N < R$ ist, so gibt es maximale Rechtsideale und maximale Linksideale und N ist der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Rechtsideale [Linksideale]; siehe Jacobson [1; p. 310/311]. Durch Dualisierung folgt dann die Existenz minimaler Rechtsideale und minimaler Linksideale. Die Summe aller minimalen Linksideale werde mit S bezeichnet und die Summe aller minimalen Rechtsideale bezeichnen wir mit S_r. Durch Dualisierung der Durchschnittsdarstellungen von N folgt weiter, daß

$$N_L \leqq S \text{ und } N_R \leqq S_r$$

ist. Ist J ein minimales Rechtsideal, so ist bekanntlich $JN = 0$; siehe etwa Baer [2; p. 565, Theorem 10. 11]. Also wird $S_r N = 0$ oder $S_r \leqq N_L$ und $S \leqq N_R$ sieht man ebenso ein. Folglich gilt

$$S \leqq N_R \leqq S_r \leqq N_L \leqq S,$$

woraus die Gleichheit dieser vier Ideale und also (d) folgt. (e) folgt aus (d) durch Dualisierung.

Sei a ein Element in R und $D = \bigwedge_{i=1}^{\infty} a^i R$. Dann ist D_L die Vereinigungsmenge der aufsteigenden Folge von Linksidealen $(a^i R)_L = (a^i)_L$ [wegen (a)]. Weiter gehört x dann und nur dann zu $(aD)_L$, wenn $xaD = 0$ ist und xa zu D_L gehört. Es gehört aber, wie gerade bemerkt, xa dann und nur dann zu D_L, wenn xa zu einem $(a^k)_L$ gehört. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $xa^{k+1} = 0$ ist, d. h.

wenn x zu $(a^{k+1})_L \leqq D_L$ gehört. Also gehört x dann und nur dann zu $(aD)_L$, wenn es zu D_L gehört. Mithin ist $(aD)_L = D_L$ und $aD = D$, womit (f) bewiesen ist.

Sei J ein Rechtsideal und a ein Element in R. Ist $J = aJ$, so gehört x dann und nur dann zu J_L, wenn $0 = xJ = xaJ$ ist, d. h. wenn xa zu J_L gehört. Gehört umgekehrt x dann und nur dann zu J_L, wenn xa zu J_L gehört, so ist $J_L = (aJ)_L$ und also $J = aJ$. Mithin gilt (g).

Sei weiter a ein Element in R, J und J' Rechtsideale mit den folgenden Eigenschaften: $J = aJ$ und x gehört dann und nur dann zu J', wenn ax zu J' gehört. Wir bilden $V = J \cap J'$. Dann ist

$$aV \leqq aJ \cap aJ' = J \cap aJ' \leqq J \cap J' = V.$$

Ist weiter v ein Element in V, so gehört v zu $J = aJ$. Es gibt also ein Element j in J derart, daß $v = aj$ ist. Da aber $v = aj$ zu J' gehört, so gehört auch j zu J'. Mithin gehört j zu $J \cap J' = V$, so daß v zu aV gehört. Also ist $V \leqq aV \leqq V$ oder $V = aV$. — Wir setzen weiter $V' = J + J'$. Dann ist $V'_L = J_L \cap J'_L$ wegen der Dualitätseigenschaften der L-Operation. Es folgt aus unseren Annahmen über J und J' und aus (g), daß $J'_L = J'_L a$ ist, und daß xa dann und nur dann zu J_L gehört, wenn x zu J_L gehört. Aus dem bereits bewiesenen folgt nun $V'_L = V'_L a$ und hieraus folgt wegen (g), daß x dann und nur dann zu V' gehört, wenn ax zu V' gehört. Damit ist der Beweis von (h) erbracht.

Wir betrachten nun ein Element a mit der Eigenschaft:

$$0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \cap [\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i]_R.$$

Dann ist $R = [\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R]_L + [\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i]$. Da a selbst zu R gehört, so existieren Elemente x und y in $[\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R]_L$ resp. $\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$ derart, daß $a = x + y$ ist. Dann erschließen wir zunächst, daß x einem der $[a^i R]_L = [a^i]_L$ angehört, so daß also $x a^k = 0$ für geeignetes k. Es folgt nun aus (f), daß $a^{k+1} = y a^k$ zu $[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i] a^k = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$ gehört. Hieraus folgt aber sofort $R a^{k+1} = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$.

Sei nun umgekehrt a ein Element mit der Eigenschaft

$$R a^m = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i.$$

Sei weiter

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \cap [\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i]_R.$$

Dann folgt aus (f), (g), (h), daß $aD = D$ ist. Aus unserer Voraussetzung folgt aber, daß

$$[\bigwedge_{i=1}^{\infty} Ra^i]_R = [Ra^m]_R = [a^m]_R$$

ist. Folglich wird

$$D = a^m D \leqq a^m [a^m]_R = 0,$$

womit (*j*) vollständig bewiesen ist.

Ist schließlich r ein Element in N, das der Bedingung

$$Rr^n = \bigwedge_{i=1}^{\infty} Rr^i$$

genügt, so gehört r^n zu Rr^{n+1}. Also existiert ein Element x in R, so daß $r^n = xr^{n+1}$. Da aber xr zum Radikal N gehört, so gibt es ein der Bedingung $xr = t - txr$ genügendes Element t in R; und es wird

$$r^n = xr^{n+1} = (t - txr)r^n = tr^n - t(xr^{n+1}) = tr^n - tr^n = 0.$$

Hieraus folgt (k).

Folgerung 3. *Die folgenden Eigenschaften des autodualen Ringes R sind untereinander äquivalent.*

(i) *Das Radikal N ist ein Nilideal.*

(ii) *Ist a ein Element in N und J ein J = aJ erfüllendes Rechtsideal, so ist J = 0.*

(iii) *Ist a ein Element in N, sind J und J' Rechtsideale mit den Eigenschaften J = aJ und x gehört dann und nur dann zu J', wenn ax zu J' gehört, so ist J ∧ J' = 0.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) und (iii) aus (ii) folgt. Nehmen wir schließlich an, daß Bedingung (iii) gilt und daß a ein Element in N ist. Wir setzen $J = \bigwedge_{i=1}^{\infty} a^i R$ und $J' = [\bigwedge_{i=1}^{\infty} Ra^i]_R$. Dann folgt aus Lemma 4, (f) und (g), daß $aJ = J$ ist und daß x dann und nur dann zu J' gehört, wenn ax zu J' gehört. Es folgt also aus (iii), daß $J \wedge J' = 0$ ist; und nun folgt aus Lemma 4, (j), daß $\bigwedge_{i=1}^{\infty} Ra^i = Ra^n$ für hinreichend großes n gilt; und aus Lemma 4, (k) folgt dann schließlich $a^n = 0$, da ja a zu N gehört. Also folgt (i) aus (iii) und die Äquivalenz der Bedingungen (i) bis (iii) ist erwiesen.

Beispiel *eines autodualen Ringes, dessen Radikal kein Nilideal ist.* Es sei K ein kommutativer Körper, A eine Abelsche Gruppe mit Operatoren aus K, die eine abzählbare Basis $a(1), a(2), \ldots, a(i), \ldots$ besitzt. Weiter sei $P = K[t]$ der Integritätsbereich aller formalen Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} k_i t^i$ mit Koeffizienten aus K. Die Additionsgruppe des zu konstruierenden Ringes R sei einfach die direkte Summe der Additionsgruppen von A und P. Die Multiplikation in R werde durch die folgenden Regeln festgelegt:

(1) $a'a'' \neq 0$ für a', a'' in A.
(2) $p'p''$ sei definiert wie in P für p', p'' in P.
(3) Elemente in K operieren in natürlicher Weise in R.
(4) $a(1)t = ta(1) = 0$, $a(i+1)t = ta(i+1) = a(i)$.

Dann ist R ein kommutativer Ring mit der folgenden Idealstruktur

$$0 < Ra(1) < \cdots < Ra(i) < Ra(i+1) < \cdots < A < \cdots < Rt^{i+1} < Rt^i < \cdots < Rt = N < R;$$

$$A = A_L,\ [Ra(i)]_L = Rt^i,\ [Rt^i]_L = Ra(i),\ 0 = R_L,\ R = 0_L,\ A = AN.$$

Also ist R ein autodualer Ring. Aber $N = Rt$ ist kein Nilideal, da A das umfassendste Nilideal ist.

Satz 4. *Die folgenden Eigenschaften des autodualen Ringes R sind untereinander äquivalent.*

(i) *In R existiert die Eins.*
(ii) *In R existiert eine Linkseins.*
(iii) *Es gibt keine unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R.*
(iv) *Es gibt keine unendliche Menge unabhängiger minimaler Rechtsideale in R/N.*
(v) *In R/N existiert die Eins.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt. Wir nehmen weiter an, daß (i) gilt, und daß es eine unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R gibt. Dann gibt es auch eine abzählbar unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R, die wir etwa mit $J(1), J(2), \ldots, J(i), J(i+1), \ldots$ bezeichnen. Wir setzen $U(i) = \sum_{i \leq j} J(j)$. Dies ist dann eine abnehmende Folge von Linksidealen. Aus der Unabhängigkeit der minimalen Linksideale $J(k)$ folgt insbesondere, daß $J(i) \cap U(i+1) = 0$, $J(i) + U(i+1) = U(i)$ ist. Also gilt

$$0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} U(i) < \cdots < U(n+1) < U(n) < \cdots < U(1).$$

Durch Dualisierung folgt dann aber, daß

$$U(1)_R < \cdots < U(n)_R < U(n+1)_R < \cdots$$

und daß $R = 0_R$ die Vereinigungsmenge der Ideale $U(n)_R$ ist. Nun existiert in R eine Linkseins e, so daß insbesondere $R = eR$ ist. Dann gehört aber e schon zu einem Ideal $U(m)_R < R$. Dies ist ein Widerspruch, der die Unmöglichkeit der Existenz unendlich vieler unabhängiger minimaler Linksideale erweist. Also ist (iii) eine Folge von (ii).

Wir nehmen jetzt die Gültigkeit von (iii) an. Es folgt aus Lemma 4, (d), daß $S = N_R = N_L$ die Summe aller minimalen Linksideale ist. Aus (iii) folgt dann, daß S die Summe endlich vieler minimaler Linksideale ist. Dann ist aber bekanntlich 0 der Durchschnitt von endlich vielen Linksidealen, die maximale Teilideale von S sind. Dualisierung zeigt, daß R

die Summe endlich vieler Rechtsideale ist, die minimale N enthaltende Ideale sind. Dann ist aber R/N Summe endlich vieler minimaler Rechtsideale, so daß (iv) aus (iii) folgt.

Daß (v) aus (iv) folgt, ist ein wohlbekannter Satz [da ja aus (iv) der Doppelkettensatz für Rechtsideale in R/N folgt]. Existiert schließlich in R/N die Eins, so folgern wir aus Lemma 4, (b), daß x stets zu $Rx \cap xR$ gehört; und nun folgt aus Zusatz 3 die Existenz der Eins in R. Also ist (i) eine Folge von (v) und der Beweis der Äquivalenz der Eigenschaften (i) bis (v) ist erbracht.

Bemerkung. Natürlich entstehen durch Vertauschung von Rechts und Links aus den Eigenschaften (ii) bis (v) äquivalente Eigenschaften.

Beispiel *eines autodualen Ringes ohne Eins.*

Ein solches Beispiel erhält man ganz einfach, indem man eine direkte Summe unendlich vieler isomorpher, kommutativer Körper bildet.

Literaturverzeichnis.

Baer, R.

[1] Inverses and zero-divisors. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 48 (1942), 630—638.

[2] Radical ideals. Amer. Journal of Math. vol. 65 (1943), pp. 537—568.

[3] Rings with duals. Amer. Journal of Math., vol. 65 (1943), pp. 569—584.

Hall, M.

[1] A type of algebraic closure. Ann. of Math., vol. 40 (1939), pp. 360—369.

Jacobson, N.

[1] The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. Journal of Math., vol. 67 (1945), pp. 300—320.

Kaplansky, I.

[1] Dual rings. Ann. of Math., vol. 49 (1948), pp. 689—701.

Köthe, G.

[1] Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist. Math. Zeitschrift, Bd. 32 (1930), pp. 161—186.

(Eingegangen am 28. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 18—20 (1952).

Verallgemeinerte Matrixtransformationen.

Von

K. Zeller in Tübingen.

A. Robinson [3] und H. Melvin-Melvin [2] haben kürzlich den Toeplitzschen und verwandte Sätze über Matrixtransformationen verallgemeinert. Wir bringen eine vereinfachte Darstellung ihrer Ergebnisse, wobei wir die Standardmethoden der Funktionalanalysis verwenden.

Wir betrachten zwei B-Räume $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, lineare stetige Operationen $A_{nk}(n, k = 0, 1, \ldots)$ aus $(\mathfrak{E} \to \mathfrak{F})$ und die Transformation

$$z_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k \qquad (\text{mit } x_k \in \mathfrak{E},\ z_n \in \mathfrak{F}). \tag{1}$$

Alle auftretenden Grenzwerte — z. B. die Summen in (1) — sind im Sinne der Norm des jeweils betrachteten B-Raumes zu verstehen.

Nun bezeichne $\mathfrak{E}_F$ die Menge der in $\mathfrak{E}$ konvergenten Folgen $\mathfrak{x} = \{x_k\}$.

Satz 1. *Genau dann existieren für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_F$ alle Summen z_n und konvergieren die z_n für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert, wenn die A_{nk} folgenden Bedingungen genügen:*

(Zn) $\left|\sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k\right| \leqq M$ [1]) *für* $|x_k| \leqq 1\,(k = 0, 1, \ldots)$ *und* $n, r = 0, 1, \ldots$;

(Zs) $\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x\,(n = 0, 1, \ldots)$ *und* $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x$ *ex. für* $x \in \mathfrak{E}$;

(Sp) $\lim_{n \to \infty} A_{nk} x\,(k = 0, 1, \ldots)$ *ex. für* $x \in \mathfrak{E}$.

Sind diese Bedingungen erfüllt und setzen wir $\lim_k x_k = x_*$, *so gilt*

$$\lim_n z_n = \lim_n \textstyle\sum_k A_{nk} x_* + \sum_k \lim_n A_{nk} (x_k - x_*) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_F). \tag{2}$$

Beweis. Wir benötigen zwei Lemmata. In diesen bedeuten die $U_n^{(r)}$ lineare stetige Operationen aus $(\mathfrak{D} \to \mathfrak{F})$, wo $\mathfrak{D}$ ein weiterer B-Raum ist.

Lemma 1. *Existiert* $\lim_n \lim_r U_n^{(r)}(\mathfrak{x})$ *für alle* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, *so erfüllen die linearen Operationen* $U_n(\mathfrak{x}) = \lim_r U_n^{(r)}(\mathfrak{x})$ *eine Beziehung* $|U_n| \leqq M\,(n = 0, 1, \ldots)$.

Lemma 2. *Gilt* $|U_n^{(r)}| \leqq M\,(n, r = 0, 1, \ldots)$ *und existiert*

$$\lim_n \lim_r U_n^{(r)}(\mathfrak{x}) = U(\mathfrak{x})$$

für alle $\mathfrak{x}$ einer Grundmenge in $\mathfrak{D}$, so existiert dieser Grenzwert sogar für alle $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{D}$ und U ist eine lineare stetige Operation mit $|U| \leqq M$.

Die Lemmata erhalten wir durch zweimalige Anwendung von Th. 3 bzw. Th. 5 bei Banach [1], S. 79—80 (Th. 3 und 5 sind die bekannten

[1]) M, $M(\mathfrak{x})$, K bedeuten gewisse, nicht näher bestimmte positive Zahlen.

Sätze über Folgen linearer Operationen). Bei den Anwendungen setzen wir

$$U_n^{(r)}(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k \qquad (\text{mit } \mathfrak{x} = \{x_k\}). \tag{3}$$

Nun bildet $\mathfrak{E}_F$ bei natürlicher Erklärung der „linearen Verknüpfungen" einen B-Raum mit der Norm $|\mathfrak{x}| = \sup_k |x_k|$. In $\mathfrak{E}_F$ bilden die Folgen der Form $\{x, x, x, \ldots\}$ und $\{0, \ldots, 0, x_r, 0, \ldots\}$ (r bel.) eine Grundmenge. Genauer gilt für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_F$

$$\{x_*, x_*, \ldots\} + \{x_0 - x_*, \ldots, x_r - x_*, 0, 0, \ldots\} \to \mathfrak{x} \quad (r \to \infty). \tag{4}$$

(Man vgl. die entsprechenden Tatsachen für Zahlenfolgen, s. etwa Banach [1], S. 11 und 65.) Wir fassen nun die U aus (3) als Operationen von $\mathfrak{E}_F$ in $\mathfrak{F}$ auf.

Die Bedingungen sind notwendig. Für Zs und Sp ist das klar. Bei Zn folgt die Notwendigkeit aus Lemma 1, denn jede Folge der Form $\{x_0, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots\}$ mit $|x_k| \leqq 1$ gehört zu $\mathfrak{E}_F$ und hat in $\mathfrak{E}_F$ eine Norm $\leqq 1$.

Die Bedingungen sind hinreichend. Dies ergibt sich aus Lemma 2 (die Grundmengenbedingung ist wegen Zs und Sp erfüllt).

Die *Formel* (2) erhält man aus der Stetigkeit von U (vgl. Lemma 2) und (4).

Wir gehen zum nächsten Satz über und setzen

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ y_n, x_k \in \mathfrak{E}). \tag{5}$$

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{E}_R$ der in $\mathfrak{E}$ konvergenten Reihen, d. h. derjenigen $\mathfrak{x} = \{x_k\}$, für die $\mathfrak{y} = \{y_n\} \in \mathfrak{E}_F$ ist.

Satz 2. *Genau dann existieren für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_R$ alle Summen z_n und konvergieren die z_n für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert, wenn die A_{nk} neben* Sp *folgender Bedingung genügen:*

$$|\sum_{k=0}^{r} (A_{nk} - A_{n,k+1})\, y_k| \leqq M \quad \text{für } |y_k| \leqq 1 \quad (k = 0, 1, \ldots) \text{ und } n, r = 0, 1, \ldots. \tag{Zn*}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\lim_n z_n = \sum_k \lim_n A_{nk}\, x_k. \tag{6}$$

Beweis. Wir gehen genau so vor wie bei Satz 1. $\mathfrak{E}_R$ bildet einen B-Raum mit der Norm $|\mathfrak{x}| = \sup_n |y_n|$. Die Folgen der Form

$$\{0, \ldots, 0, x_r, 0, \ldots\} \ (r \text{ bel.})$$

bilden in $\mathfrak{E}_R$ eine Grundmenge, genauer gilt für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_R$

$$\{x_0, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots\} \to \mathfrak{x} \qquad (r \to \infty). \tag{7}$$

Es ist (Abelsche partielle Summation)

$$\sum_{k=0}^{r+1} A_{nk}\, x_k = \sum_{k=0}^{r} (A_{nk} - A_{n,k+1})\, y_k + A_{n,r+1}\, y_{r+1} = U_n^{(r+1)}(\mathfrak{x}). \tag{8}$$

Die Bedingungen sind notwendig. Sei $|y_k| \leqq 1\,(k = 0, 1, \ldots)$, $y_k = 0\,(k > r)$, sonst beliebig. Dann ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_R$, $x_k = 0\,(k > r+1)$ und (in $\mathfrak{E}_R$) $|\mathfrak{x}| \leqq 1$. Lemma 1 liefert nun mittels (8) die Bedingung Zn*. Sp ist offenbar notwendig.

Die Bedingungen sind hinreichend. Aus Sp folgt — man vergleiche Lemma 2 — die Beziehung $|A_{n0}| \leqq K\,(n = 0, 1, \ldots)$. Setzt man in Zn* lauter gleiche y_k ein, so erhält man $|A_{nk}| \leqq M + K\,(n, k = 0, 1, \ldots)$. Aus (8) sieht man $|U_n^{(r)}| \leqq 2M + K\,(n, r = 0, 1, \ldots)$. Lemma 2 liefert die Behauptung.

Die *Formel* (6) erhält man anschließend mit (7).

Man könnte bei der Transformation in Satz 1 (oder in Satz 2) die schwächere Forderung stellen, daß z_n nur für $n > n_0(\mathfrak{x})$ erklärt ist. Dann ergibt sich, daß es ein allen $\mathfrak{x}$ gemeinsames n_0 gibt. Zum Beweise bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_n$ die Menge der $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{E}_F$, für die z_n erklärt ist. Nach Banach [1], S. 24, Th. 5, ist entweder $\mathfrak{G}_n$ mager (d. h. von I. Kategorie) in $\mathfrak{E}_F$ oder $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{E}_F$. Entsprechendes gilt dann für die Mengen $\mathfrak{H}_r = \bigcap_{n=r}^{\infty} \mathfrak{G}_n$. Aus der eingangs erwähnten Forderung folgt $\bigcup_{r=0}^{\infty} \mathfrak{H}_r = \mathfrak{E}_F$, somit ist ein $\mathfrak{H}_{n_0} = \mathfrak{E}_F$, w. z. b. w.

Es sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die betreffenden Transformationen als lineare stetige Transformationen von $\mathfrak{E}_F$ bzw. $\mathfrak{E}_R$ in $\mathfrak{F}_F$ zu behandeln. n kann durch einen stetigen Parameter ersetzt werden. Man betrachtet etwa z_t für $t \to \infty$ und erhält im wesentlichen dieselben Bedingungen wie in Satz 1 und 2.

Robinson untersucht auch beliebige lineare, also nicht notwendig stetige Operationen A_{nk}, wobei sich an den Resultaten wenig ändert, da sich bei den betreffenden Transformationen als notwendige Bedingung ergibt, daß „fast alle" A_{nk}, genauer: alle A_{nk} mit $k > k_0$ (wo k_0 eine gewisse Zahl ist), stetig sind. Unsere Methoden lassen sich in diesem Fall nicht anwenden (Robinson arbeitet mit dem „gleitenden Buckel"). Melvin-Melvin beschäftigt sich ferner mit der Frage, wann in den Bedingungen Zs und Sp die „schwache" Konvergenz der Operationenfolgen durch „starke" ersetzt werden darf.

Ähnlich wie in Satz 1 und 2 kann man Verallgemeinerungen anderer verwandter Transformationssätze erhalten.

Literaturverzeichnis.

Banach, S.

[1] Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

Melvin-Melvin, H.

[2] On generalized k-transformations in Banach spaces. Proc. London math. Soc., II. s., **53**, 83—108 (1951).

Robinson, A.

[3] On functional transformations and summability. Proc. London math. Soc., II. s., **52**, 132—160 (1950).

(Eingegangen am 4. Dezember 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 21—32 (1952).

Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I.

Von

Hans-Egon Richert in Göttingen.

1. Bezeichnet $p(m)$ wie üblich die Anzahl der Partitionen von m, $a_0(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen ABELschen Gruppen der Ordnung n, so ist bekanntlich [1])

$$a_0(1) = 1, \quad a_0(n) = p(\alpha_1)\, p(\alpha_2) \dots p(\alpha_r)$$

für die kanonische Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Für festes p ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_0(p^\nu)\, p^{-\nu s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - p^{-\nu s})^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 0,$$

und da $a_0(n)$ distributiv ist, folgt

$$\mathsf{Z}_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n)\, n^{-s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \zeta(\nu s), \quad \sigma > 1. \tag{1}$$

Ersichtlich ist $\mathsf{Z}_0(s)$ mit Ausnahme der einfachen Pole bei $s = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$ in $\sigma > 0$ regulär.

Im folgenden soll eine asymptotische Entwicklung für die summatorische Funktion $A_0(x) = \sum_{n \le x} a_0(n)$ angegeben werden. Dieses Problem ist bereits von D. G. KENDALL und R. A. RANKIN [2]) behandelt worden. Ihr Ergebnis lautete mit gewissen Konstanten C_1, C_2 *)

$$A_0(x) = C_1 x + C_2 x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log^2 x). \tag{2}$$

Dabei wurde ein bekannter Satz der analytischen Zahlentheorie von LANDAU benutzt, um mit

$$\mathsf{Z}_1(s) = \zeta(s)\, \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)\, n^{-s},$$

$$A_1(x) = \sum_{n \le x} a_1(n) = \sum_{m^2 n \le x} 1, \tag{3}$$

[1]) Vgl. A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 1937, 49—51.

[2]) D. G. KENDALL und R. A. RANKIN, Quart. J. Oxford, **18**, 1947, 197—208.

*) Anm. bei der Korrektur: Prof. RANKIN machte mich inzwischen darauf aufmerksam, daß in den Fehlergliedern ihrer Ergebnisse, die hier unter (2) und (4) genannt sind, noch der Faktor $\log x$ anzubringen ist (vgl. Math. Reviews, **12**, 316).

die Entwicklung*)

$$A_1(x) = C_1' x + C_2' x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log x) \tag{4}$$

herzuleiten.

Hier werden wir den LANDAUschen Satz durch eine andere Aussage, die wir in Lemma 3 gewinnen werden, ersetzen. Wenn man zwei dort auftretende Summen trivial abschätzte, würde dann (4), sogar ohne den Faktor $\log x$, folgen. Zieht man aber die VAN DER CORPUTsche Theorie der Exponentenpaare heran, so läßt sich der Exponent im Fehlerglied von (4) sogar unter $\frac{1}{4}$, nämlich auf $\frac{2}{5}$, bringen (Satz 3). Dann ergibt sich in einfacher Weise weiter, daß man in der Entwicklung (2) aus dem Fehlerglied noch einen Term der Form $C_3 x^{\frac{1}{3}}$ herausziehen kann. Das dort verbleibende Fehlerglied besitzt dann die Größenordnung $x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x$ (Satz 4).

2. Es seien

$$Z_2(s) = \zeta(s)\,\zeta(2s)\,\zeta(3s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_2(n)\, n^{-s}, \tag{5}$$

$$Z_3(s) = \prod_{\nu=4}^{\infty} \zeta(\nu s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_3(n)\, n^{-s}, \tag{6}$$

$$Z_4(s) = \prod_{\nu=5}^{\infty} \zeta(\nu s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n)\, n^{-s}, \tag{7}$$

$$c_\mu = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right), \qquad \mu = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

$$\psi(\omega) = \omega - [\omega] - \tfrac{1}{2}, \tag{9}$$

$$R_1(\omega, \varrho) = \sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{\varrho+1}}} \psi\left(\frac{\omega}{n^\varrho}\right), \tag{10}$$

$$R_2(\omega, \varrho) = \sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{\varrho+1}}} \psi\left(\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right). \tag{11}$$

Die Summation $n \leqq \omega$ bedeute stets $n = 1, 2, \ldots, [\omega]$.

3. Wir wollen zunächst ein allgemeines Teilerproblem angreifen. Wir benötigen nur einen Spezialfall desselben, doch verursacht es nicht mehr Mühe, das Problem in der nachfolgenden allgemeinen Form zu behandeln.

Es seien x, μ, ν reelle Zahlen, $x \geqq 1$, $\mu > \nu > 0$,

$$D(x; \mu, \nu) = \sum_{m^\mu n^\nu \leq x} 1, \tag{12}$$

und wir fragen nach einer asymptotischen Entwicklung für $D(x; \mu, \nu)$.

Wegen

$$D(x;\mu,\nu)=\sum_{m^\nu n\leqq x^\nu}{}^{\mu}{}_{1}\,1=D\left(x^{\frac{1}{\nu}};\frac{\mu}{\nu},1\right)$$

können wir uns, wenn wir $x^{\frac{1}{\nu}}=\tau$ und $\frac{\mu}{\nu}=\varrho$ setzen, bei der Herleitung auf $D(\tau;\varrho,1)$ mit $\varrho>1$ beschränken.

Wir benötigen folgende Hilfssätze:

Lemma 1. *Sind $g_1(n)$, $g_2(n)$ zwei zahlentheoretische Funktionen, ω, w, ϱ reelle Zahlen,*

$$\omega\geqq 1,\quad 1\leqq w\leqq\omega^{\frac{1}{\varrho}},\quad \varrho>0,\quad G_\nu(\omega)=\sum_{n\leqq\omega}g_\nu(n),\qquad \nu=1,2,$$

so gilt

$$\sum_{m^\varrho n\leqq\omega}g_1(m)\,g_2(n)=\sum_{m\leqq w}g_1(m)G_2\left(\frac{\omega}{m^\varrho}\right)+\sum_{n\leqq\frac{\omega}{w^\varrho}}g_2(n)G_1\left(\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right)-G_1(w)G_2\left(\frac{\omega}{w^\varrho}\right).$$

Beweis. Klar.

Lemma 2. *Es seien ω und $\varkappa$ zwei reelle Zahlen, $\omega>0$, $0<\varkappa\neq 1$. ann ist*

$$\sum_{n\leqq\omega}n^{-\varkappa}=\zeta(\varkappa)-\frac{1}{\varkappa-1}\,\omega^{1-\varkappa}-\psi(\omega)\,\omega^{-\varkappa}+O(\omega^{-\varkappa-1}).$$

Beweis. Folgt aus der Eulerschen Summenformel zweiter Ordnung.

Lemma 3. *Für $\tau\geqq 1$, $\varrho>1$ ist*

$$D(\tau;\varrho,1)=\sum_{m^\varrho n\leqq\tau}1=\zeta(\varrho)\,\tau+\zeta\left(\frac{1}{\varrho}\right)\tau^{\frac{1}{\varrho}}-R_1(\tau,\varrho)-R_2(\tau,\varrho)+O(1).$$

Beweis. Nach (12) und Lemma 1, wenn wir dort $g_1(n)=g_2(n)=1$ und $w=\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}$ setzen, ist

$$D(\tau;\varrho,1)=\sum_{m\leqq\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}}\left[\frac{\tau}{m^\varrho}\right]+\sum_{n\leqq\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}}\left[\left(\frac{\tau}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right]-\left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right]^2,$$

also nach (9), (10) und (11)

$$D(\tau;\varrho,1)=-R_1(\tau,\varrho)-R_2(\tau,\varrho)+\sum_{n\leqq\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}}\left(\frac{\tau}{n^\varrho}-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\sum_{n\leqq\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}}\left(\left(\frac{\tau}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}-\frac{1}{2}\right)-\left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right]^2.$$

Verwenden wir hierin Lemma 2 (man beachte $\varrho \neq 1$) mit $\omega = \tau^{\frac{1}{\varrho+1}}$ für $\varkappa = \varrho$ und $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$, so folgt

$$D(\tau;\varrho,1) = -R_1(\tau,\varrho) - R_2(\tau,\varrho)$$
$$+\tau\left(\zeta(\varrho) - \frac{1}{\varrho-1}\tau^{\frac{1-\varrho}{\varrho+1}} - \psi\left(\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right)\tau^{-\frac{\varrho}{\varrho+1}} + O(\tau^{-1})\right)$$
$$+\tau^{\frac{1}{\varrho}}\left(\zeta\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{1}{\frac{1}{\varrho}-1}\tau^{\frac{1-\frac{1}{\varrho}}{\varrho+1}} - \psi\left(\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right)\tau^{-\frac{1}{\varrho(\varrho+1)}} + O\left(\tau^{-\frac{1+\frac{1}{\varrho}}{\varrho+1}}\right)\right)$$
$$-\left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right] - \left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right]^2 = \zeta(\varrho)\tau + \zeta\left(\frac{1}{\varrho}\right)\tau^{\frac{1}{\varrho}} - R_1(\tau,\varrho) - R_2(\tau,\varrho) + O(1).$$

4. Um die Funktionen $R_\nu(\tau,\varrho)$, $\nu = 1, 2$ ausreichend abzuschätzen, wollen wir die VAN DER CORPUTsche[3]) Methode der Exponentenpaare in der von E. PHILLIPS[4]) vereinfachten Form anwenden. Hierfür benötigen wir die

Definition[5]). *Wir werden das Paar absoluter Konstanten (k, l) ein Exponentenpaar nennen, wenn*

$$0 \leqq k \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \leqq l \leqq 1 \tag{13}$$

und es zu jeder positiven Zahl h zwei nur von h abhängige Zahlen r und c (r ganz, $\geqq 5$, $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, so daß stets die Abschätzung

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} = O(z^k a^l)$$

mit nur von h und u abhängiger O-Konstanten gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$u > 1, \quad 1 \leqq a < b < ua, \quad y > 0, \quad z = y a^{-h} > 1, \tag{14}$$

$$\begin{cases} f(n) \text{ ist im Intervall } a \leqq n \leqq b \text{ definiert, reell, } r\text{-mal differenzierbar und für } a \leqq n \leqq b,\ 0 \leqq p \leqq r-1 \text{ ist} \\ \qquad |f^{(p+1)}(n) - (-1)^p y h(h+1)\dots(h+p-1)n^{-h-p}| \\ \qquad\qquad < c y h(h+1)\dots(h+p-1)n^{-h-p}. \end{cases} \tag{15}$$

Lemma 4. *$(0, 1)$ ist ein Exponentenpaar.*

Beweis. Stets gilt die triviale Abschätzung

$$\left|\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqq b < ua = u z^0 a^1.$$

---

[3]) J. G. VAN DER CORPUT, Math. Annalen, **87**, 1922, 39—65.

[4]) ERIC PHILLIPS, Quart. J. Oxford, **4**, 1933, 209—225.

[5]) l. c. [4]) Definition.

Lemma 5[6]. *Ist (k, l) ein Exponentenpaar, so ist es auch für jedes natürliche q (k_q, l_q) mit*

$$k_q = \frac{1}{2} - \frac{1 - l + qk}{Q + 2(Q-1)k}, \quad l_q = \frac{1}{2} + \frac{k}{Q + 2(Q-1)k}, \quad wo\ Q = 2^q.$$

Lemma 6[7]. *Es sei $a < b$, $f(n)$ im Intervall $a \leqq n \leqq b$ reell und zweimal differenzierbar, $|f'(b) - f'(a)| < 2$, $f''(n)$ stets $\leqq -\lambda$, wo λ eine von n unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} = O(1) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}).$$

Lemma 7. *Ist $g(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, $\xi > 0$, so ist für $1 \leqq a < b < 2a$*

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \psi(g(n)) = O(a\xi^{-1}) + O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right) \Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \nu g(n)} \Big|\right).$$

Beweis. Zunächst ist für $\xi > 0$[8]

$$\xi \int_0^{\xi^{-1}} \psi(g(n) \pm t)\, dt = \sum_{\nu=-\infty,\ \nu \neq 0}^{\infty} d_\nu e^{2\pi i \nu g(n)}$$

mit

$$d_\nu = O\left(\frac{\xi}{\nu^2}\right), \quad d_\nu = O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

also

$$\xi \int_0^{\xi^{-1}} \sum_{a \leqq n \leqq b} \psi((g(n) \pm t)\, dt = \sum_{\nu=-\infty,\ \nu \neq 0}^{\infty} d_\nu \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \nu g(n)}$$

$$= O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right) \Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \nu g(n)} \Big|\right). \tag{16}$$

Ferner ist für $t > 0$

$$\psi(g(n) + t) - t \leqq \psi(g(n)) \leqq \psi(g(n) - t) + t$$

und daher für $\xi > 0$

$$\xi \int_0^{\xi^{-1}} \psi(g(n) + t)\, dt - \tfrac{1}{2}\xi^{-1} \leqq \psi(g(n)) \leqq \xi \int_0^{\xi^{-1}} \psi(g(n) - t)\, dt + \tfrac{1}{2}\xi^{-1}.$$

Summieren wir hierin für $1 \leqq a < b < 2a$ über $a \leqq n \leqq b$, so folgt mit (16)

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \psi(g(n)) = O(a\xi^{-1}) + O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right) \Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \nu g(n)} \Big|\right).$$

[6]) l. c. [4]) Theorem 4.
[7]) l. c. [3]) Hilfssatz 3.
[8]) l. c. [3]), 54.

Lemma 8. *Es seien α, β, γ drei positive, reelle Zahlen und (k, l) ein Exponentenpaar mit $k > 0$. Dann ist für $x \geqq 2$*

$$\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + \begin{cases} O\left(x^{\frac{\alpha l + (\beta - \alpha\gamma)k}{k+1}}\right) & \text{für } l > \gamma k, \\ O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} \log x\right) & \text{für } l = \gamma k, \\ O\left(x^{\frac{\beta k}{1 + (1+\gamma)k - l}}\right) & \text{für } l < \gamma k. \end{cases}$$

Beweis. Wir beachten, daß für natürliches ν die Funktion $f(n) = -\frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}$ der Bedingung (15) in der Definition eines Exponentenpaares genügt, wenn wir dort setzen $y = \gamma \nu x^\beta$, $h = \gamma + 1$, $u = 2$, denn nach der Festlegung von h und u sind r und c bestimmt, $f(n)$ ist beliebig oft, also r-mal differenzierbar.

Sind weiter $1 \leqq a < b < 2a$ und $z = \gamma \nu x^\beta a^{-\gamma-1} > 1$, so sind auch die Bedingungen (14) erfüllt, so daß wir erhalten ((k, l) bezeichnet in diesem Beweis irgendein Exponentenpaar mit $k > 0$)

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O((\nu x^\beta a^{-\gamma-1})^k a^l) = O(\nu^k x^{\beta k} a^{l-(1+\gamma)k}) \tag{17}$$

für $1 \leqq a < b < 2a$, $a^{\gamma+1} < \gamma \nu x^\beta$.

Ferner sind für $1 \leqq a < b < 2a$ und $a^{\gamma+1} \geqq \gamma \nu x^\beta$ bei $f(n) = -\frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}$ die Voraussetzungen in Lemma 6 mit $\lambda = \gamma(\gamma+1)\nu x^\beta a^{-\gamma-2}$ erfüllt, so daß wir nach Lemma 6 bekommen

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O(1) + O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) = O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right)$$

für $1 \leqq a < b < 2a$, $a^{\gamma+1} \geqq \gamma \nu x^\beta$.

Hieraus folgt mit (17)

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O(\nu^k x^{\beta k} a^{l-(1+\gamma)k}) + O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) \tag{18}$$

für $1 \leqq a < b < 2a$.

Wählen wir nun in Lemma 7 $g(n) = \frac{x^\beta}{n^\gamma}$, so folgt mit (18) bei Beachtung von (12) und $k > 0$

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O(a\xi^{-1}) + O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right)\left(\nu^k x^{\beta k} a^{l-(1+\gamma)k} + \nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$= O(a\xi^{-1}) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) + O(\xi^k x^{\beta k} a^{l-(1+\gamma)k}) \quad \text{für } 1 \leqq a < b < 2a.$$

Setzen wir

$$\xi = x^{-\frac{\beta k}{k+1}} a^{\frac{1+(1+\gamma)k-l}{k+1}},$$

so erhalten wir

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} a^{\frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) \tag{19}$$

für $1 \leqq a < b < 2a$.

In den folgenden Rechnungen mögen Summen der Form $\sum_{A \leqq n \leqq B}$ mit $A > B$ 0 bedeuten. Wir werden die Fälle $l \gtrless \gamma k$ unterscheiden. Zunächst ist

$$\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = \sum_{1 \leqq m \leqq K} \sum_{2^{m-1} \leqq n \leqq 2^m - 1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) + \sum_{2^K \leqq n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right), \tag{20}$$

wo $K = \left[\frac{\log x^\alpha}{\log 2}\right]$.

Ist $l > \gamma k$, so verwenden wir (19) in (20) und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) &= O(1) \sum_{1 \leqq m \leqq K} \left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} 2^{m\frac{l-\gamma k}{k+1}} + x^{-\frac{\beta}{2}} 2^{m\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}\right) \\ &+ O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1} + \alpha\frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2} + \alpha\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}\right) \\ &= O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\alpha l + (\beta - \alpha\gamma)k}{k+1}}\right).\end{aligned}$$

Ist $l = \gamma k$, so folgt wegen $K = O(\log x)$ ebenso

$$\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} \log x\right).$$

Ist dagegen $l < \gamma k$, so setzen wir mit der Abkürzung

$$\delta = \frac{\beta k}{1 + (1+\gamma)k - l}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) &= \sum_{n \leqq 2^{L-1}-1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) + \sum_{L \leqq m \leqq K} \sum_{2^{m-1} \leqq n \leqq 2^m - 1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) \\ &+ \sum_{2^K \leqq n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right), \text{ wo } L = 1 + \left[\frac{\log(1 + x^\delta)}{\log 2}\right].\end{aligned} \tag{21}$$

In (21) schätzen wir die erste Summe trivial ab. In den beiden übrigen Summen verwenden wir wieder (19) und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) &= O(x^\delta) + O\left(x^{\alpha\left(1+\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1} + \delta\frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) \\ &= O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{1+(1+\gamma)k-l}}\right).\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 8 vollständig bewiesen.

Bisher kennen wir nur das Exponentenpaar (0, 1), und Lemma 8 würde mit diesem nur die nach (10) und (11) ohnehin triviale Abschätzung $R_\nu(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right)$ $(\nu = 1, 2)$ liefern. Geeignetere Exponentenpaare können wir nun mit Hilfe von Lemma 5 erhalten. Dabei wollen wir uns mit einem einfachen Exponentenpaar begnügen, da weitere Rechnungen in keinem Verhältnis zu den geringfügigen Verbesserungen stehen.

Nach Lemma 4 ist (0, 1) ein Exponentenpaar. Nach Lemma 5 ist daher auch mit $q = 1$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein Exponentenpaar. Hieraus erhalten wir abermals mit Lemma 5 neue Exponentenpaare, z. B. mit $q = 3$ bzw. $q = 2$ beziehentlich die Exponentenpaare $(\frac{11}{30}, \frac{16}{30})$ und $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$.

Benutzen wir nun etwa das letzte dieser Exponentenpaare in Lemma 8, so folgt mit $\alpha = \frac{1}{\varrho+1}$, $\beta = 1$, $\gamma = \varrho$ nach (10)

$$R_1(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{2(\varrho+1)}}\right) + \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{3}} \log \tau) & \text{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho > 2, \end{cases} \tag{22}$$

und mit $\alpha = \frac{1}{\varrho+1}$, $\beta = \frac{1}{\varrho}$, $\gamma = \frac{1}{\varrho}$ nach (11) wegen $\varrho > 1$

$$R_2(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{2(\varrho+1)}}\right) + O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right). \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt wegen $\varrho > 1$

$$R_1(\tau, \varrho) + R_2(\tau, \varrho) = \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{3}} \log \tau) & \text{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho > 2. \end{cases} \tag{24}$$

Aus (24) und Lemma 3 haben wir daher den

Satz 1. *Sind τ und ϱ zwei reelle Zahlen $\tau \geqq 2$, $\varrho > 1$, so gilt*

$$D(\tau;\ \varrho, 1) = \sum_{m^\varrho n \leqq \tau}{}' 1 = \xi(\varrho)\tau + \xi\left(\frac{1}{\varrho}\right)\tau^{\frac{1}{\varrho}} + \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \textit{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{3}} \log \tau) & \textit{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \textit{für } \varrho > 2. \end{cases}$$

Setzen wir wieder $\tau = x^{\frac{1}{\nu}}$, $\varrho = \frac{\mu}{\nu}$, so folgt

Satz 2. *Sind x, μ, ν reelle Zahlen, $x \geqq 2$, $\mu > \nu > 0$, so gilt*

$$D(x;\mu,\nu) = \sum_{m^\mu n^\nu \leqq x} 1 = \zeta\left(\frac{\mu}{\nu}\right) x^{\frac{1}{\nu}} + \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right) x^{\frac{1}{\mu}} + \begin{cases} O\left(x^{\frac{2}{3(\mu+\nu)}}\right) & \text{für } \mu < 2\nu, \\ O\left(x^{\frac{2}{9\nu}} \log x\right) & \text{für } \mu = 2\nu, \\ O\left(x^{\frac{2}{2\mu+5\nu}}\right) & \text{für } \mu > 2\nu. \end{cases}$$

Insbesondere folgt für $\varrho = 2$ aus Satz 1 nach (3)

Satz 3. *Ist $a_1(n)$ die Anzahl der quadratischen Teiler von n, also $a_1(n) = \sum_{d^2 \mid n} 1$, so gilt für die summatorische Funktion*

$$A_1(x) = \sum_{n \leqq x} a_1(n) = \zeta(2)\, x + \zeta(\tfrac{1}{2})\, x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{2}{9}} \log x).$$

5. Hiermit können wir nun leicht zu einer Aussage über $A_0(x)$ gelangen. Zunächst beweisen wir noch vier Hilfssätze:

Lemma 9. *Es ist für jedes positiv-reelle ω*

$$\sum_{n \leqq \omega} a_1(n)\, n^{-\frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}\, \zeta(2)\, \omega^{\frac{2}{3}} + 3\, \zeta(\tfrac{1}{2})\, \omega^{\frac{1}{6}} + \zeta(\tfrac{1}{3})\, \zeta(\tfrac{2}{3}) + O(\omega^{-\frac{1}{9}} \log \omega).$$

Beweis. Nach (3) ist

$$\sum_{n \leqq \omega} a_1(n)\, n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{m^2 n \leqq \omega} m^{-\frac{2}{3}}\, n^{-\frac{1}{3}}.$$

Wir setzen in Lemma 1 $g_1(n) = n^{-\frac{2}{3}}$, $g_2(n) = n^{-\frac{1}{3}}$, $\varrho = 2$ und $w = \omega^{\frac{1}{3}}$ und erhalten

$$\sum_{n \leqq \omega} a_1(n)\, n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{m \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{n \leqq \frac{\omega}{m^2}} n^{-\frac{1}{3}} + \sum_{n \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \sum_{m \leqq \sqrt{\frac{\omega}{n}}} m^{-\frac{2}{3}} - \Big(\sum_{m \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}}\Big)\Big(\sum_{n \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}}\Big). \tag{25}$$

Hierin sind nach Lemma 2 mit (10) und (11)

$$\sum_{m \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{n \leqq \frac{\omega}{m^2}} n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{m \leqq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \psi\left(\frac{\omega}{m^2}\right)\left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\right) = \zeta\left(\frac{1}{3}\right)\left(\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + 3\,\omega^{\frac{1}{9}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}})\,\omega^{-\frac{2}{9}} + O(\omega^{-\frac{5}{9}})\right) + \tfrac{3}{2}\,\omega^{\frac{2}{3}}\,(\zeta(2) - \omega^{-\frac{1}{3}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}})\,\omega^{-\frac{2}{3}} + O(\omega^{-1})) - \omega^{-\frac{1}{3}} R_1(\omega, 2) + O(\omega^{-\frac{1}{3}}). \tag{26}$$

$$\sum_{n\le\omega^{\frac13}} n^{-\frac13}\sum_{m\le\sqrt{\frac{\omega}{n}}} m^{-\frac23} = \sum_{n\le\omega^{\frac13}} n^{-\frac13}\left(\zeta\left(\frac23\right)+3\left(\sqrt{\frac{\omega}{n}}\right)^{\frac13}\right.$$

(27)
$$\left.-\psi\left(\sqrt{\frac{\omega}{n}}\right)\left(\sqrt{\frac{\omega}{n}}\right)^{-\frac23}+O\left(\left(\sqrt{\frac{\omega}{n}}\right)^{-\frac53}\right)\right)$$

$$=\zeta\left(\tfrac23\right)\left(\zeta\left(\tfrac13\right)+\tfrac32\,\omega^{\frac29}-\psi\left(\omega^{\frac13}\right)\omega^{-\frac19}+O\left(\omega^{\frac49}\right)\right)$$

$$+3\,\omega^{\frac16}\left(\zeta\left(\tfrac12\right)+2\,\omega^{\frac16}-\psi\left(\omega^{\frac13}\right)\omega^{-\frac16}+O\left(\omega^{-\frac12}\right)\right)-\omega^{-\frac13}R_2(\omega,2)+O\left(\omega^{-\frac13}\right),$$

(28)
$$\left(\sum_{m\le\omega^{\frac13}} m^{-\frac23}\right)\left(\sum_{n\le\omega^{\frac13}} n^{-\frac13}\right)$$

$$=\left(\zeta\left(\tfrac23\right)+3\,\omega^{\frac19}-\psi\left(\omega^{\frac13}\right)\omega^{-\frac23}\right)\left(\zeta\left(\tfrac13\right)+\tfrac32\,\omega^{\frac29}-\psi\left(\omega^{\frac13}\right)\omega^{-\frac19}\right)+O\left(\omega^{-\frac13}\right).$$

Aus (25) bis (28) folgt dann

$$\sum_{n\le\omega} a_1(n)\,n^{-\frac13}=\tfrac32\,\zeta(2)\,\omega^{\frac23}+3\zeta\left(\tfrac12\right)\omega^{\frac16}$$

$$+\zeta\left(\tfrac13\right)\zeta\left(\tfrac23\right)-\omega^{-\frac13}\left(R_1(\omega,2)+R_2(\omega,2)\right)+O\left(\omega^{-\frac13}\right).$$

Berücksichtigen wir hierin (24), so folgt die Behauptung.

Lemma 10. *Es ist*

$$A_2(x)=\sum_{n\le x} a_2(n)=\zeta(2)\,\zeta(3)\,x+\zeta\left(\tfrac12\right)\zeta\left(\tfrac32\right)x^{\frac12}+\zeta\left(\tfrac13\right)\zeta\left(\tfrac23\right)x^{\frac13}+O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\right).$$

Beweis. Nach (5), (3) und Lemma 1 ($g_1(n)=1$, $g_2(n)=a_1(n)$, $\omega=x$, $w=v$, $\varrho=3$) ist mit der Abkürzung $v=x^{\frac{7}{30}}\log^{\frac{3}{10}}x$

(29)
$$A_2(x)=\sum_{m^3n\le x} a_1(n)=\sum_{m\le v} A_1\left(\frac{x}{m^3}\right)+\sum_{n\le\sqrt[3]{x}}\sum_{v<m\le\sqrt{\frac{x}{n}}} a_1(n)\left[\sqrt{\frac{x}{n}}\right]-[v]\,A_1\left(\frac{x}{v^3}\right).$$

Hierin sind nach Satz 3 und Lemma 2

$$\sum_{m\le v} A_1\left(\frac{x}{m^3}\right)=\zeta(2)\,x\left(\zeta(3)-\tfrac12\,v^{-2}\right)+O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\right)$$

(30)
$$+\zeta\left(\tfrac12\right)x^{\frac12}\left(\zeta\left(\tfrac32\right)-2\,v^{-\frac12}\right)=\zeta(2)\,\zeta(3)\,x+\zeta\left(\tfrac12\right)\zeta\left(\tfrac32\right)x^{\frac12}$$

$$-\tfrac12\,\zeta(2)\,x\,v^{-2}-2\,\zeta\left(\tfrac12\right)x^{\frac12}\,v^{-\frac12}+O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\right),$$

(31)
$$[v]\,A_1\left(\frac{x}{v^3}\right)=O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\right)+v\left(\zeta(2)\,\frac{x}{v^3}+\zeta\left(\tfrac12\right)x^{\frac12}\,v^{-\frac32}\right)$$

$$=\zeta(2)\,x\,v^{-2}+\zeta\left(\tfrac12\right)x^{\frac12}\,v^{-\frac12}+O\left(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}}x\right)$$

und nach Lemma 9, wenn wir dort $\omega = \frac{x}{v^3}$ setzen,

$$(32)\quad \sum_{n \leqq \frac{x}{v^3}} a_1(n)\left[\sqrt[3]{\frac{x}{n}}\right] = O(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}} x) + x^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{3}{2}\zeta(2)\, x^{\frac{2}{3}} v^{-2} + 3\zeta(\tfrac{1}{2}) x^{\frac{1}{6}} v^{-\frac{1}{2}} + \zeta(\tfrac{1}{3})\zeta(\tfrac{2}{3}) + O(x^{-\frac{1}{9}} v^{\frac{1}{3}} \log x)\right)$$
$$= \tfrac{3}{2}\zeta(2)\, x\, v^{-2} + 3\zeta(\tfrac{1}{2}) x^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} + \zeta(\tfrac{1}{3})\zeta(\tfrac{2}{3}) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}} x).$$

Jetzt folgt aus (29) bis (32) die Behauptung.

Lemma 11. *Es ist*

$$A_3(x) = \sum_{n \leqq x} a_3(n) = O(x^{\frac{4}{5}}).$$

Beweis. Nach (6) und (7) ist

$$A_3(x) = \sum_{m^4 n \leqq x} a_4(n) \leqq \sum_{n \leqq x} \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a_4(n) \leqq x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n)\, n^{-\frac{1}{4}} = O(x^{\frac{1}{4}}),$$

da $\mathsf{Z}_4(s)$ für $\sigma = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ absolut konvergiert.

Lemma 12. *Für $\delta > \frac{1}{4}$ ist*

$$\sum_{n \leqq x} a_3(n)\, n^{-\delta} = \mathsf{Z}_3(\delta) + O(x^{\frac{1}{4}-\delta}).$$

Beweis. Für $\delta > \frac{1}{4}$ ist nach (6) und Lemma 11

$$\sum_{n \leqq x} a_3(n)\, n^{-\delta} = \mathsf{Z}_3(\delta) - \sum_{n > x} a_3(n)\, n^{-\delta} = \mathsf{Z}_3(\delta) + O(A_3(x)\, x^{-\delta})$$
$$+ O\Big(\sum_{n > x} n^{-\frac{3}{4}-\delta}\Big) = \mathsf{Z}_3(\delta) + O(x^{\frac{1}{4}-\delta}).$$

6. Nun beweisen wir endlich den

Satz 4. *Bezeichnet $a_0(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen Abelschen Gruppen der Ordnung n, so gilt für die summatorische Funktion*

$$(33)\quad A_0(x) = \sum_{n \leqq x} a_0(n) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}} x).$$

Dabei sind

$$c_\mu = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right),\quad c_1 = 2,29\ldots,\quad c_2 = -10 \cdot 1,46\ldots,\quad c_3 = 10^2 \cdot 1,14\ldots.$$

Beweis. Nach (1), (5) und (6) ist

$$A_0(x) = \sum_{m n \leqq x} a_2(m)\, a_3(n) = \sum_{n \leqq x} a_3(n)\, A_2\left(\frac{x}{n}\right)$$

und daher nach Lemma 10

$$A_0(x) = \sum_{n \leqq x} a_3(n)\left(\zeta(2)\zeta(3)\frac{x}{n} + \zeta(\tfrac{1}{2})\zeta(\tfrac{3}{2})\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \zeta(\tfrac{1}{3})\zeta(\tfrac{2}{3})\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$+ O\Big(\sum_{n \leqq x} a_3(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}} x\Big).$$

Hieraus folgt mit Lemma 12

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \zeta(2)\,\zeta(3)\,x\,\mathsf{Z}_3(1) + O(x^{\frac{1}{4}\ \ 1})) + \zeta(\tfrac{1}{2})\,\zeta(\tfrac{3}{2})\,x^{\frac{1}{2}}\,(\mathsf{Z}_1(\tfrac{1}{2}) + O(x^{\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{2}})) \\ &\quad + \zeta(\tfrac{1}{3})\,\zeta(\tfrac{2}{3})\,x^{\frac{1}{3}}\,(\mathsf{Z}_2(\tfrac{1}{3}) + O(x^{\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{3}})) + O(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{6}{10}} x) \\ &= \zeta(2)\,(\zeta(3)\,\mathsf{Z}_3(1)\,x + \zeta(\tfrac{1}{2})\,\zeta(\tfrac{3}{2})\,\mathsf{Z}_3(\tfrac{1}{2})\,x^{\frac{1}{2}} + \zeta(\tfrac{1}{3})\,\zeta(\tfrac{2}{3})\,\mathsf{Z}_3(\tfrac{1}{3})\,x^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + O(x^{\frac{3}{10}}\log^{\frac{9}{10}} x), \end{aligned}$$

woraus nach (6) und (8) die Behauptung folgt.

Zur Qualität des in (33) auftretenden Fehlergliedes sei noch folgendes erwähnt. Hat man im Fehlerglied von Satz 3, abgesehen von einem möglichen Logarithmusfaktor, statt $x^{\frac{2}{9}}$ allgemein x^{d_1}, $d_1 > 0$, erhalten, so folgt mit unserer Schlußweise für das Fehlerglied in (33), wiederum abgesehen von einem möglichen Logarithmusfaktor, statt $x^{\frac{3}{10}}$ allgemein x^{d_2}, $d_2 = \frac{1}{4-3d_1}$, so daß man mit unserer Methode in (33) nur ein Fehlerglied mit $d_2 > \frac{1}{4}$, ja sogar mit $d_2 \geqq \frac{2}{7} > \frac{1}{4}$, da ja Lemma 8 nur $d_1 \geqq \frac{1}{6}$ liefert, erreichen kann. Im übrigen ist $d_2 = \frac{1}{4}$, genauer

$$A_0(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + c_4 x^{\frac{1}{4}} + o(x^{\frac{1}{4}})$$

zu erwarten.

(Eingegangen am 15. Dezember 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 33—48 (1952).

Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von

S. D. Puppe in Heidelberg.

Einleitung.

Für das Isotopieproblem der Knotentheorie wurden bisher zwei Methoden mit Erfolg angewandt, um die Verschiedenheit von Knoten mit gleicher Knotengruppe, insbesondere von einander spiegelbildlichen Knoten, nachzuweisen. Die erste, auf GOERITZ [1][1]) zurückgehende Methode beruht auf den MINKOWSKISCHEN Einheiten der quadratischen Form eines Knotens, die zweite benutzt die von SEIFERT [5] eingeführten Verschlingungsinvarianten von Überlagerungen des Knotenaußenraumes. Es sind Beispiele bekannt, bei denen die Unterscheidung zweier Knoten durch die Verschlingungsinvarianten möglich ist, während ihre MINKOWSKISCHEN Einheiten übereinstimmen (SEIFERT [6] S. 92). Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zu zeigen, daß das Umgekehrte nicht möglich ist, sondern daß die MINKOWSKISCHEN Einheiten durch die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt sind und sich aus ihnen berechnen lassen.

Kapitel I.

Minkowskische Einheiten.

§ 1.

Zahlentheoretische Hilfsmittel.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Definitionen und Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. Die Beweise findet man in den entsprechenden Lehrbüchern (vgl. etwa LANDAU [2]). Sofern nichts Besonderes gesagt ist, sind die auftretenden Größen ganze Zahlen oder ganzzahlige Matrizen.

Ist p eine Primzahl $\neq 2$ und $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, so ist das LEGENDRESCHE Restsymbol definiert durch

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv x^2 \pmod{p} \text{ lösbar ist,} \\ -1, & \text{wenn das nicht der Fall ist.} \end{cases} \tag{1}$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Es gilt dann:

(2) $$\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{p}\right) = \left(\frac{n_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{n_2}{p}\right).$$

(3) Aus $n_1 \equiv n_2 \pmod{p}$ folgt $\left(\frac{n_1}{p}\right) = \left(\frac{n_2}{p}\right)$.

Ist $n > 0, A = (a_{\nu\mu})$ eine symmetrische quadratische Matrix und $x = (x_\nu)$ eine variable Spalte, so heißt

(4) $$G_n(A) = \sum_{x \bmod n} e^{\frac{2\pi i}{n} x' A x}$$

die Gausssche Summe von A (bzw. von der durch A bestimmten quadratischen Form $x' A x$) zum Modul n. Bei der Summation sollen die x_ν unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod n durchlaufen, also etwa die Zahlen von 0 bis $n-1$.

Sätze und Formeln über Gausssche Summen:

Geht B aus A durch unimodulare Transformation hervor, d. h. ist $S' A S = B$ mit $|S| = \pm 1$, so gilt

(5) $$G_n(A) = G_n(B).$$

(6) Ist $A \equiv B \pmod{n}$, so gilt $G_n(A) = G_n(B)$.

(7) Für $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ gilt $G_n(A) = G_n(A_1) \cdot G_n(A_2)$.

Für $t > t' \geqq 0$ ist

(8) $$G_{p^t}(p^{t'} a) = G_{p^{t-t'}}(a) \cdot p^{t'},$$

wo a als einreihige Matrix aufzufassen ist und p wieder eine Primzahl $\neq 2$ bedeutet.

Wenn $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so gilt weiter

(9) $$G_{p^t}(a) = \begin{cases} p^{\frac{t}{2}}, & t \equiv 0 \pmod 2 \\ p^{\frac{t-1}{2}} \cdot G_p(a), & t \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

(10) $$G_p(a) = \left(\frac{a}{p}\right) G_p(1),$$

(11) $$G_p(1) = \varrho(p) \cdot \sqrt{p} \text{ mit } \varrho(r) = \begin{cases} 1, & r \equiv 1 \pmod 4 \\ i, & r \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

§ 2.

Minkowskische Einheiten einer quadratischen Form.

Bei Minkowski [3] wird einer quadratischen Form für jede Primzahl p eine Zahl $C_p = \pm 1$ zugeordnet, und es wird gezeigt, daß diese Zahlen gegenüber rationalen Transformationen invariant sind. Für die Anwendung in der Knotentheorie scheidet C_2 ganz aus, und es genügt zu wissen, daß die anderen C_p gegenüber unimodularen Trans-

formationen invariant sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns von vornherein auf den Fall $p \neq 2$ und den Nachweis der letztgenannten Eigenschaft.

Sei A eine ganzzahlige symmetrische Matrix mit $|A| \neq 0$. Wir bezeichnen mit $m = m(A)$ die Reihenzahl von A und (für eine Primzahl $p \neq 2$) mit $\omega = \omega_p(A)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von $|A|$. t sei in folgendem immer eine gerade Zahl > 0, und unter $\varrho(r)$ ist die in (11) definierte Funktion zu verstehen. Es wird dann zunächst die Zahl

$$C_p^t(A) = \frac{1}{\varrho(p^\omega)} \cdot p^{-\frac{1}{2}(mt+\omega)} \cdot G_{p^t}(A) \tag{12}$$

eingeführt. Aus (5) entnimmt man, daß $C_p^t(A)$ bereits eine Invariante gegenüber unimodularen Transformationen von A ist: denn es ist $|A|$, damit $\omega_p(A)$ und offenbar auch $m(A)$ invariant. Ferner folgt für zwei Matrizen A, B mit gleicher Reihenzahl aus $A \equiv B \pmod{p^v}$ die gleiche Kongruenz für die Determinanten: $|A| \equiv |B| \pmod{p^v}$. Daraus ergibt sich $\omega(A) = \omega(B)$ für $v > \omega(A)$, und wenn auch $v \geqq t$ gilt, ist nach (6) $C_p^t(A) = C_p^t(B)$. $C_p^t(A)$ ist also zweitens invariant bei Ersetzung von A durch eine mod p^v kongruente Matrix, vorausgesetzt daß v genügend groß ist. Diese beiden Eigenschaften gestatten es, den allgemeinen Fall auf den Fall, daß A eine Diagonalmatrix ist, zurückzuführen. Dadurch wird die Abhängigkeit von dem Parameter t in natürlicher Weise beseitigt und ein einfaches Berechnungsverfahren für die C_p^t angegeben werden können. Es dient dazu folgender

Hilfssatz 1. *Für jedes $v > 0$ gibt es eine unimodulare Matrix S, so daß*

$$S' A S \equiv D \pmod{p^v}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Für $m(A) = 1$ ist nichts zu beweisen, sei also $m(A) > 1$. Ist $A = p^r \cdot \bar{A}$ und leistet S für $\bar{A}$ das Geforderte, so auch für A, es genügt also, den Nachweis für $A \not\equiv 0 \pmod{p}$ zu führen. Man kann annehmen, daß es in der Hauptdiagonale von A ein Element $a_{\nu\nu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ gibt; denn andernfalls betrachte man irgendein nicht durch p teilbares Element $a_{\nu\mu}$. Addiert man die μ-te Spalte zur ν-ten und dann die μ-te Zeile zur ν-ten (das ist eine unimodulare Transformation), so wird $a_{\nu\nu}$ durch $a_{\nu\nu} + 2a_{\nu\mu} + a_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ersetzt[2]). Demnach kann a_{11}, falls es nicht schon selbst prim zu p ist, immer durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in ein nicht durch p teilbares Element übergeführt werden. Dies wird als geschehen angenommen. Addiert man dann die mit x multiplizierte erste Spalte zur k-ten und anschließend die mit x multiplizierte erste Zeile zur k-ten ($k > 1$), so tritt $a_{11} \cdot x + a_{1k}$ an die Stelle von a_{1k} und a_{k1} $(= a_{1k})$. Wird für x

[2]) An dieser Stelle geht die Voraussetzung $p \neq 2$ entscheidend ein.

eine Lösung von $a_{11} \cdot x + a_{1k} \equiv 0 \pmod{p^r}$ gewählt und der Prozeß für alle $k > 1$ durchgeführt, so erhält man

$$\overline{S}' A \overline{S} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \pmod{p^r} \text{ mit unimodularem } \overline{S}.$$

Durch Induktionsschluß folgt die Behauptung.

Für eine Diagonalmatrix kann C_p^t mit Hilfe der Formeln (7)—(11) explizit berechnet werden. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 2. *Ist* $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu})$, $c_\nu \not\equiv 0 \pmod{p}$ *und* $t > \operatorname{Max}_\nu \omega_\nu$, *so ist*

$$C_p^t(D) = \varrho \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{c_\nu}{p}\right) \tag{13}$$

mit

$$\varrho = \frac{\varrho(p)^\lambda}{\varrho(p^\omega)} = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right) \tag{14}$$

$\omega = \omega(D) = \sum_\nu \omega_\nu$, $\lambda =$ *Anzahl der ungeraden* ω_ν ($\delta_{\nu\mu}$ *ist hier das* Kronecker-*Symbol, und* $[r]$ *bedeutet die größte ganze Zahl* $\leqq r$).

Beweis.

$$G_{p^t}(D) = \prod_\nu G_{p^t}(c_\nu p^{\omega_\nu}) = \prod_\nu G_{p^{t-\omega_\nu}}(c_\nu) p^{\omega_\nu} \qquad \text{nach (7) u. (8)}$$

$$= \prod_{\omega_\nu \equiv 0 \pmod 2} p^{\frac{1}{2}(t+\omega_\nu)} \cdot \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2} G_p(c_\nu)\, p^{\frac{1}{2}(t+\omega_\nu-1)} \qquad \text{nach (9)}$$

$$= p^{\frac{1}{2}(mt+\omega)} \cdot \varrho(p)^\lambda \cdot \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{c_\nu}{p}\right). \qquad \text{nach (10) u. (11)}$$

Nach Definition von C_p^t ist das schon die Behauptung, wobei für ϱ der erste der beiden angegebenen Ausdrücke steht; die Übereinstimmung mit dem zweiten bestätigt man durch Fallunterscheidung.

Offenbar ist $C_p^t(D)$ unabhängig von t für alle $t > \operatorname{Max}_\nu \omega_\nu$. Zusammen mit dem Hilfssatz 1 folgt daraus allgemein

Hilfssatz 3. *Für beliebiges* A *ist* $C_p^t(A)$ *unabhängig von* t *für alle* $t > \omega(A)$.

Beweis. Ist $t_i > \omega(A)$, $i = 1, 2$, so gibt es nach Hilfssatz 1 eine Diagonalmatrix D, so daß $S' A S \equiv D \pmod{p^{t_1+t_2}}$ gilt mit unimodularem S. Nach den Bemerkungen im Anschluß an (12) ist $C_p^{t_i}(A) = C_p^{t_i}(D)$; $C_p^{t_1}(D)$ und $C_p^{t_2}(D)$ stimmen aber wie eben gezeigt überein (da $t_i > \omega(A) = \omega(D) \geqq \operatorname{Max}_\nu \omega_\nu$ ist).

Dieses Ergebnis berechtigt zu der endgültigen Definition:

$$C_p(A) = C_p^t(A) \text{ mit } t > \omega(A).$$

$C_p(A)$ wird die Minkowskische Einheit von A zur Primzahl p genannt. (Daß $C_p(A)$ tatsächlich eine Einheit, d. h. $= \pm 1$ ist, folgt aus Hilfssatz 2 zusammen mit Hilfssatz 1.)

Es ist klar, wie sich die Eigenschaften von $C_p'(A)$ auf $C_p(A)$ übertragen. Wir fassen nochmals zusammen:

Satz 1. *$C_p(A)$ ist invariant gegenüber unimodularen Transformationen von A und für hinreichend großes v gegenüber Ersetzung von A durch eine* mod p^v *kongruente Matrix. Dabei genügt es, daß $v \geqq t_0$ gilt, wo t_0 die kleinste gerade Zahl $> \omega(A)$ ist.*

Satz 2. *Man kann $C_p(A)$ berechnen, indem man mit $v \geqq t_0$ nach Hilfssatz 1 ein $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu}) \equiv S' A S \pmod{p^v}$ bestimmt, und man erhält*

$$C_p(A) = C_p(D) = \varrho \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{c_\nu}{p}\right)$$

(vgl. (13) *und* (14)), *speziell*

$$C_p(A) = 1 \quad \text{für} \quad |A| \not\equiv 0 \pmod p.$$

Von entscheidender Bedeutung in der Knotentheorie ist ferner

Satz 3. *Ist* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $\omega_p(A_i) = \omega_i$, *so gilt*

$$C_p(A) = (-1)^{\frac{1}{4}(p^{\omega_1}-1)(p^{\omega_2}-1)} C_p(A_1) \cdot C_p(A_2),$$

speziell $C_p(A) = C_p(A_1)$ für $|A_2| \not\equiv 0 \pmod p$.

Beweis. Mit $m(A_i) = m_i$ und genügend großem t gilt nach der Definition von C_p

$$C_p(A) = \frac{1}{\varrho(p^\omega)} \cdot p^{-\frac{1}{2}((m_1+m_2)t+(\omega_1+\omega_2))} \cdot G_p{}^t(A_1) \cdot G_p{}^t(A_2) \qquad \text{(vgl. (7))}$$

$$= \frac{\varrho(p^{\omega_1}) \cdot \varrho(p^{\omega_2})}{\varrho(p^{\omega_1+\omega_2})} \cdot C_p(A_1) \cdot C_p(A_2).$$

Durch Fallunterscheidung erkennt man die Übereinstimmung dieses Koeffizienten mit dem in der Behauptung angegebenen. Die spezielle Folgerung ergibt sich sofort, wenn man $C_p(A_2) = 1$ und $\omega_2 = 0$ beachtet.

Wir zeigen zum Schluß, daß diese Definition von C_p mit der bei Goeritz [1] und Reidemeister [4] (S. 28) übereinstimmt, die durch folgende Vorschrift gegeben ist:

Man transformiere A rational in $B \equiv \bar{D} \pmod{p^2}$ mit

$$\bar{D} = (\bar{d}_\nu \delta_{\nu\mu}), \quad \bar{d}_\nu = \begin{cases} \bar{c}_\nu, & \nu \leqq m - \lambda \\ \bar{c}_\nu p, & \nu > m - \lambda, \end{cases} \qquad \bar{c}_\nu \not\equiv 0 \pmod p \tag{16}$$

und setze

$$C_p(A) = C_p(\bar{D}) = \left(\frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor}}{p}\right) \cdot \prod_{\nu=m-\lambda+1}^{m} \left(\frac{\bar{c}_\nu}{p}\right). \tag{17}$$

Für den Beweis, daß diese Vorschrift immer ausführbar ist und zu keinen Widersprüchen führt, wird auf Minkowski [3] verwiesen.

Wir erhalten hier nach Satz 2

$$C_p(A) = C_p(D) = \left(\frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{\lambda}{2} \right\rfloor}}{p}\right) \cdot \prod_{\nu=m-\lambda+1}^{m} \left(\frac{c_\nu}{p}\right), \tag{18}$$

wenn $S' A S \equiv D \pmod{p^{\omega+2}}$, $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu})$ ist und wenn man die offenbar erlaubte Annahme macht, daß gerade die letzten $\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2$ sind. Setzt man

$$R = (p^{-\left[\frac{\omega_\nu}{2}\right]} \delta_{\nu\mu}),$$

so ergibt sich aus A durch rationale Transformation

$$B = R' S' A S R.$$

Es ist $B \equiv \overline{D} \pmod{p^2}$, wo $\overline{D}$ die in (16) geforderte Gestalt hat. Die dort angegebene Vorschrift (17) liefert mit diesem $\overline{D}$ gerade dasselbe wie (18).

§ 3.

Die quadratische Form eines Knotens.

Unter einer Knotenlinie wird hier ein geschlossenes, doppelpunktfreies, orientiertes Polygon in dem (durch einen unendlich fernen Punkt) zur 3-Sphäre S^3 geschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 verstanden. Dabei sei in R^3 eine bestimmte Orientierung festgelegt. Zwei Knotenlinien heißen isotop, wenn sie durch kombinatorische Deformationen (Reidemeister [4]) ineinander übergeführt werden können. Ein Knoten ist eine Isotopieklasse von Knotenlinien.

Ist $\mathfrak{k}$ eine Knotenlinie, so betrachten wir Projektionen von $\mathfrak{k}$ auf Ebenen E von R^3, die so orientiert werden, daß sie zusammen mit der Projektionsrichtung einen fest vorgegebenen Schraubsinn im R^3 bestimmen. Eine solche Projektion heißt regulär (Reidemeister [4]), wenn die Doppelpunkte des entstehenden Polygons $\pi(\mathfrak{k})$ höchstens zweifach sind und inneren Punkten der Kanten von $\mathfrak{k}$ entsprechen; ihre Anzahl ist dann sicher endlich. Es gibt zu jeder Knotenlinie reguläre Projektionen. $\pi(\mathfrak{k})$ heißt normiert, wenn bei jedem Doppelpunkt D der überkreuzende Bogen gekennzeichnet ist.

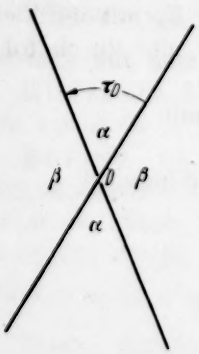


Fig. 1.

Einer regulären normierten Knotenprojektion wird nach Goeritz [1] folgendermaßen eine symmetrische Matrix und damit eine quadratische Form zugeordnet:

Die Gebiete, in die E durch $\pi(\mathfrak{k})$ zerlegt wird, lassen sich auf genau eine Weise so in zwei Klassen α und β einteilen, daß zwei Gebiete derselben Klasse höchstens Doppelpunkte von $\pi(\mathfrak{k})$ als gemeinsame Randpunkte haben. Es sei α die Klasse, zu der das Außengebiet G_0 von $\pi(\mathfrak{k})$ gehört; die übrigen α-Gebiete werden mit $G_1, \ldots, G_h$ bezeichnet. In einem Doppelpunkt D von $\pi(\mathfrak{k})$ stoßen vier Gebiete aneinander (Fig. 1), von denen je zwei gegenüberliegende zur gleichen Klasse gehören (sie sind nicht notwendig

voneinander verschieden). Ist τ_D die Drehung um D, die die überkreuzende Strecke so in die unterkreuzende überführt, daß sie dabei in der Umgebung von D nur die α-Gebiete überstreicht, so wird definiert:

$$\eta(D) = \begin{cases} 0, \text{ wenn in } D \text{ ein } \alpha\text{-Gebiet an sich anstößt,} \\ +1 \text{ oder } -1 \text{ je nachdem, ob } \tau_D \text{ in } E \text{ positiv oder negativ} \\ \text{ist, wenn die beiden } \alpha\text{-Gebiete verschieden sind.} \end{cases}$$

Mit $q_{ii} = \sum \eta(D)$, summiert über alle mit G_i inzidenten D,
$q_{ik} = \sum -\eta(D)$, summiert über alle zugleich mit G_i und G_k inzidenten $D\,(i \neq k)$,
ist $Q = (q_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, h$ die gesuchte Matrix.

Es läßt sich zeigen (Goeritz [1]), daß man die Veränderungen von Q, die der Übergang zu einer anderen Projektion von $\mathfrak{k}$ oder zu einer isotopen Knotenlinie bewirkt, durch geeignete Verknüpfung von Operationen der folgenden Art erhalten kann:

1. Q geht über in $\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$ mit $|Q_1| = \pm 1$,
2. Q geht über in $\overline{Q} = S' Q S$ mit unimodularem S.

Ferner ist immer

$$|Q| \neq 0\ ^{3}).$$

Nach § 2 ist also $C_p(Q)$ definiert, und aus den Sätzen 1 und 3 ergibt sich, daß bei den obigen Operationen

$$C_p(Q) = C_p(\overline{Q})$$

gilt. $C_p(Q)$ ist daher eine Knoteninvariante. Wir nennen sie Minkowskische Einheit oder auch Minkowskische Invariante des Knotens.

Kapitel II.

Verschlingungsinvarianten.

§ 1.

Abstrakte Gruppen mit Verschlingung.

Im Anschluß an Seifert [5] wird der Begriff einer Gruppe mit Verschlingung eingeführt. Die Anwendung dieses Begriffs auf die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (§ 2) liefert die Verschlingungsinvarianten.

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Abelsche Gruppe. Wir nennen ein Erzeugendensystem $b = (b_i)$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der von den b_i erzeugten zyklischen Untergruppen ist und wenn für die Ordnungen c_i von b_i gilt $c_{i+1} \equiv 0 \pmod{c_i}$. Die Zahlen c_i sind dann bekanntlich durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. Sie mögen (im Hinblick auf die topologische Anwendung) als Torsionskoeffizienten bezeichnet werden.

---

[3]) Tatsächlich ist $|Q|$ sogar immer ungerade.

Definition. $\mathfrak{G}$ heißt Gruppe mit Verschlingung — oder kürzer V-Gruppe —, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Abelsche Gruppe ist und wenn für $a, b \in \mathfrak{G}$ eine Funktion $V(a, b)$ definiert ist, deren Werte Klassen rationaler Zahlen mod 1 sind und die folgenden Axiomen genügt:

V_1: $V(a, b) = V(b, a)$

V_2: $V(a + b, c) = V(a, c) + V(b, c)$

V_3: Es gibt zwei Basen (b_i), $(\bar{b}_i)$ von $\mathfrak{G}$, genannt duale Basen, so daß

$$V(b_i, \bar{b}_k) = \widetilde{\frac{1}{c_i}\delta_{ik}}$$

ist, wo c_i die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{G}$ sind[4]). Dabei bedeutet $\tilde{r}$ für rationales r die Klasse mod 1.

Einige einfache Folgerungen sind:

$$V(c, a + b) = V(c, a) + V(c, b), \tag{1}$$

$$V(0, a) = V(a, 0) = \tilde{0}. \tag{2}$$

Sind α und β die Ordnungen von a bzw. b und bezeichnet (α, β) ihren größten gemeinsamen Teiler, so gilt

$$(\alpha, \beta) \cdot V(a, b) = \tilde{0}. \tag{3}$$

Beweis. (1) und (2) ergeben sich unmittelbar aus V_1 und V_2. Bei (3) ist nach (2) $\alpha \cdot V(a, b) = \beta \cdot V(a, b) = \tilde{0}$, und da (α, β) sich als ganzzahlige Linearkombination von α und β darstellen läßt, folgt die Behauptung.

Das Ergebnis von Seifert [5] ist die folgende Charakterisierung der möglichen Verschlingungen (V-Gruppen-Strukturen) einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$. Die hier nicht ausgeführten Beweise findet man in dieser Arbeit.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Verschlingung. Wir zerlegen $\mathfrak{G}$ in eine direkte Summe von Primzahlpotenzgruppen (d. h. von Gruppen, deren Elemente nur Potenzen einer festen Primzahl als Ordnung haben), was bekanntlich — abgesehen von der Reihenfolge — auf genau eine Weise möglich ist. Sei p eine Primzahl $\neq 2$ und $\mathfrak{G}_p$ die zugehörige Gruppe dieser Zerlegung. Ihre Torsionskoeffizienten haben die Form p^{e_i}, wobei etwa

$$0 < e_1 = \cdots = e_{r_1} < e_{r_1+1} = \cdots = e_{r_2} < e_{r_2+1} = \cdots < \cdots = e_{r_r} \tag{4}$$

[4]) V_3 ist äquivalent mit der vom algebraischen Standpunkt einfacheren Forderung (vgl. [8], [9])

V_3': Zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein b, so daß $V(a, b) \neq \tilde{0}$.

Hier wurde trotzdem V_3 vorgezogen, um die Darstellung möglichst eng an Seifert [5] anschließen zu können und weil bei der Torsionsgruppe einer Mannigfaltigkeit der Poincaré-Veblensche Dualitätssatz direkt auf V_3 führt (vgl. II § 2). Übrigens ist V_3 bzw. V_3' nur für den Beweis von (6) erforderlich.

gilt. Ist (b_i) eine Basis von $\mathfrak{G}_p$ und $(V(b_i, b_k)) = \breve{M}$, M eine rationale Matrix, so unterteilen wir M den Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_r$ entsprechend in Teilmatrizen und erhalten nach (3)

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} p^{-e_{\nu_1}} & M_{12} p^{-e_{\nu_1}} & \ldots & M_{1r} p^{-e_{\nu_1}} \\ M_{21} p^{-e_{\nu_1}} & M_{22} p^{-e_{\nu_2}} & \ldots & M_{2r} p^{-e_{\nu_2}} \\ \vdots & & & \\ M_{r1} p^{-e_{\nu_1}} & M_{r2} p^{-e_{\nu_2}} & \ldots & M_{rr} p^{-e_{\nu_r}} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

wo die M ganzzahlig sind. Wegen V_1 ist $\breve{M}$ symmetrisch, man kann daher dasselbe von M annehmen.

Aus V_3 läßt sich

$$|M_{ii}| \not\equiv 0 \pmod{p} \tag{6}$$

folgern, und eine Untersuchung der möglichen Basen von $\mathfrak{G}_p$ lehrt

Hilfssatz 4. *Der quadratische Restcharakter von $|M_{ii}|$ bezüglich p, also die Zahl*

$$\left(\frac{M_{ii}}{p}\right)$$

ist unabhängig von der speziellen Basis (b_i) und unabhängig von der Wahl von M allein durch die Struktur der V-Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Dementsprechend werden einer V-Gruppe $\mathfrak{G}$ Verschlingungsinvarianten $\mathfrak{v}_{p^e}$ zugeordnet durch die

Definition.

$$\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p^e \text{ nicht unter den Torsionskoeffizienten von } \mathfrak{G}_p \text{ vorkommt,} \\ \left(\frac{M_{ii}}{p}\right), & \text{wenn } e = e_{\nu_i} \text{ (wo } e_{\nu_i} \text{ und } M_{ii} \text{ nach (5) bestimmt wird).} \end{cases}$$

Durch diese Größen ist die Struktur von $\mathfrak{G}$ tatsächlich in gewissem Sinn bestimmt; es gilt nämlich

Satz 4. *Ist $\mathfrak{G}$ eine V-Gruppe, die keine Elemente der Ordnung 2 enthält, so ist ihre Struktur durch die gewöhnliche Gruppenstruktur und durch die Verschlingungsinvarianten eindeutig bestimmt.*

Wir werden von diesem Satz keinen Gebrauch machen und gehen deshalb nicht auf seinen Beweis ein. Es sei jedoch bemerkt, daß der folgende Hilfssatz, den wir hier mit Rücksicht auf eine Anwendung in Kapitel III ableiten, einen wichtigen Schritt zu diesem Beweis darstellt (vgl. [5] S. 821 f.).

Hilfssatz 5. *Ist $b = (b_i)$ irgendeine Basis von $\mathfrak{G}_p$, so kann man eine Basis $\bar{b} = (\bar{b}_i)$ finden, die mit b durch eine unimodulare Matrix Γ zusammenhängt, $\bar{b} = \Gamma b$, und für die*

$$V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \breve{D} \text{ mit } D = \text{Diagonalmatrix, also } D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik}),$$

gilt.

Beweis. b wird schrittweise in $\bar{b}$ übergeführt durch folgende Operationen:

1. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + b_\mu$ ersetzt mit $\mu < \nu$.
2. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + p^{e_\mu - e_\nu} b_\mu$ ersetzt mit $\mu > \nu$.
3. b_i bleibt für $i \neq \nu, \mu$, b_ν und b_μ werden vertauscht mit solchem ν, μ, daß $e_\nu = e_\mu$, daß also ν und μ in demselben Intervall (ν_i, ν_{i+1}) liegen.

Jede dieser Operationen führt b wieder in eine Basis über, und die zugehörigen Matrizen Γ sind unimodular. Ist $(V(b_i, b_k)) = \tilde{M}$, so erhält man aus M entsprechende Matrizen für die neuen Basen, indem man

bei 1. nacheinander die μ-te Spalte zur ν-ten und die μ-te Zeile zur ν-ten addiert,

bei 2. die mit $p^{e_\mu - e_\nu}$ multiplizierte μ-te Spalte und Zeile (analog 1.) zur ν-ten addiert,

bei 3. die ν-te und μ-te Zeile und Spalte miteinander vertauscht.

Sei nun M gemäß (5) zerlegt (und symmetrisch). Gibt es in $M_{11} = (m_{ik})$ ein $m_{ii} \not\equiv 0 \pmod p$, so kann man es durch die Operation 3. an die Stelle von m_{11} bringen; andernfalls gibt es wegen (6) ein $m_{\mu 1} = m_{1\mu} \not\equiv 0 \pmod p$, und die Anwendung der Operation 2. mit $\nu = 1$ bringt $m_{11} + 2m_{1\mu} + m_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod p$ an die Stelle von m_{11}. Man kann also $m_{11} \not\equiv 0 \pmod p$ annehmen. x-maliges Anwenden von 1. mit $\mu = 1$ sukzessiv für alle $\nu > 1$ führt bei geeigneter Wahl von x die Matrix M in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} m_{11} p^{-e_1} & G \\ G & M^* \end{pmatrix}$$

über, wo G ganzzahlig ist und M^* wieder die Eigenschaften von M besitzt. Durch Induktionsschluß folgt, daß M mit Hilfe der Operationen 1. bis 3. in ein $\bar{M} \equiv D \pmod 1$ mit $D =$ Diagonalmatrix überführbar ist. Die Basis $\bar{b}$, zu der man auf diese Weise gelangt, hat offenbar die geforderten Eigenschaften.

§ 2

Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ als Gruppe mit Verschlingung.

Sei $\mathfrak{M}^3$ eine dreidimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Um in ihrer Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ der Dimension 1 eine Verschlingung im Sinne von § 1 dieses Kapitels einzuführen, sei daran erinnert, daß zwei punktfremden divisions-nullhomologen singulären 1-Ketten A^1, B^1 in $\mathfrak{M}^3$ eine rationale Zahl $V(A^1, B^1)$ als Verschlingungszahl zugeordnet ist (Seifert-Threlfall [7] S. 277). Für diese Zahlen gilt:

1. $V(A^1, B^1) = V(B^1, A^1)$.
2. $V(A^1 + B^1, C^1) = V(A^1, C^1) + V(B^1, C^1)$.
3. Es gibt in $\mathfrak{M}^1$ zwei Torsionsbasen (B_i^1) und $(\overline{B}_i^1)$, so daß $V(B_i^1, \overline{B}_k^1) = \frac{1}{c_i}\delta_{ik}$ gilt, mit c_i = Ordnung von B_i^1 und $\overline{B}_i^1$. (Diese Eigenschaft ist ein Teil des Poincaré-Veblenschen Dualitätssatzes, vgl. [7] S. 253).
4. Aus $A^1 \sim {}'A^1$ und $B^1 \sim {}'B^1$ folgt $V(A^1, B^1) \equiv V({}'A^1, {}'B^1) (\mathrm{mod}\ 1)$.

Danach ist klar, daß die Festsetzung

$$V(a, b) = \widetilde{V(A^1, B^1)},$$

wo $a, b \in \mathfrak{T}^1$ und A^1, B^1 punktfremde Repräsentanten von a bzw. b sind, die Gruppe $\mathfrak{T}^1$ zu einer V-Gruppe macht; die Eigenschaft 4. sichert die Eindeutigkeit der Definition, und 1. bis 3. liefert die Axiome V_1—V_3.

Die V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ ist allein durch die topologische Struktur und die Orientierung von $\mathfrak{M}^3$ definiert; also sind die Verschlingungsinvarianten $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}^1)$ zugleich Invarianten der orientierten Mannigfaltigkeit. Insbesondere gilt das für den Fall, daß $\mathfrak{M}^3$ eine Überlagerung des Außenraumes einer Knotenlinie $\mathfrak{K}$ in einer 3-Sphäre S^3 ist. Da die kombinatorischen Knotendeformationen durch orientierungserhaltende topologische Abbildungen der S^3 auf sich bewirkt werden können, sind die $\mathfrak{v}_{p^e}$ auch Invarianten des Knotens.

Nach Seifert [6] können die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen berechnet werden, und zwar erhält man ([6] S. 100) für die zweifache Überlagerung $\mathfrak{M}_2^3$ den

Satz 5. *Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ von $\mathfrak{M}_2^3$ besitzt ein Erzeugendensystem $q = (q_i)$ mit den definierenden Relationen $Qq = 0$ und der Verschlingung $(V(q_i, q_k)) = \varepsilon \widetilde{Q^{-1}}$, wobei Q die Matrix einer quadratischen Form des Knotens ist. ε ist $+1$ oder -1, je nachdem wie sich die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ zu dem bei der Definition von Q zugrundegelegten Schraubsinn* (I § 3) *verhält.*

Dieses Ergebnis weist deutlich auf einen engen Zusammenhang hin zwischen den Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{M}_2^3$ und den Minkowskischen Einheiten, eine Vermutung, die in dem nun folgenden Kapitel III bestätigt wird.

Kapitel III.

Bestimmung der Minkowskischen Einheiten aus den Verschlingungsinvarianten der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes.

Anknüpfend an den Schluß des vorigen Kapitels, wählen wir die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ so, daß in Satz 5 $\varepsilon = +1$ wird. Dann liegt folgendes Problem vor:

Gegeben ist eine V-Gruppe $\mathfrak{T}'$ durch ($|Q| \neq 0$)

(1) $$q = (q_i),\ i = 1, \ldots, h, \quad Qq = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \breve{Q}^{-1}.$$

Es sollen die $C_p(Q)$ aus den $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}')$ berechnet werden.

Erster Schritt. Vereinfachung durch Einführung eines neuen Erzeugendensystems.

Sei

$$\mathfrak{T}' = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{T}_{p_j}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{T}'$ in Primzahlpotenzgruppen. Wir bezeichnen mit P diejenige Matrix, die in der Hauptdiagonale der Reihe nach die Torsionskoeffizienten der $\mathfrak{T}_{p_j}$ und sonst lauter Nullen enthält. Mit geeigneten Einheitsmatrizen E kann man erreichen, daß

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_1 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

gleiche Reihenzahl m haben. Die von 1 verschiedenen Elementarteiler von P und Q sind die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}'$, also haben Q_1 und P_1 gleiche Elementarteiler, und es gibt unimodulare Matrizen R, S, so daß

(2) $$Q_1 = R P_1 S$$

ist.

Kommt die Primzahl p, für die C_p berechnet werden soll, unter den p_j nicht vor, so ist $|Q| = \pm |P| \not\equiv 0 \pmod{p}$, also nach Satz 2

$$C_p(Q) = 1.$$

Wir schließen diesen Fall von jetzt ab aus und können $p = p_1$ annehmen.

Ergänzt man q formal zu einer m-zeiligen Spalte q', so ist dieselbe V-Gruppe $\mathfrak{T}'$ gegeben durch

(3) $$q' = (q_i),\ i = 1, \ldots, m, \quad Q_1 q' = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \breve{Q}_1^{-1}$$

und, wenn $b' = Sq'$ gesetzt wird (S nach (2) bestimmt), auch durch

(4) $$b' = (b_i), \quad P_1 b' = 0, \quad (V(b_i, b_k)) = \breve{S}\,\breve{Q}_1^{-1} S'.$$

Nach Definition von P_1 bilden die ersten b_i — die entsprechende Teilspalte von b' sei $b = (b_i)$, $i = 1, \ldots, n_p$ — eine Basis von $\mathfrak{T}_{p_1} = \mathfrak{T}_p$. Nach Hilfssatz 5 gibt es ein unimodulares Γ, so daß für die Basis $\bar{b} = \Gamma b$ gilt

(5) $$(V(\bar{b}_i, \bar{b}_k)) = \breve{D}, \quad D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n_p,$$

wo p^{e_i} die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}_p$ sind. Hieraus wird $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}')$ bestimmt. Es ist nach Definition

(6) $$\mathfrak{v}_{p^{e_{\nu_i}}} = \prod_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i} \left(\frac{d_j}{p}\right) \text{ und } \mathfrak{v}_{p^e} = 1 \text{ für } e \neq e_{\nu_i}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

wenn wie in II (4) $0 < e_1 = \cdots = e_{\nu_1} < e_{\nu_1+1} \cdots < \cdots e_{\nu_r}$ und $\nu_0 = 0$ ist.

Andererseits wird

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

so gebildet, daß Γ_1 m-reihig wird, und $\Gamma_1 b' = \bar{b}' = (\bar{b}_i)$ gesetzt. Dann ist

$$V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \bar{M}_1 \tag{7}$$

mit

$$M_1 = \Gamma_1 S Q_1^{-1} S' \Gamma_1', \quad \text{d. h.} \quad M_1^{-1} = \Gamma_1'^{-1} S'^{-1} Q_1 S^{-1} \Gamma_1^{-1}, \tag{8}$$

und nach den Sätzen 3 und 1 folgt

$$C_p(Q) = C_p(Q_1) = C_p(M_1^{-1}). \tag{9}$$

Damit ist das Problem auf die Berechnung von $C_p(M_1^{-1})$ reduziert.

Zweiter Schritt. Untersuchung von M_1^{-1}.

Unterteilt man M_1 zwischen der n_p-ten und n_p+1-ten Zeile und Spalte, so ergibt sich

$$M_1 = \begin{pmatrix} M & G \\ G & N \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei wegen (7) und II (3) G ganzzahlig ist und die Elemente von N die Primzahl p nicht im Nenner enthalten. Wegen (5) ist

$$M \equiv D \pmod 1. \tag{11}$$

Die Determinantenteiler von M_1^{-1} stimmen nach (8) mit denen von Q_1 und nach (2) auch mit denen von P_1 überein. Speziell ist

$$\Delta = |M_1^{-1}| = \pm |P_1| = p^{\Sigma e_i} d, \quad d \not\equiv 0 \pmod p, \tag{12}$$

$$\Delta_{m-n_p} \not\equiv 0 \pmod p, \tag{13}$$

wenn mit Δ_k der größte gemeinsame Teiler aller k-reihigen Unterdeterminanten bezeichnet wird.

Wir setzen $M_1^{-1} = A = (a_{\nu\mu})$, $M_1 = (m_{\nu\mu})$, und es sei $M_{\nu\mu}$ die Matrix, die aus M_1 durch Streichen der ν-ten Zeile und μ-ten Spalte hervorgeht. Dann ist bekanntlich

$$a_{\nu\mu} = \pm |M_{\nu\mu}| \Delta.$$

Hieraus ergibt sich

$$a_{\nu\mu} \equiv 0 \begin{cases} \pmod{p^{e_\nu}} & \text{für} \quad \nu \leqq n_p, \\ \pmod{p^{e_\mu}} & \text{für} \quad \mu \leqq n_p, \\ \pmod{p^{e_\nu + e_\mu}} & \text{für} \quad \nu, \mu \leqq n_p, \ \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{14}$$

In der Tat enthält $M_{\nu\mu}$ in den Nennern seiner Elemente als Potenzen von p nur die p^{e_i} je einmal, und zwar für $\nu \leqq n_p$ oder $\mu \leqq n_p$ nur die p^{e_i} mit $i \neq \nu$ bzw. $i \neq \mu$ und für $\nu, \mu \leqq n_p$ sogar nur die mit $i \neq \nu$ und $i \neq \mu$. Da Δ nach (12) durch $p^{\Sigma e_i}$ teilbar ist, folgt die Behauptung.

Streicht man in A die n_p ersten Zeilen und Spalten, so gilt für die entstehende Matrix A_{n_p}

$$|A_{n_p}| \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{15}$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so wären wegen (14) alle $(m-n_p)$-reihigen Unterdeterminanten von A durch p teilbar im Widerspruch zu (13).

Wegen $M_1 A = E$ ist $\sum_\mu m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} = 1$. Für $\nu \leqq n_p$, $\nu \neq \mu$ ist $m_{\nu\mu}$ nach (10) und (11) ganz und nach (14) $a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p^{e_\nu}}$; also ist

$$1 = \sum_\mu m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} \equiv m_{\nu\nu} a_{\nu\nu} \pmod{p}.$$

Nach (11) und (5) ist $m_{\nu\nu} \equiv d_\nu p^{-e_\nu} \pmod{1}$, und es folgt

$$d_\nu a_{\nu\nu} p^{-e_\nu} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{für} \quad \nu \leqq n_p. \tag{16}$$

Dritter Schritt. Bestimmung von $C_p(A)$.

Hilfssatz 6. *Ist A irgendeine ganzzahlige symmetrische Matrix mit den Eigenschaften* (14), (15) *und* (16) *und $v > 0$, so gibt es ein unimodulares S, so daß*

$$S' A S \equiv \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \pmod{p^v}, \quad C = (c_i p^{e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n_p,$$

$$d_\nu c_\nu \equiv 1 \pmod{p} \quad \textit{und} \quad |T| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Beweis. Es genügt offenbar, den Beweis für genügend große v zu führen. Wir nehmen $v > \omega(A) = \Sigma e_i$ an. Die Konstruktion geschieht dann nach dem üblichen Ausräumverfahren. Wir wählen x so, daß $a_{11} x + a_{1\mu} \equiv 0 \pmod{p^v}$ wird. Das ist möglich, da a_{11} und $a_{1\mu}$ durch p^{e_1} teilbar sind und $a_{11} p^{-e_1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Addiert man die mit x multiplizierte erste Spalte zur μ-ten, so wird $a_{\nu\mu}$ durch $a_{\nu 1} x + a_{\nu\mu}$ ersetzt. Dabei bleiben die Eigenschaften (14), (15), und (16) erhalten. Wir bestätigen das im Einzelnen:

(14) ist für $\mu > n_p$ klar und folgt für $\mu \leqq n_p$ daraus, daß dann $x \equiv 0 \pmod{p^{e_\mu}}$ ist.

(15): A_{n_p} ändert sich bei $\mu \leqq n_p$ gar nicht und wird sonst durch eine $(\mathrm{mod}\, p)$ kongruente Matrix ersetzt.

(16): Es ist nur etwas zu beweisen, wenn $\mu \leqq n_p$ ist; dann wird $a_{\mu\mu}$ durch $a_{\mu 1} x + a_{\mu\mu}$ ersetzt, und es gilt

$$d_\mu (a_{\mu 1} x + a_{\mu\mu}) p^{-e_\mu} \equiv d_\mu a_{\mu\mu} p^{-e_\mu} \pmod{p^{e_1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Addiert man nun die mit x multiplizierte erste Zeile zur μ-ten, so gilt das gleiche, und man hat im ganzen eine unimodulare Transformation ausgeführt. Geschieht das sukzessiv für alle $\mu > 1$, so erhält man

$$S' A S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \pmod{p^v},$$

wobei A' wieder den Voraussetzungen genügt. Durch Induktion ergibt sich die Behauptung.

Aus den in I § 2 hergeleiteten Eigenschaften von C_p (Satz 1—3) folgt

$$C_p(A) = C_p\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = C_p(C) = \varrho \cdot \prod_{e_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \left(\frac{c_\nu}{p}\right)$$

und damit

$$C_p(A) = \varrho \cdot \prod_{e_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \left(\frac{d_\nu}{p}\right), \tag{17}$$

denn wegen $d_\nu c_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$ ist $\left(\frac{c_\nu}{p}\right) = \left(\frac{d_\nu}{p}\right)$ (vgl. I (2), (3)).

Kehren wir wieder speziell zu $A = M_1^{-1}$ zurück, so lehrt der Vergleich von (17) mit (6) und (9)

$$C_p(Q) = \varrho \cdot \prod_{e \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}'). \tag{18}$$

Diese Formel gilt offenbar auch für den oben ausgeschlossenen Fall, daß eine Gruppe $\mathfrak{T}_p$ in der Zerlegung von $\mathfrak{T}'$ gar nicht vorkommt ($\varrho = 1$ wegen $\lambda = 0$ vgl. I (14)), und wir erhalten als Ergebnis

Satz 6. *Die Minkowskischen Einheiten eines Knotens sind durch die Torsionskoeffizienten und die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt, und zwar gilt bei geeigneter Festsetzung der Orientierungen* ($\varepsilon = +1$ in Satz 5)

$$C_p = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right)_{e \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \prod \mathfrak{v}_{p^e};$$

dabei ist λ die Anzahl der Torsionskoeffizienten, die die Primzahl p in ungerader Potenz enthalten.

Literaturverzeichnis.

Goeritz, L.

[1] Knoten und quadratische Formen. Math. Zeitschr. Bd. 36 (1933), S. 647.

Landau, E.

[2] Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 1. Leipzig: Hirzel 1927.

Minkowski, H.

[3] Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abh. Bd. 1, S. 219. Leipzig: Teubner 1911.

Reidemeister, K.

[4] Knotentheorie. Ergebnisse der Math. I 1. Berlin: Springer 1932.

SEIFERT, H.
[5] Verschlingungsinvarianten. Sitz.-Ber. der preuß. Akad. d. Wiss. 1933, S. 811.
SEIFERT, H.
[6] Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Hamb. Math. Abh. Bd. 11 (1936), S. 84.
SEIFERT, H. u. THRELFALL, W.
[7] Lehrbuch der Topologie. Leipzig und Berlin: Teubner 1934.
BURGER, E.
[8] Über Gruppen mit Verschlingungen. Crelle Journal Bd. 188 (1950), S. 193.
BLANCHFIELD, R. C. und FOX, R. H.
[9] Invariants of self-linking. Ann. of Math. Bd. 53 (1951), S. 556.

(Eingegangen am 12. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 49—56 (1952).

Über die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

Von

Paul Mönnig aus Aachen.

1. Einleitung.

Das Lösungsproblem der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung

$$H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = k, \quad \mathfrak{p} = \operatorname{grad} W \tag{1}$$

(hier wie auch häufig im Folgenden ist $\mathfrak{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$; $\mathfrak{p}$ für $p_1, \ldots, p_n$ und $\operatorname{grad} W$ für $\frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$ geschrieben) wird durch die Charakteristikentheorie auf die Integration der kanonischen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

zurückgeführt. Das JACOBIsche Integrationsverfahren lehrt dann, daß man n voneinander unabhängige Integrale

$$F^i(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

der kanonischen Gleichungen benötigt, welche die Involutionsbedingungen

$$(F^i, F^k) \equiv \sum_{l=1}^{n} (F^i_{p_l} F^k_{x_l} - F^i_{x_l} F^k_{p_l}) = 0 \quad (i; k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

erfüllen. Löst man das System der Gleichungen (3) nach $p_1, \ldots, p_n$ auf, was unter den Voraussetzungen des Satzes über die impliziten Funktionen möglich ist,

$$p_i = \pi_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{c}) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

(wir schreiben $\mathfrak{c}$ statt $c_1, \ldots, c_n$), so ist

$$dW = \sum_{i=0}^{n} \pi_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{c})\, dx_i \tag{6}$$

das totale Differential einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung (1).

Selbstverständlich müssen wir voraussetzen, daß im Phasenraum $\mathfrak{x}, \mathfrak{p}$ ein Bereich $\mathfrak{B}$ existiert, in dem die Funktion H erklärt ist und den Wert k aus (1) annehmen kann. In diesem Bereich sollen H zweimal

stetig nach sämtlichen Variablen differenzierbar und die Ableitungen H_{p_i} von Null verschieden sein.

Nach einem Satz von JACOBI ist eine Funktion $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ dann und nur dann ein Integral der kanonischen Gleichungen (2), wenn sie eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(H, F) \equiv \sum_{l=1}^{n} (H_{p_l} F_{x_l} - H_{x_l} F_{p_l}) = 0 \tag{7}$$

ist.

Gegenstand dieser Arbeit ist nun, *Untersuchungen darüber anzustellen, welche Vereinfachungen und Besonderheiten sich ergeben, wenn gewisse Funktionen F^i existieren, die* nicht nur die Gleichungen (7) erfüllen, sondern darüber hinaus auch noch *Lösungen sind des Systems*

$$H_{p_l} F_{x_l} - H_{x_l} F_{p_l} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

welches aus (7) *durch summandweises Verschwinden der* POISSONschen *Klammer hervorgeht. Die Fragestellung liefert einen*, m. W. bisher noch nicht bemerkten *Zugang zu der Theorie der durch Trennung der Variablen lösbaren* HAMILTON-JACOBIschen *partiellen Differentialgleichung.*

2. Lösung des linearen Systems[1].

Bei der Überprüfung des Systems (8) auf seine Vollständigkeit gelangt man zu den Integrabilitätsbedingungen

$$H_{x_k x_l} H_{p_k} H_{p_l} - H_{x_k p_l} H_{p_k} H_{x_l} - H_{p_k x_l} H_{x_k} H_{p_l} + H_{p_k p_l} H_{x_k} H_{x_l} = 0 \text{ für } k \neq l^2). \tag{9}$$

Sind sie erfüllt, so ist

$$F_{x_l} - \frac{H_{x_l}}{H_{p_l}} F_{p_l} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

ein JACOBIsches System.

Sind sie aber nur teilweise erfüllt, so lassen sich die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zu gewissen Komplexen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, $(r < n)$ zusammenfassen, wobei x_k und x_l dann und nur dann dem gleichen Komplex $\mathfrak{x}_\varrho$ angehören, wenn eine Indexkette $j_0 = k;\ j_1; \ldots; j_t = l$ existiert, für welche die Ungleichungen gelten

$$\begin{aligned} H_{x_{j_{\tau-1}} x_{j_\tau}} H_{p_{j_{\tau-1}}} H_{p_{j_\tau}} - H_{x_{j_{\tau-1}} p_{j_\tau}} H_{p_{j_{\tau-1}}} H_{x_{j_\tau}} - H_{p_{j_{\tau-1}} x_{j_\tau}} H_{x_{j_{\tau-1}}} H_{p_{j_\tau}} \\ + H_{p_{j_{\tau-1}} p_{j_\tau}} H_{x_{j_{\tau-1}}} H_{x_{j_\tau}} \neq 0 \qquad (\tau = 1, \ldots, t). \end{aligned} \tag{11}$$

---

[1]) Siehe etwa CARATHEODORY: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung. S. 26—36.

[2]) Zu dieser Gleichung vgl. LEVI-CIVITA: Sulla integrazione della equazione di HAMILTON-JACOBI per separazione di variabili. Math. Ann. **59** (1904), S. 385; dort auf andere Weise hergeleitet.

Durch geeignete Umbenennung der Indizes können wir erreichen, daß aus $x_k \in \mathfrak{x}_\varrho$; $x_l \in \mathfrak{x}_\sigma$; $k < l$ stets $\varrho \leqq \sigma$ folgt. Der Komplex $\mathfrak{x}_\varrho$ enthält dann die Variablen $x_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, x_{i_\varrho}$, wobei $i_0 = 0$ und i_ϱ die Zahl der Koordinaten ist, die den ersten ϱ Komplexen angehören.

Den x_k entsprechend werden die kanonisch konjugierten p_k zu Komplexen $\mathfrak{p}_\varrho$, $(\varrho = 1, \ldots, r)$ zusammengefaßt.

Man adjungiere nun zu (8) die durch Klammerbildung neu hinzutretenden Gleichungen und stelle ein Jacobisches System auf. Es ergibt sich

$$(12)\quad \begin{cases} F_{x_l} - \dfrac{H_{x_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} \cdot F_{p_{i_\varrho}} = 0 & (l = i_{\varrho-1}+1, \ldots, i_\varrho;\ \varrho = 1, \ldots, r), \\ F_{p_l} - \dfrac{H_{p_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} \cdot F_{p_{i_\varrho}} = 0 & (l = i_{\varrho-1}+1, \ldots, i_\varrho - 1;\ \varrho = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

Das zugehörige System der charakteristischen totalen Differentialgleichungen lautet

$$(13)\quad d\,p_{i_\varrho} = -\sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho} \frac{H_{x_l}}{H_{p_{i_\varrho}}}\, d\,x_l - \sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho - 1} \frac{H_{p_l}}{H_{p_{i_\varrho}}}\, d\,p_l \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Es ist nach den eingeführten Variablenkomplexen insofern getrennt, als in der ϱ-ten Gleichung nur die zu $\mathfrak{x}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{p}_\varrho$ gehörigen Differentiale $d\,x_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, d\,x_{i_\varrho}$ bzw. $d\,p_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, d\,p_{i_\varrho}$ auftreten. Die Trennung gestattet aber, jede Gleichung unabhängig von den anderen zu integrieren. Wir multiplizieren mit $H_{p_{i_\varrho}}$

$$(14)\quad \sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho} (H_{x_l}\, d\,x_l + H_{p_l}\, d\,p_l) = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

und erhalten die Integrale

$$(15)\quad H(\mathfrak{x}_1^0, \ldots, \mathfrak{x}_{\varrho-1}^0, \mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{x}_{\varrho+1}^0, \ldots, \mathfrak{x}_r^0, \mathfrak{p}_1^0, \ldots, \mathfrak{p}_{\varrho-1}^0, \mathfrak{p}_\varrho, \mathfrak{p}_{\varrho+1}^0, \ldots, \mathfrak{p}_r^0) = H(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{p}^0) = k \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

welche zueinander in Involution liegen, da sie nur die Variablen $x_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, x_{i_\varrho}$ jeweils eines Komplexes und ihre kanonisch konjugierten enthalten.

Wir haben den Satz: *Man erhält die Integrale des Systems* (8), *indem man in der Funktion* $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) \equiv H(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r)$ *sämtliche nicht zu den Komplexen* $\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho$ *gehörenden Variablen* x_k, p_k *durch gewisse Anfangswerte* x_k^0, p_k^0 *ersetzt.*

3. Trennung der Variablen.

Wollen wir eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (1) ermitteln, so können wir vermöge der Inte-

grale (15) nun das System

$$(16)\quad H(\mathfrak{x}_1^0, \ldots, \mathfrak{x}_{\varrho-1}^0, \mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{x}_{\varrho+1}^0, \ldots, \mathfrak{x}_r^0, \mathfrak{p}_1^0, \ldots, \mathfrak{p}_{\varrho-1}^0, \mathfrak{p}_\varrho, \mathfrak{p}_{\varrho+1}^0, \ldots, \mathfrak{p}_r^0) = k,$$
$$\mathfrak{p} = \operatorname{grad} W \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

betrachten. In Erweiterung des schon von STÄCKEL [3]) benutzten Summenansatzes schreiben wir

$$(17)\quad W = \sum_{\varrho=1}^{r} W_\varrho(\mathfrak{x}_\varrho)$$

und erhalten: *Das System* (16) *zerfällt durch den Ansatz* (17) *in r voneinander unabhängige Differentialgleichungen in den Variablen nur jeweils eines Komplexes* $\mathfrak{x}_\varrho$.

4. Über die Gestalt der Funktion $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$.

Notwendig und hinreichend für die im letzten Abschnitt durchgeführte Trennung der Variablen ist das Bestehen der LEVI-CIVITAschen Bedingungen

$$(18)\quad H_{x_k x_l} H_{p_k} H_{p_l} - H_{x_k p_l} H_{p_k} H_{x_l} - H_{p_k x_l} H_{x_k} H_{p_l} + H_{p_k p_l} H_{x_k} H_{x_l} = 0$$
$$\text{für } \varrho(k) \neq \varrho(l),$$

wobei $\varrho(k)$ bzw. $\varrho(l)$ die Indizes der Variablenkomplexe sind, denen x_k bzw. x_l angehören. Die Bedingungen stellen ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion H dar, mit dessen Lösung wir uns nun beschäftigen werden.

Wir benutzen den folgenden Satz [4]): Ist in einem vollständigen System linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung M die Zahl der unabhängigen Gleichungen und N die Zahl der unabhängigen Variablen, so gibt es genau $N - M$ unabhängige Lösungen. Zwischen diesen und jeder weiteren Lösung existiert eine Abhängigkeit.

Es sei nun vorausgesetzt, daß wir eine nichttriviale Funktion $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$, $(H_{p_{i_0}} \neq 0)$, welche die Gleichungen (18) befriedigt, bereits kennen. Das mit dieser Funktion gebildete System (12) ist dann ein JACOBIsches System. Die Funktionen $F^1(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \ldots, F^r(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ seien unabhängige Lösungen.

Da insbesondere aber auch die Funktion H eine Lösung des Systems (12) ist, besteht eine funktionale Abhängigkeit

$$(19)\quad H = f(F^1, \ldots, F^r).$$

---

[3]) STÄCKEL: Über die Integration der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. (Habil. Schr. Halle a. S. 1891). Dort für den Sonderfall $r = n$ angegeben.

[4]) Siehe etwa FRANK u. v. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl. Bd. 1, S. 639.

Wir streichen nun aus dem System (12) sämtliche Gleichungen heraus, welche mit einem bestimmten Komplexindex ϱ behaftet sind. So gewinnt man ein Teilsystem, das wieder ein JACOBIsches System ist und aus $(2n-r)-[2(i_\varrho - i_{\varrho-1})-1]$ Gleichungen besteht. Es muß nach dem vorausgeschickten Satz genau $r+2(i_\varrho - i_{\varrho-1})-1$ unabhängige Lösungen besitzen.

Offenbar sind die Funktionen $F^1, \ldots, F^r$ auch in dem verkürzten System wieder Lösungen. Als weitere Lösungen hat man, wie sich durch Einsetzen in das verkürzte System sofort zeigt, die zu $\mathfrak{x}_\varrho$ und $\mathfrak{p}_\varrho$ gehörigen Variablen $x_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, x_{i_\varrho}, p_{i_{\varrho-1}+1}, \ldots, p_{i_\varrho}$. Dies sind nun insgesamt $r+2(i_\varrho - i_{\varrho-1})$ Lösungen, und da nur $r+2(i_\varrho - i_{\varrho-1})-1$ unabhängig sein können, besteht eine Gleichung

$$\Phi^\varrho(\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho, F^1, \ldots, F^r) = 0. \tag{20}$$

Das gleiche Verfahren führe man für sämtliche r Komplexe durch. Man erhält das Gleichungssystem

$$\Phi^\varrho(\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho, F^1, \ldots, F^r) = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{21}$$

und damit den Satz:

Jede Lösung $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ *des Systems* (18) *ist durch eine Gleichung der Gestalt* (19) *darstellbar, wobei für die Argumentfunktionen* $F^1(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}), \ldots, F^r(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ *Identitäten der Form* (21) *bestehen.*

Wir beweisen nun den Umkehrsatz:

Gegeben seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$\Phi^\varrho(\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho, u_1, \ldots, u_r) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{22}$$

und

$$f(u_1, \ldots, u_r). \tag{23}$$

Für einen inneren Punkt $\mathfrak{x}^0, \mathfrak{p}^0, u_1^0, \ldots, u_r^0$ *des Definitionsbereiches sollen die Gleichungen*

$$\Phi^\varrho(\mathfrak{x}_\varrho^0, \mathfrak{p}_\varrho^0, u_1^0, \ldots, u_r^0) = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{24}$$

erfüllt sein. Dort sei ferner

$$\Phi^\varrho_{p_{i_\varrho}} \neq 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{25}$$

und

$$\frac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^r)}{\partial(u_1, \ldots, u_r)} \neq 0. \tag{26}$$

Dann lassen sich nach dem Satz von den impliziten Funktionen in einem gewissen, den Punkt $\mathfrak{x}^0, \mathfrak{p}^0, u_1^0, \ldots, u_r^0$ *als inneren Punkt enthaltenden Bereich die Gleichungen*

$$\Phi^\varrho(\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho, u_1, \ldots, u_r) = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{27}$$

nach $u_1, \ldots, u_r$ *auflösen,*

$$u_\varrho = F^\varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) \qquad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{28}$$

die so gewonnenen Funktionen $F^1, \ldots, F^r$ sind voneinander unabhängig und die Funktion

$$H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = f(F^1, \ldots, F^r) \tag{29}$$

erfüllt die Gleichungen (18).

Ersetzt man die u^ϱ aus (27) durch die Funktionen $F^\varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$, so erhält man die Identitäten (21). Durch Differentiation nach p_{i_σ} ergibt sich

$$\Phi^\varrho_{p_{i_\sigma}} = -\sum_{\tau=1}^{r} \Phi^\varrho_{u_\tau} F^\tau_{p_{i_\sigma}}. \tag{30}$$

Es folgt

$$\frac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^r)}{\partial(p_{i_1}, \ldots, p_{i_r})} = (-1)^r \frac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^r)}{\partial(u_1, \ldots, u_r)} \cdot \frac{\partial(F^1, \ldots, F^r)}{\partial(p_{i_1}, \ldots, p_{i_r})}. \tag{31}$$

Nun ist aber

$$\Phi^\varrho_{p_{i_\sigma}} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \neq \sigma. \tag{32}$$

Die in (31) linker Hand stehende Determinante reduziert sich also auf das Produkt

$$\Phi^1_{p_{i_1}} \Phi^2_{p_{i_2}} \ldots \Phi^r_{p_{i_r}}. \tag{33}$$

Trägt man diesen Ausdruck in die Gleichung (31) ein, so folgt aus den Voraussetzungen (25) und (26) die Ungleichung

$$\frac{\partial(F^1, \ldots, F^r)}{\partial(p_{i_1}, \ldots, p_{i_r})} \neq 0, \tag{34}$$

womit die Unabhängigkeit der Funktionen $F^1, \ldots, F^r$ voneinander gezeigt ist.

Um jetzt den das Bestehen der Gleichungen (18) aussagenden Teil des Satzes zu beweisen, bestätigen wir zunächst die Formeln

$$\Phi^\varrho_{p_l} \Phi^\sigma_{x_l} - \Phi^\varrho_{x_l} \Phi^\sigma_{p_l} = 0 \quad (\varrho; \sigma = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, n). \tag{35}$$

Offenbar sind $\Phi^\varrho_{p_l}$ und $\Phi^\varrho_{x_l}$ stets gleich Null, solange p_l und x_l nicht dem ϱ-ten Komplex angehören (siehe (22)). Das Produkt $\Phi^\varrho_{p_l} \Phi^\sigma_{x_l}$ kann daher nur dann von Null verschieden sein, wenn $\varrho = \sigma$ ist, und p_l, x_l dem ϱ-ten Komplex angehören. Dann heben sich aber in (35) die beiden Summanden linker Hand gegenseitig auf, so daß für alle Indexkombinationen die Gleichung gilt.

Beachtet man nun (vgl. Gl. (30)) die Relationen

$$\Phi^\varrho_{p_l} = -\sum_{\mu=1}^{r} \Phi^\varrho_{u_\mu} F^\mu_{p_l}; \quad \Phi^\varrho_{x_l} = -\sum_{\mu=1}^{r} \Phi^\varrho_{u_\mu} F^\mu_{x_l}, \tag{36}$$

so folgt wegen (26) aus (35)

$$F^\mu_{p_l} \Phi^\sigma_{x_l} - F^\mu_{x_l} \Phi^\sigma_{p_l} = 0 \quad (\mu; \sigma = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, n), \tag{37}$$

wegen (29) liefert eine Überschiebung mit $f_{\rho\mu}$

$$H_{p_l}\Phi^\sigma_{x_l} - H_{x_l}\Phi^\sigma_{p_l} = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, n), \tag{38}$$

und Anwendung der Schlußweise auf die zweiten Faktoren ergibt

$$H_{p_l}F^\mu_{x_l} - H_{x_l}F^\mu_{p_l} = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, n). \tag{39}$$

Auf die Gleichungen (38) wenden wir nun die Klammeroperation an. Wir erhalten mit Rücksicht auf (39) und

$$[\Phi^\sigma_{x_k}]_{x_l} = \Phi^\sigma_{x_k x_l} + \sum_{\mu=1}^{r} \Phi^\sigma_{x_k u_\mu} F^\mu_{x_l};\ [\Phi^\sigma_{x_k}]_{p_l} = \cdots, \text{ usw.} \tag{40}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}(H_{p_k}H_{x_k p_l} - H_{x_k}H_{p_k p_l})\,\Phi^\sigma_{x_l} - (H_{p_k}H_{x_k x_l} - H_{x_k}H_{p_k x_l})\,\Phi^\sigma_{p_l}\\ - (H_{p_l}H_{x_l p_k} - H_{x_l}H_{p_l x_k})\,\Phi^\sigma_{x_k} + (H_{p_l}H_{x_l x_k} - H_{x_l}H_{p_l x_k})\,\Phi^\sigma_{p_k} = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

Gehören jetzt x_k und x_l verschiedenen Koordinatenkomplexen an $(\varrho(k) \neq \varrho(l))$, so ist mindestens entweder $\Phi^\sigma_{x_k} = \Phi^\sigma_{p_k} = 0$ oder $\Phi^\sigma_{x_l} = \Phi^\sigma_{p_l} = 0$. Gl. (41) reduziert sich daher auf

$$(H_{p_k}H_{x_k p_l} - H_{x_k}H_{p_k p_l})\,\Phi^\sigma_{x_l} - (H_{p_k}H_{x_k x_l} - H_{x_k}H_{p_k x_l})\,\Phi^\sigma_{p_l} = 0 \tag{42}$$
$$(\varrho(k) \neq \varrho(l)),$$

und wegen (36) und (29) ergibt sich unter Wiederholung der früheren Schlußweise das Gleichungssystem (18), womit unser Beweis erbracht ist.

Wir haben damit gezeigt:

Die Gleichungen (19) *und* (21) *sind für das Bestehen des Systems* (18) *hinreichend und notwendig. Durch* (19) *und* (21) *ist daher das allgemeine Integral des Systems gegeben.*

5. Der Fall $r = n$.

Wenn die Gleichungen (18) für alle $k \neq l$ erfüllt sind, haben wir es mit n Komplexen zu tun. Die Bestimmungsgleichungen (19) und (21) für die Funktion $H(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$ vereinfachen sich zu

$$\begin{cases}\Phi^i(x_i, p_i, F^1, \ldots, F^n) = 0 & (i = 1, \ldots, n);\\ H = f(F^1, \ldots, F^n).\end{cases} \tag{43}$$

Um ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen *Differentialgleichung* (1) *zu ermitteln, löse man die Gleichungen*

$$\Phi^i(x_i, p_i, c_1, \ldots, c_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{44}$$

wobei zwischen der Konstanten k und den Parametern c_i der Zusammenhang

$$k = f(c_1, \ldots, c_n) \tag{45}$$

zu beachten ist, *nach* $p_1, \ldots, p_n$ *auf*, was wir als möglich voraussetzen wollen. *Erhält man dabei*

$$p_i = \pi_i(x_i, c_1, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{46}$$

so ist

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \pi_i(x_i, c_1, \ldots, c_n)\, d\, x_i \tag{47}$$

das gesuchte Integral.

6. Anwendung auf die Mechanik.

Dall' Acqua behandelte die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen[5]) unter Beschränkung auf den Fall der Mechanik

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(\mathfrak{x})\, p_i\, p_k + U(\mathfrak{x}). \tag{48}$$

Er gibt durch Formeln für U und die g_{ik} hinreichende und notwendige Bedingungen für die Möglichkeit der Trennung. Seine Ergebnisse lassen sich herleiten durch geeignete Spezialisierung der Funktionen Φ^i und f aus (43).

Wir setzen zu diesem Zweck

$$\Phi^{i'} \equiv p_{i'} - \sum_{k'=1}^{m} \psi_{i'k'}(x_{i'})\, F^{k'} = 0 \quad (i' = 1, \ldots, m \leqq n, \det|\psi_{i'k'}| \neq 0); \tag{49}$$

$$\Phi^i \equiv p_i^2 + p_i \sum_{k'=1}^{m} \omega_{ik'}(x_i)\, F^{k'} + \sum_{k',l'=1}^{m} \omega_{ik'l'}(x_i)\, F^{k'} F^{l'} + \chi_i(x_i) - \sum_{k=m+1}^{n} \varphi_{ik}(x_i)\, F^k = 0 \quad (i = m+1, \ldots, n, \det|\varphi_{ik}| \neq 0); \tag{50}$$

$$H = \sum_{i',k'=1}^{m} a_{i'k'}\, F^{i'} F^{k'} + \sum_{i=m+1}^{n} a_i F^i. \tag{51}$$

Offenbar folgt aus (49), daß die Funktionen $F^1, \ldots, F^m$ homogen linear in $p_1, \ldots, p_m$ sind. Aus (50) ergibt sich dann, daß $F^{m+1}, \ldots, F^n$ additiv zusammengesetzt sind aus einer homogenen quadratischen Form der p_i und einem Glied, das die p_i nicht enthält. Durch (51) wird daher H in der Gestalt der Gleichung (48) gegeben.

Führt man die Rechnung durch, so lassen sich U und die g_{ik} als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ ermitteln, wobei man die Dall' Acquaschen Formeln gewinnt.

---

[5]) F. A. Dall' Acqua: Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrano per separazione di variabili. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1912. Vgl. auch Prange: Enzyklopädie d. Math. Wissenschaften Teil 4, Mechanik Bd. 2, S. 644—657.

(Eingegangen am 1. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 57—64 (1952).

Über die Schlichtheitsschranken gewisser Funktionenfamilien.

Von

Friedhelm Erwe in Bonn a. Rh.

Zu jeder in $|z|>1$ meromorphen Funktion

$$\varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots \tag{1}$$

existieren Zahlen $\sigma \geqq 1$ derart, daß $\varphi(z)$ in $|z|>\sigma$ schlicht ist. Die untere Grenze aller dieser Zahlen σ heiße der Schlichtheitsradius von $\varphi(z)$ und werde mit $\sigma\{\varphi\}$ bezeichnet.

Sei nun eine Familie $\mathfrak{F}$ von in $|z|>1$ meromorphen Funktionen (1) vorgegeben. Dann existiert eine obere Grenze $S\{\mathfrak{F}\}$ aller Zahlen $\sigma\{\varphi\}$, wenn φ die Menge der zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Funktionen durchläuft, und zwar ist

$$1 \leqq S\{\mathfrak{F}\} \leqq \infty.$$

$S\{\mathfrak{F}\}$ heißt die Schlichtheitsschranke der Familie $\mathfrak{F}$ (sie besitzt natürlich nur dann Interesse, wenn sie $<\infty$ ist). Eine Funktion der Familie, deren Schlichtheitsradius mit der Schlichtheitsschranke übereinstimmt, heißt eine Schrankenfunktion (bezügl. der Schlichtheitsschranke).

Die Familie derjenigen in $|z|>1$ meromorphen Funktionen (1), für die gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha_\nu|^2 \leqq 1, \tag{2}$$

enthält nach dem Bieberbachschen Flächensatze die Familie der in $|z|>1$ schlichten meromorphen Funktionen, die wie (1) normiert sind, aber sie ist bekanntlich auch eine echte Obermenge der letzteren. Darüber hinaus läßt sich sogar sagen: Die Familie der in $|z|>1$ meromorphen Funktionen (1), für die (2) gilt, besitzt eine Schlichtheitsschranke, die größer als 1, aber endlich ist, und zwar gleich $\sqrt{2}$, wie diese Arbeit zeigen wird. Allgemeiner noch wird die entsprechende Fragestellung für jede der Familien $\mathfrak{F}_{k,a}$ behandelt, die bei festen reellen Zahlen $k>0$, $a>0$ aus denjenigen in $|z|>1$ meromorphen Funktionen (1) mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha_\nu|^k \leqq a \tag{3}$$

bestehen. Für $k = 2$, $a = 1$ ist das speziell die oben in Verbindung mit dem Bieberbachschen Flächensatz erwähnte Familie. Für $k = 2$ und beliebiges $a > 0$ läßt sich übrigens die analoge geometrische Interpretation geben, der der Flächensatz seinen Namen verdankt: Wenn z auf einem Kreise $|z| = r > 1$ einmal umläuft, so überstreicht der Fahrstrahl, der vom Nullpunkt zu dem vermöge einer in $1 < |z| < \infty$ regulären Funktion (1) aus z entstehenden Bildpunkt $\varphi(z)$ weist, eine Fläche vom (mit Vorzeichen versehenen) Inhalt

$$\mathfrak{F}_r = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{it}) + \overline{\varphi(re^{it})}}{2} \cdot \frac{\frac{d}{dt}\varphi(re^{it}) - \overline{\frac{d}{dt}\varphi(re^{it})}}{2i}\, dt$$

$$= \pi \cdot \left(r^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu |\alpha_\nu|^2}{r^{2\nu}}\right).$$

Für $r \to 1+0$ ergibt sich

$$\mathfrak{F} = \lim_{r \to 1+0} \mathfrak{F}_r = \pi \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_\nu|^2\right)$$

(man sieht, daß in jedem Fall $\mathfrak{F} \leqq \pi$ ist, $\mathfrak{F} = -\infty$ nicht ausgeschlossen). Die Familie $\mathfrak{F}_{2,a}$ ist also dadurch charakterisiert, daß

$$\mathfrak{F} \geqq \pi (1 - a).$$

Daß übrigens alle Funktionen dieser Familie — und sogar alle Funktionen jeder der Familien $\mathfrak{F}_{k,a}$ — in $1 < |z| < \infty$ regulär sind (in $z = \infty$ haben sie einen Pol), folgt unmittelbar aus dem Kriterium von Cauchy-Hadamard, wenn man bedenkt, daß wegen (3) die $|\alpha_\nu|$ nach oben beschränkt sind.

Bei der Lösung der aufgeworfenen Frage finden zwei Hilfssätze Verwendung, von denen der zweite bewiesen werden soll.

Hilfssatz 1. *Seien A_ν nicht-negative, B_ν positive reelle Zahlen ($\nu = 1, 2, \ldots$), seien ferner k und l positive Zahlen mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$. Dann gilt die Hölder*sche *Ungleichung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu B_\nu \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^l\right)^{\frac{1}{l}},$$

Konvergenz der rechtsseitig auftretenden Reihen vorausgesetzt. Das Gleichheitszeichen wird genau dann erreicht, wenn

$$\frac{A_\nu^k}{B_\nu^l} \equiv \text{const.} \quad \textit{für alle } \nu.$$

Hilfssatz 2. *Die Familie $\mathfrak{F}_r$ (r feste Zahl > 1) derjenigen in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen $\varphi(z)$ der Form* (1), *für die*

$$\text{(4)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r^{\nu+1}} \leqq 1$$

gilt, besitzt die Zahl r als Schichtheitsschranke. Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen, für die in (4) *das Gleichheitszeichen gilt, und für die eine Zahl ε existiert, so daß*

$$\alpha_\nu = |\alpha_\nu|\,\varepsilon^{\nu+1} \quad \textit{für alle } \nu \text{ [1]}. \tag{5}$$

Beweis. Es werde

$$\Phi(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} & \text{für } z_1 \neq z_2, \\ \varphi'(z_1) & \text{für } z_1 = z_2 \end{cases}$$

gesetzt. Dann gilt

$$\Phi(z_1, z_2) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \alpha_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{z_1^{\nu+1-\mu} z_2^{\mu}} \right\}, \tag{6}$$

$$|\Phi(z_1, z_2)| \geqq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ |\alpha_\nu| \cdot \left| \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{z_1^{\nu+1-\mu} z_2^{\mu}} \right| \right\}$$

$$\geqq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ |\alpha_\nu| \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{|z_1^{\nu+1-\mu} z_2^{\mu}|} \right\}.$$

Für $|z_1| \geqq r, |z_2| \geqq r$ folgt hieraus unter Verwendung von (4)

$$|\Phi(z_1, z_2)| \geqq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r^{\nu+1}} \geqq 0. \tag{7}$$

Verfolgt man die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in den einzelnen Übergängen zwischen (6) und (7), und zwar am besten hinten beginnend, so ergeben sich als notwendige (und wie man nachträglich leicht feststellt, auch hinreichende) Bedingungen dafür, daß $\Phi(z_1, z_2)$ für ein gewisses Wertepaar z_1, z_2 (nicht notwendig $z_1 \neq z_2$) in $|z_1| \geqq r, |z_2| \geqq r$ verschwindet

1) Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (4).

2) $|z_1| = |z_2| = r$ (der triviale Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ ist wegen 1) ausgeschlossen).

---

[1]) Die letztere Aussage ist äquivalent mit: Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen $\varphi(z)$, die auf $|z| = r$ eine Nullstelle der Ableitung besitzen. — Es ist nämlich

$$\varphi(z) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}}, \quad |\varphi'(z)| \geqq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r^{\nu+1}} \quad (|z| = r),$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn

$$\frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}} = \left| \frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}} \right|, \text{ d. h. } \alpha_\nu = |\alpha_\nu| \left(\frac{z}{|z|} \right)^{\nu+1}.$$

Folglich ist $\varphi'(z) = 0$ für ein gewisses z auf $|z| = r$ genau dann, wenn in (4) das Gleichheitszeichen steht und wenn (5) gilt $\left(\varepsilon = \dfrac{z}{|z|} \right)$.

3) (Es werde der Fall $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$ ausgeschlossen. und es sei etwa $\alpha_j \neq 0$ für ein $j \geqq 2$.)

$$\frac{1}{z_1^{j+1-\mu} z_2^{\mu}} = \frac{1}{z_1^{j} z_2} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, j)^{2}),$$

d. h., etwa $\mu = 2$ setzend, $z_1 = z_2$.

4) $$\alpha_\nu = |\alpha_\nu| \varepsilon^{\nu+1}{}^{3}).$$

Wegen 2) folgt sofort, daß in $|z_1| > r$, $|z_2| > r$ $\Phi \neq 0$ ist, d. h. aber, daß $S\{\mathfrak{F}_r\} \leqq r$. Da aber gewiß Funktionen existieren, die 1) und 4) erfüllen (die Bedingungen 2) bzw. 3) machen nur Einschränkungen über die Lage der Punkte z_1, z_2 und spielen als solche für die Auswahl der Schrankenfunktionen nur die in den Anm. [2]), [3]) erwähnte indirekte Rolle), also in $|z| \geqq r$ nicht mehr schlicht sind und folglich den Schlichtheitsradius r besitzen, ist $S\{\mathfrak{F}_r\} = r$ bewiesen. Die soeben erwähnten Funktionen gehören zu den Schrankenfunktionen. Daß sie die einzigen sind, folgt aus der Tatsache, daß im Falle der Schlichtheit von $\varphi(z)$ im abgeschlossenen Kreisäußern $|z| \geqq r$ bekanntlich eine Zahl R mit $1 < R < r$ existiert (jede genügend nahe unterhalb r liegende Zahl R kommt in Frage), so daß $\varphi(z)$ sogar in $|z| > R$ noch schlicht ist, also $\sigma\{\varphi\} \leqq R < r$ ist.

Nun kann der erste Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen werden:

Satz 1. *Die Schlichtheitsschranke der durch* (3) *definierten Familie* $\mathfrak{F}_{k,a}(k > 0, a > 0)$ *von in* $|z| > 1$ *meromorphen Funktionen* (1) *ist:*

$$S\{\mathfrak{F}_{k,a}\} = \begin{cases} \left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right)^{\frac{k-1}{k}} & \text{für } k > 1, \quad (8\,a) \\ a^{\frac{1}{2k}} & \text{für } k \leqq 1,\ a > 1, \quad (8\,b) \\ 1 & \text{für } k \leqq 1,\ a \leqq 1. \quad (8\,c) \end{cases}$$

Schrankenfunktionen sind im Falle c) *alle Funktionen der Familie; in den beiden ersten Fällen sind genau die folgenden Funktionen Schrankenfunktionen:*

$$\varphi(z) = \begin{cases} z + \dfrac{a^{\frac{1}{k-1}} \varepsilon}{1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}} \cdot \dfrac{1}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right) \bar{\varepsilon} z - 1} & \text{im Falle a), (9 a)} \\ z + \dfrac{a^{\frac{1}{k}} \varepsilon^2}{z} & \text{im Falle b). (9 b)} \end{cases}$$

wo $|\varepsilon| = 1$.

[2]) Hier wurde 2) mitverwendet.

[3]) Hier wurde 3) mitverwendet und $\frac{z_1}{|z_1|} = \varepsilon$ gesetzt. Für $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$ ergibt sich die gleiche Bedingung, wenn man jetzt $\frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} = \varepsilon^2$ setzt.

Beweis. a) Es sei $k > 1$. Dann gilt gemäß Hilfssatz 1, A_ν mit $|\alpha_\nu| \nu^{\frac{1}{l}}$, B_ν mit $\frac{\nu^{\frac{1}{l}}}{r_0^{\nu+1}}$ $\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1,\ r_0 > 1\right)$ identifizierend:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_\nu|^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{r_0^{l(\nu+1)}}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

Unter Verwendung der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{x^{\nu+1}} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \qquad (|x| > 1),$$

$x = r_0^l$ setzend, und der Ungleichung (3) folgt weiter:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}} \leqq a^{\frac{1}{k}} (r_0^l - 1)^{-\frac{2}{l}}.$$

Wenn also

$$a^{\frac{1}{k}} (r_0^l - 1)^{-\frac{2}{l}} = 1,$$

d. h.

$$r_0 = \left(1 + a^{\frac{l}{2k}}\right)^{\frac{1}{l}},$$

so ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}} \leqq 1. \tag{10}$$

Das Gleichheitszeichen in (10) wird genau dann erreicht, wenn es in (3) gilt und wenn außerdem (siehe Hilfssatz 1)

$$|\alpha_\nu|^k r_0^{l(\nu+1)} = |\alpha_1|^k r_0^{2l} \quad \text{für alle } \nu. \tag{11}$$

Für $|\alpha_1|^k$ aus (11) ergibt sich also die Bestimmungsgleichung:

$$|\alpha_1|^k r_0^{2l} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{r_0^{l(\nu+1)}} = a,$$

d. h.

$$|\alpha_1| = \frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right)^2},$$

$$|\alpha_\nu| = \frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right)^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Gemäß (10) ist die Familie $\mathfrak{F}_{k,a}$ in der Familie $\mathfrak{F}_{r_0}$ des Hilfssatzes 2 enthalten. Da aber eine nicht leere Untermenge der in jenem Hilfssatz aufgeführten Schrankenfunktionen zu $\mathfrak{F}_{k,a}$ gehört, nämlich die Menge der Funktionen $\varphi(z)$ der Form (1), die (12) und (5) erfüllen, ist

$$S\{\mathfrak{F}_{k,a}\} = S\{\mathfrak{F}_{r_0}\} = r_0.$$

Damit ist der Satz für $k > 1$ in vollem Umfang bewiesen, denn die Schrankenfunktionen (9a) berechnen sich leicht aus (12) und (5).

b) Es sei $k \leqq 1$, $a > 1$. Mit der Abkürzung

$$r_0 = a^{\frac{1}{2k}}$$

ergibt sich aus (3)[4])

$$\frac{|\alpha_\nu|}{r_0} \leqq 1,$$

also

$$\left|\frac{\alpha_\nu}{r_0^2}\right|^k \geqq \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^2},$$

und weiter gemäß (4)

$$\frac{1}{r_0^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|\alpha_\nu| \leqq 1, \tag{13}$$

$$\frac{|\alpha_1|}{r_0^2} \leqq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu\,|\alpha_\nu|.$$

Demnach gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}} \leqq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu\,|\alpha_\nu| + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r_0^{\nu+1}} \leqq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\{\nu\,|\alpha_\nu| \left(1 - \frac{1}{r_0^{\nu-1}}\right)\right\}$$

$$\leqq 1. \tag{14}$$

Das Gleichheitszeichen in (14) wird offenbar genau dann erreicht, wenn $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$ und $|\alpha_1| = r_0^3 \left(= a^{\frac{1}{k}}\right)$. Der auf (10) und die anschließende Feststellung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (10) folgende Schluß wiederholt sich nun ganz analog und führt zu den Behauptungen.

c) Es sei $k \leqq 1$, $a \leqq 1$. Die Herleitung von (13) bleibt im vorliegenden Fall gültig, wenn dort $r_0 = 1$ gesetzt wird. Dann lautet (13) aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|\alpha_\nu| \leqq 1.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt aber trivialerweise, daß dann $\varphi(z)$ in $|z| > 1$ schlicht ist. Damit ist schon alles bewiesen, denn die Aussage über die Schrankenfunktionen ist eine Selbstverständlichkeit.

Entsprechende Überlegungen, die aber nun nicht mehr in aller Ausführlichkeit gebracht werden sollen, können auch für die Familie

[4]) (3) lautet in dieser Schreibweise:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left|\frac{\alpha_\nu}{r_0^2}\right|^k \leqq 1.$$

$\mathfrak{H}_{k,a}$ derjenigen in der Kreisscheibe $|z|<1$ meromorphen Funktionen

$$\psi(z) = z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \cdots \tag{15}$$

durchgeführt werden, die der Bedingung

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_\nu|^k \leqq a \tag{16}$$

bei festen reellen Zahlen $k>0$, $a>0$ genügen[5]).

Zu jeder in $|z|<1$ meromorphen Funktion $\psi(z)$ der Form (15) existieren Zahlen $\varrho \leqq 1$ derart, daß $\psi(z)$ in $|z|<\varrho$ schlicht ist. Die obere Grenze aller dieser Zahlen ϱ heiße der Schlichtheitsradius von $\psi(z)$ und werde mit $\varrho\{\psi\}$ bezeichnet.

Für eine Familie $\mathfrak{H}$ von in $|z|<1$ meromorphen Funktionen $\psi(z)$ werde

$$R\{\mathfrak{H}\} = \operatorname*{fin}_{\psi \in \mathfrak{H}} \varrho\{\psi\}$$

als deren Schlichtheitsschranke bezeichnet. Eine Funktion aus $\mathfrak{H}$, deren Schlichtheitsradius mit der Schlichtheitsschranke übereinstimmt, heißt eine Schrankenfunktion.

Hilfssatz 2 besitzt folgendes Analogon, dessen Beweis sich ganz ähnlich gestaltet:

Hilfssatz 2a. *Die Familie $\mathfrak{H}_r$ (r feste Zahl mit $0<r<1$) derjenigen in $|z|<1$ meromorphen Funktionen $\psi(z)$ der Form* (15), *für die*

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_\nu| r^{\nu-1} \leqq 1 \tag{17}$$

gilt, besitzt die Zahl r als Schlichtheitsschranke. Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen, für die in (17) *das Gleichheitszeichen gilt, und für die eine Zahl ε existiert, so daß*

$$\beta_\nu = -|\beta_\nu| \varepsilon^{\nu-1} \quad \textit{für alle } \nu.$$

[5]) Diese Funktionen sind nach Cauchy-Hadamard sogar regulär in $|z|<1$.

Für $k=2$ läßt sich eine geometrische Interpretation geben, die der S. 58 analog ist: Wenn z auf einem Kreise $|z|=r<1$ einmal umläuft, so überstreicht der Fahrstrahl, der vom Nullpunkt zu dem vermöge einer in $|z|<1$ regulären Funktion (15) aus z entstehenden Bildpunkt $\psi(z)$ weist, eine Fläche vom (mit Vorzeichen versehenen) Inhalt:

$$\mathfrak{J}_r = \pi\left(r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_\nu|^2 r^{2\nu}\right),$$

$$\mathfrak{J} = \lim_{r \to 1-0} \mathfrak{J}_r = \pi\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_\nu|^2\right).$$

Die Familie $\mathfrak{H}_{2,a}$ ist also dadurch charakterisiert, daß

$$\mathfrak{J} \leqq \pi(1+a).$$

Bemerkung (vgl. Anm.[1])): Die letztere Aussage des Hilfssatzes 2a ist äquivalent mit: Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen $\psi(z)$, die auf $|z| = r$ eine Nullstelle der Ableitung besitzen.

Wie Satz 1, so läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 2. *Die Schlichtheitsschranke der durch* (16) *definierten Familie* $\mathfrak{H}_{k,a}(k > 0,\ a > 0)$ *von in* $|z| < 1$ *meromorphen (also regulären) Funktionen* (15) *ist*

$$R\{\mathfrak{H}_{k,a}\} = \begin{cases} \left(1 - \sqrt{\dfrac{a^{\frac{1}{k-1}}}{1 + a^{\frac{1}{k-1}}}}\right)^{\frac{k-1}{k}} & \text{für } k > 1, \quad (18\,a) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} & \text{für } k \leqq 1,\ a > 2^{1-k}, \quad (18\,b) \\ 1 & \text{für } k \leqq 1,\ a \leqq 2^{1-k}. \quad (18\,c) \end{cases}$$

Schrankenfunktionen sind im Falle c) alle Funktionen der Familie; in den beiden ersten Fällen sind genau die folgenden Funktionen Schrankenfunktionen

$$\psi(z) = \begin{cases} z + a^{\frac{1}{k-1}}\,\alpha\,\varepsilon \cdot \dfrac{z^2}{1 - \alpha\,\varepsilon\,z}, \quad \alpha = \left(1 - \sqrt{\dfrac{a^{\frac{1}{k-1}}}{1 + a^{\frac{1}{k-1}}}}\right)^{\frac{1}{k}}, & \\ & \text{im Falle a)}, \\ z + \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \varepsilon\, z^2 & \text{im Falle b)}, \end{cases}$$

wo $|\varepsilon| = 1$.

Wenn man von den besprochenen Familien zu Unterklassen übergeht, die aus denjenigen Funktionen $\varphi(z) \in \mathfrak{F}_{k,a}$ bzw. $\psi(z) \in \mathfrak{H}_{k,a}$ bestehen, für die $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots |\alpha_\varkappa|$ bzw. $|\beta_1|, |\beta_3|, \ldots |\beta_\varkappa|$ vorgeschriebene feste (mit (3) bzw. (16) verträgliche) Werte besitzen, so lassen sich mit den gleichen Mitteln deren Schlichtheitsschranken bestimmen.

(Eingegangen am 23. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 65—79 (1952).

Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I.

Von

Wolfhart Haacke in Braunschweig.

1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Lösungen eines Systems von n gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten untersucht, die von einem Parameter λ abhängen. Es sollen die Bedingungen aufgestellt werden, wann das System $2n$ linear unabhängige Lösungen besitzt, die sämtlich für hinreichend große λ beschränkte Funktionen von x sind. Diese Bedingungen ergeben sich aus einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten aus festen Funktionswerten von $2n$ speziellen Lösungsspalten des Systems zusammengesetzt sind. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht darin, die diesen speziellen Anfangsbedingungen unterworfenen Lösungen herzustellen. Dazu werden zunächst $2n$ Lösungsspalten in im Sinne der Algebra formalen Reihen nach reziproken Potenzen des Parameters hergeleitet. Durch eine von Herrn Perron angegebene Transformation[1]) kann man unser System in ein solches System erster Ordnung umwandeln, für das Herr Perron bewiesen hat, daß eine derartige formale Entwicklung gewisse Lösungen asymptotisch in dem Parameter darstellt[2]). Mit Hilfe dieses Satzes zeigen wir, daß unsere formalen Reihen asymptotische Darstellungen von durch bestimmte Anfangsbedingungen gegebenen Integralen sind. Dieses Lösungssystem wird nun linear in das für unser Stabilitätskriterium benötigte System transformiert. Die Elemente dieser Transformationsmatrix bestimmen sich aus linearen Gleichungssystemen. Mit diesen kann man dann bis auf einen asymptotisch angebbaren Fehler die Stabilitätsgleichung bilden. Sind alle Koeffizienten des Differentialgleichungssystems gerade periodische Funktionen, so vereinfacht sich die Stabilitätsgleichung für hinreichend große Werte des Parameters zu einem System von n simultanen Gleichungen. Diese werden dann für den Fall gerader reeller

[1]) [9]: [ ] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Ähnliche Untersuchungen über Systeme erster Ordnung enthalten unter anderen auch folgende Arbeiten: [1], [5], [8].

Koeffizientenfunktionen diskutiert. So gelingt es, aus der in einem Periodenintervall gültigen Darstellung der Lösung auf ihr infinitäres Verhalten zu schließen.

Unabhängig von asymptotischen Darstellungen sind zahlreiche Stabilitätsuntersuchungen für Systeme erster und zweiter Ordnung bekannt[3]). Doch diese Klasse von Untersuchungen setzt beschränkte Variation oder absolute Integrierbarkeit bis Unendlich für die Koeffizientenfunktionen voraus, was hier nicht gefordert werden kann. Über die Stabilität von Systemen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten für kleine Werte des von uns als groß angesehenen Parameters haben mehrere italienische Autoren gearbeitet, besonders sei die Arbeit von Herrn Cesari erwähnt[4]). Ein gewisser Zusammenhang dieser Untersuchung mit der großen Zahl der Arbeiten über asymptotische Darstellungen der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung[5]) sei erwähnt. Schließlich soll noch eine Untersuchuug von Herrn Mettler [7] genannt werden, der das System

$$\mathfrak{y}'' + \mathfrak{K}\,\mathfrak{y} + \varepsilon \cos x\, \mathfrak{L}\,\mathfrak{y} = 0$$

für reelle konstante Koeffizientenmatrizen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ und kleine Parameter ε formal löst.

2. Die allgemeine Stabilitätstheorie.

Zunächst werden wir die bekannten Sätze der Theorie der Systeme mit periodischen Koeffizienten, die wir benötigen, zusammenstellen [7], [10]: Ein System

$$\mathfrak{y}'' + \mathfrak{M}(x)\,\mathfrak{y} = 0 \tag{1}$$

[6])

mit mod 2π periodischem stetigen $\mathfrak{M}(x)$ besitzt $2n$ linear unabhängige Lösungsspalten $\mathfrak{u}_r$[7]), deren Komponenten $u_{1r}(x), \ldots, u_{nr}(x)$ seien. Diese fassen wir in eine Matrix $\mathfrak{U}$ vom Typ $(n, 2n)$ zusammen. Die Spalten $\mathfrak{u}_r$ seien so bestimmt, daß

$$u_{\mu r}(a) = \delta_{\mu r}, \quad \frac{d\,u_{\mu r}(a)}{dx} = \delta_{\mu+n,\,r} \tag{2}$$

gilt. Dann sind die $2n$ Lösungsspalten sicher linear unabhängig. Da die Koeffizienten von (1) mod 2π periodisch sind, ist mit $\mathfrak{U}(x)$ auch $\mathfrak{U}(x+2\pi)$ Lösung von (1). Also gilt mit einer konstanten $(2n, 2n)$ Matrix $\mathfrak{F}^{(2n)}$:

$$\mathfrak{U}(x + 2\pi) = \mathfrak{U}(x)\,\mathfrak{F}^{(2n)}. \tag{3}$$

---

[3]) Z. B. [2].

[4]) [3]. Hier werden Kriterien angegeben, wann für hinreichend kleine Parameter λ, d. h. in der Umgebung von $\lambda = 0$, Stabilität vorliegt.

[5]) Z. B. [4], [6], [11].

[6]) bedeute immer Ableitung nach x.

[7]) Wir wollen verabreden, daß ϱ immer von 0 bis ∞, r und s von 1 bis $2n$ und $\varkappa$, μ, ν von 1 bis n laufen sollen.

Wir suchen jetzt spezielle Lösungsspalten $\mathfrak{v}(x)$ derart, daß

$$\mathfrak{v}(x+2\pi) = \sigma \cdot \mathfrak{v}(x) \tag{4}$$

bei konstantem σ wird. Dann muß sich $\mathfrak{v}$ bei konstanter Spalte $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{v} = \mathfrak{U}\mathfrak{c}$ bestimmen lassen. Nun ist aber $\mathfrak{v}(x+2\pi)$ einerseits gleich $\sigma \cdot \mathfrak{v}(x) = \sigma \cdot \mathfrak{U}(x)\mathfrak{c}$, andererseits aber auch gleich

$$\mathfrak{U}(x+2\pi)\mathfrak{c} = \mathfrak{U}(x)\mathfrak{F}^{(2n)}\mathfrak{c}.$$

Also: $\mathfrak{U}(x)(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{E}^{(2n)})\mathfrak{c} = 0$. Da die Spalten von $\mathfrak{U}(x)$ ein Fundamentalsystem bilden, bestimmt sich σ aus

$$\det(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{E}^{(2n)}) = 0. \tag{5}$$

Aus (2) und (3) folgt, daß die Elemente von $\mathfrak{F}^{(2n)}$: $f_{\mu r} = u_{\mu r}(a+2\pi)$ und $f_{\mu+n,r} = \frac{d\,v_{\mu r}(a+2\pi)}{dx}$ sind. Die Fundamentalgleichung (5) ist bekanntlich von der Wahl des Ausgangssystems unabhängig.

Wenn speziell die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{M}$ *nur bzgl.* $x = a$ *gerade periodische Funktionen* enthält, läßt sich die Determinantengleichung (5) auf den n-ten Grad reduzieren. Mit $\mathfrak{v}(x)$ ist dann nämlich auch $\mathfrak{v}(2a-x) \equiv \mathfrak{v}^*(x)$ Lösung von (1). Also ist $\mathfrak{v}^*(x+2\pi) = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{v}^*(x)$.

Mit $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{c}^* = \begin{vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ -c_{n+1} \\ \vdots \\ -c_{2n} \end{vmatrix}$ gilt wegen (2): $\mathfrak{v}^* = \mathfrak{U}\mathfrak{c}^*$.

Die dazu gehörige Fundamentalgleichung lautet:

$$\mathfrak{U}(x)(\mathfrak{F}^{(2n)} - \frac{1}{\sigma}\mathfrak{E}^{(2n)})\mathfrak{c}^* = 0.$$

Addieren wir zu den ersten n Gleichungen von $(\mathfrak{F}^{(2n)} - \frac{1}{\sigma}\mathfrak{E}^{(2n)})\mathfrak{c}^* = 0$ die entsprechenden Gleichungen von $(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{E}^{(2n)})\mathfrak{c} = 0$, so ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante ebenfalls verschwinden muß[8]). Diese lautet:

$$\det(\mathfrak{F}^{(n)} - \cos 2\pi\tau\,\mathfrak{E}^{(n)}) = 0, \tag{6}$$

[8]) Hierbei ist $\mathfrak{c}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$ vorausgesetzt. Mit $\mathfrak{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix}$ schreiben sich die ersten n Gleichungen des Ausgangssystems

$$(\mathfrak{F}^{(n)} - \sigma\mathfrak{E}^{(n)})\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{c}_2 = 0.$$

Dabei braucht wohl die Bedeutung von $\mathfrak{F}_2$ nicht erklärt zu werden. Ist $\mathfrak{c}_1 = 0$, so muß wegen $\mathfrak{c} \neq 0$ $\det\mathfrak{F}_2 = 0$ sein. In $\mathfrak{F}_2$ stehen die zweiten n Lösungsspalten von (1) an der Stelle $x = a + 2\pi$. Daher kann $\det\mathfrak{F}_2$ nicht verschwinden. Also kann $\mathfrak{c}_1 = 0$ nicht eintreten.

wenn

$$\sigma = e^{2\pi i \tau} \tag{7}$$

gesetzt ist. Dabei enthält $\mathfrak{F}^{(n)}$ die ersten n Zeilen und Spalten von $\mathfrak{F}^{(2n)}$. Ist $\cos 2\pi\tau_\nu$ Wurzel von (6), so ergeben sich daraus wegen (7) zwei Wurzeln für σ, so daß wir insgesamt $2n$ (nicht notwendig verschiedene) Wurzeln von (5) erhalten. Falls (6) mehrfache Wurzeln oder Wurzeln der Form $\cos 2\pi\tau = \pm 1$ besitzt, hat (5) mehrfache Wurzeln. In diesem Fall läßt sich im allgemeinen ein Fundamentalsystem nicht mehr vollständig aus Integralen vom Typ (4) aufbauen. Es treten Funktionen hinzu, die außer periodischen und exponentiellen Faktoren auch Potenzen von x als Faktoren enthalten. Nur bei speziellen Anfangsbedingungen und in dem Fall, daß alle Elementarbestandteile der Matrix $\mathfrak{F}^{(2n)}$ verschieden sind, treten diese Potenzen von x nicht auf [10]. Solche Lösungen nennen wir labil, während bei einer stabilen Lösung die zugehörige Größe $\cos 2\pi\tau$ reell, von allen anderen verschieden und vom Betrage kleiner als eins sein muß[9]). In diesem Falle ist σ immer vom Betrage eins: die Lösung ist fastperiodisch. Alle anderen Wurzeln bewirken zum Teil exponentiell unbeschränkte Lösungen, die also instabil sind.

3. Die asymptotische Darstellung der Lösung.

Wir wollen nun asymptotische Darstellungen bezüglich λ der Lösungen des in Vektorform gegebenen Systems

$$\mathfrak{y}'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x)\mathfrak{y} + \lambda \mathfrak{A}(x, \lambda)\mathfrak{y} = 0 \text{ [10])} \tag{8}$$

untersuchen. Der Parameter λ sei auf reelle positive Werte beschränkt. Die Matrix $\mathfrak{A}(x, \lambda)$ sei in $a \leqq x \leqq a + 2\pi$ gleichmäßig für $\lambda \to \infty$ folgender asymptotischen Reihe gleich: $\mathfrak{A}(x, \lambda) \sim \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \mathfrak{A}^{(\varrho)}(x)$[11]). $\mathfrak{A}^{(\varrho)}(x)$ und $\mathfrak{R}(x)$ seien in $a \leqq x \leqq a + 2\pi$ stetige und unendlich oft differenzierbare n-reihige quadratische Matrizenfunktionen, die die Periode 2π haben. Weiter sei $\mathfrak{R}(x) = \{\delta_{\mu\nu} r_\mu^2(x)\}$ mit $r_\mu^2 \neq r_\nu^2$ (für $\mu \neq \nu$) und $r_\mu^2 \neq 0$ für alle x im Intervall $a \leqq x \leqq a + 2\pi$. Sonst seien die Funktionen $r_\mu^2(x)$ und $a_{\mu\nu}^{(\varrho)}(x)$ beliebig komplexwertig.

[9]) Diese Bezeichnung überträgt man in folgender Weise auf das Differentialgleichungssystem: Sind *alle* $2n$ Lösungen stabil, so heiße (1) stabil, gibt es außer stabilen auch labile Lösungen, aber keine instabilen, so heiße (1) labil. In jedem anderen Fall werde (1) instabil genannt.

[10]) An Stelle der Diagonalmatrix $\mathfrak{R}$ kann auch eine Matrix $\mathfrak{B}(x) = f(x)\mathfrak{C}$ zugelassen werden. Dabei sei $\mathfrak{C}$ eine Hermitesche Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Die Schwankungen der mod 2π periodischen Funktion $f(x)$ seien kleiner als die kleinste Differenz zweier Eigenwerte der Matrix. Dann läßt sich dieses System durch unitäre Transformation in das System (8) umwandeln.

[11]) (ϱ) sei ein Index, keine Ableitung.

Für unsere Untersuchung wird es zweckmäßig sein, zunächst an Stelle der Vektorgleichung (8) eine äquivalente Matrizengleichung

$$\mathfrak{Y}'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x)\,\mathfrak{Y} + \lambda\,\mathfrak{A}(x,\lambda)\,\mathfrak{Y} = 0 \tag{9}$$

zu betrachten, in der die (n, n) Matrix $\mathfrak{Y}$ aus n Lösungsspalten von (8) aufgebaut ist. Wir werden in unserer Lösung zwei Vorzeichenmöglichkeiten erhalten, deren jede n Spalten ergibt, so daß wir insgesamt $2n$ Lösungsspalten bekommen, deren lineare Unabhängigkeit dann noch gezeigt werden muß.

Zur Lösung von (9) machen wir den zunächst rein formalen Ansatz

$$\mathfrak{Y} \equiv \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho}\,\mathfrak{P}^{(\varrho)}(x)\cdot\mathfrak{S}(x,\lambda). \tag{10}$$

Dabei sei mit noch unbestimmten Funktionen $k_\mu(x)$ und $l_\mu(x)$

$$\mathfrak{S}(x,\lambda) = \{\delta_{\mu\nu}\exp[\pm i\int_a^x (\lambda k_\mu(\xi) + l_\mu(\xi))\,d\xi]\};$$

außerdem sei $\mathfrak{K} = \{\delta_{\mu\nu} k_\mu(x)\}$ und $\mathfrak{L} = \{\delta_{\mu\nu} l_\mu(x)\}$.
Durch formale gliedweise Differentiation ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}'' \equiv \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho}\{&\mathfrak{P}^{(\varrho)''} \pm 2i\lambda\,\mathfrak{P}^{(\varrho)'}\,\mathfrak{K} \pm 2i\,\mathfrak{P}^{(\varrho)'}\,\mathfrak{L} - \lambda^2\mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{K}^2 \\ &- 2\lambda\,\mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{L}^2 \pm i\lambda\,\mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{K}' \pm i\,\mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{L}'\}\,\mathfrak{S}.\end{aligned} \tag{11}$$

Führen wir (10) und (11) formal in (9) ein und setzen dann die Matrizenfunktionen der einzelnen Potenzen von λ gleich Null, so ergibt sich:

$$-\mathfrak{P}^{(0}\,\mathfrak{K}^2 + \mathfrak{R}\,\mathfrak{P}^{(0)} = 0,$$

$$\pm 2i\,\mathfrak{P}^{(0)'}\,\mathfrak{K} - \mathfrak{P}^{(1)}\,\mathfrak{K}^2 - 2\,\mathfrak{P}^{(0)}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L} \pm i\,\mathfrak{P}^{(0)}\,\mathfrak{K}' + \mathfrak{R}\,\mathfrak{P}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(0)}\,\mathfrak{P}^{(0)} = 0,$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{P}^{(0)''} \pm 2i\,\mathfrak{P}^{(1)'}\,\mathfrak{K} \pm 2i\,\mathfrak{P}^{(0)'}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(2)}\,\mathfrak{K}^2 - 2\,\mathfrak{P}^{(1)}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(0)}\,\mathfrak{L}^2 \pm i\,\mathfrak{P}^{(1)}\,\mathfrak{K}' \pm i\,\mathfrak{P}^{(0)}\,\mathfrak{L}' \\ &+ \mathfrak{R}\,\mathfrak{P}^{(2)} + \mathfrak{A}^{(0)}\,\mathfrak{P}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(1)}\,\mathfrak{P}^{(0)} = 0\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{P}^{(\varrho-2)''} \pm 2i\,\mathfrak{P}^{(\varrho-1)'}\,\mathfrak{K} \pm 2i\,\mathfrak{P}^{(\varrho-2)'}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(\varrho)}\,\mathfrak{K}^2 - 2\,\mathfrak{P}^{(\varrho-1)}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(\varrho-2)}\,\mathfrak{L}^2 \\ &\pm i\,\mathfrak{P}^{(\varrho-1)}\,\mathfrak{K}' \pm i\,\mathfrak{P}^{(\varrho-2)}\,\mathfrak{L}' + \mathfrak{R}\,\mathfrak{P}^{(\varrho)} + \sum_{\gamma=0}^{\varrho-1}\mathfrak{A}^{(\gamma)}\,\mathfrak{P}^{(\varrho-1-\gamma)} = 0.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird durch $k_\nu = r_\nu$ und $p^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ befriedigt. Die zweite Gleichung ergibt dann

$$p^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{a^{(0)}_{\mu\nu}\,p^{(0)}_{\nu\nu}}{r_\nu^2 - r_\mu^2}$$

für $\mu \neq \nu$ und für $\mu = \nu$:

$$p^{(0)'}_{\mu\mu} + \frac{\pm i k'_\mu - 2k_\mu l_\mu + a^{(0)}_{\mu\mu}}{\pm 2ik_\mu}\,p^{(0)}_{\mu\mu} = 0.$$

Hier setzen wir

$$l_\mu = \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}}{2k_\mu} = \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}}{2r_\mu}.$$

Dann ist

$$p_{\mu\mu}^{(0)} = \frac{c_\mu^{(0)}}{\sqrt{r_\mu}}.$$

So lassen sich sukzessive alle Elemente der Matrizen $\mathfrak{P}^{(\varrho)}(x)$ bestimmen. Die bei den Diagonalelementen auftretenden Integrationskonstanten seien fest gewählt, desgleichen die Zweige der mehrdeutigen Funktionen. Durch die beiden Vorzeichenmöglichkeiten erhalten wir so zwei formale Darstellungen der Gestalt (10). Da wir für die Stabilitätsuntersuchung $p_{\mu\mu}^{(1)}$ benötigen, wollen wir diese Funktionen noch berechnen. Dazu setzen wir

$$s_\mu(x) = \frac{1}{2r_\mu^2}\left(\frac{a_{\mu\mu}^{(0)} r_\mu'}{r_\mu} - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)\prime}}{2}\right)$$

und

$$t_\mu(x) = \frac{1}{2r_\mu}\left(\sum_{\varkappa \neq \mu} \frac{a_{\mu\varkappa}^{(0)} a_{\varkappa\mu}^{(0)}}{r_\mu^2 - r_\varkappa^2} - \frac{r_\mu''}{2r_\mu} + \frac{3r_\mu'^2}{4r_\mu^2} + a_{\mu\mu}^{(1)} - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)2}}{4r_\mu^2}\right).$$

Dann bestimmt sich $p_{\mu\mu}^{(1)}$ aus der Differentialgleichung

$$p_{\mu\mu}^{(1)\prime} + \frac{r_\mu'}{2r_\mu} p_{\mu\mu}^{(1)} = \frac{c_\mu^{(1)}}{\sqrt{r_\mu}} (s_\mu \pm i t_\mu).$$

Es ist also

$$p_{\mu\mu}^{(1)} = \frac{c_\mu^{(0)}}{\sqrt{r_\mu}}\left(c_\mu^{(1)} + \int_a^x (s_\mu(\xi) \pm i t_\mu(\xi))\, d\xi\right).$$

In dem formalen Ansatz (10) setzen wir jetzt $x = a$. Nach einem Satz von Herrn Perron[12]) existiert zu jeder formalen Reihe in $\frac{1}{\lambda}$ eine stetige Funktion, deren asymptotische Darstellung diese Reihe ist. Also gibt es eine Funktion $\mathfrak{W}(a, \lambda)$ von λ so, daß

$$\mathfrak{W}(a, \lambda) \sim \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \mathfrak{P}^{(\varrho)}(a)\, \mathfrak{S}(a, \lambda). \tag{12a}$$

Wir bilden formal die erste Ableitung von (10):

$$\mathfrak{y}' = \pm i\lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \mathfrak{P}^{(\varrho)}(x)\, \mathfrak{R}(x)\, \mathfrak{S}(x, \lambda) \pm i \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \mathfrak{P}^{(\varrho)}(x)\, \mathfrak{Q}(x)\, \mathfrak{S}(x, \lambda) + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \mathfrak{P}^{(\varrho)\prime}(x)\, \mathfrak{S}(x, \lambda).$$

[12]) [9]. II. S. 6.

Setzen wir wieder $x = a$, so gibt es eine Funktion $\mathfrak{W}^*(a, \lambda)$ von λ so, daß

$$(12\,b)\quad \mathfrak{W}^*(a,\lambda) \sim \pm i\lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho}\, \mathfrak{P}^{(\varrho)}(a)\, \mathfrak{K}(a)\, \mathfrak{S}(a,\lambda)$$

$$\pm i \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho}\, \mathfrak{P}^{(\varrho)}(a)\, \mathfrak{L}(a)\, \mathfrak{S}(a,\lambda) + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho}\, \mathfrak{P}^{(\varrho)'}(a)\, \mathfrak{S}(a,\lambda).$$

Wir wollen nun zeigen, daß (10) die asymptotische Darstellung derjenigen $2n$ Lösungsspalten ist, die durch die Anfangswerte $\mathfrak{W}(a, \lambda)$ und die Anfangsableitungen $\mathfrak{W}^*(a, \lambda)$ bestimmt sind. Zum Beweis transformieren wir unser System in ein System erster Ordnung mit Hilfe einer Methode, die Herr Perron[13]) auf eine Differentialgleichung n-ter Ordnung angewandt hat. Dazu schreiben wir (9) zunächst skalar:

$$(13)\qquad y''_{\mu r} + \lambda^2 r_\mu^2(x)\, y_{\mu r} + \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa}^{(\varrho)}(x)\, y_{\varkappa r} = 0.$$

Wir setzen jetzt

$$(14)\qquad \begin{aligned} y_{\mu r} &= z_{\mu r} + z_{\mu+n,r} \\ y'_{\mu r} &= i\lambda r_\mu (z_{\mu r} - z_{\mu+n,r}). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y''_{\mu r} &= i\lambda r'_\mu (z_{\mu r} - z_{\mu+n,r}) + i\lambda r_\mu (z'_{\mu r} - z'_{\mu+n,r}) \\ &= -\lambda^2 r_\mu^2 (z_{\mu r} + z_{\mu+n,r}) - \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa}^{(\varrho)} (z_{\varkappa r} + z_{\varkappa+n,r}). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$y'_{\mu r} = z'_{\mu r} + z'_{\mu+n,r} = i\lambda r_\mu (z_{\mu,r} - z_{\mu+n,r}).$$

Die beiden letzten Gleichungen sehen wir als System für $z'_{\mu r}$ und $z'_{\mu+n,r}$ an. Die Auflösung ist wegen $r_\mu \neq 0$ immer möglich und ergibt:

$$(15)\qquad \begin{aligned} z'_{\mu r} &= i\lambda r_\mu z_{\mu r} - \frac{r'_\mu}{2 r_\mu} (z_{\mu r} - z_{\mu+n,r}) \\ &\qquad + \frac{i}{2 r_\mu} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa}^{(\varrho)} (z_{\varkappa r} + z_{\varkappa+n,r}), \\ z'_{\mu+n,r} &= -i\lambda r_\mu z_{\mu+n,r} + \frac{r'_\mu}{2 r_\mu} (z_{\mu r} - z_{\mu+n,r}) \\ &\qquad - \frac{i}{2 r_\mu} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\varrho} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa}^{(\varrho)} (z_{\varkappa r} + z_{\varkappa+n,r}). \end{aligned}$$

Durch Umbenennung läßt sich immer erreichen, daß die Realteile der Faktoren von $\lambda z_{sr}\,(s = 1, \ldots, 2n)$ der Größe nach geordnet sind, wobei gleiche Realteile zugelassen sind. Einem Ausdruck (10), der formal (9) Genüge tut, entsprechen nun wegen (14) gewisse Ausdrücke $z_{11}, \ldots, z_{2n,2n}$, die (15) formal befriedigen. Umgekehrt entspricht jeder formalen Lösung von (15) auch eine formale Lösung von (9). Das System (15) hat genau

[13]) [9]. II. S. 26.

die Gestalt, für die Herr PERRON bewiesen hat[14]), daß diese formalen Lösungen zugleich asymptotische Darstellungen von Lösungen von (15) gleichmäßig in $a \leqq x \leqq a + 2\pi$ sind. Wegen der Zuordnung von (9) und (15) sind die zugehörigen Lösungen, die asymptotisch dargestellt werden, genau die, deren Anfangswerte $\mathfrak{W}(a, \lambda)$ und $\mathfrak{W}^*(a, \lambda)$ sind. Im nächsten Abschnitt muß aber noch gezeigt werden, daß die $2n$ Lösungsspalten, die durch $\mathfrak{W}(a, \lambda)$ und $\mathfrak{W}^*(a, \lambda)$ bestimmt sind, linear unabhängig sind.

4. Die Herleitung der Stabilitätsgleichung.

Im Abschnitt 2 haben wir die Sätze zusammengestellt, die wir zur Ableitung der Stabilitätsgleichung benötigen. Wir brauchen ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U}$, das der Bedingung (2) genügt. Dann müssen die Werte $f_{\mu\nu} = u_{\mu,\nu}(a + 2\pi)$ und $f_{\mu+n,\nu} = \frac{d\, u_{\mu\nu}(a + 2\pi)}{dx}$ bestimmt werden. Dazu gehen wir von (10) aus und betrachten die asymptotische Darstellung bis auf $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$:

$$(16)\quad \begin{aligned} y_{\mu\mu} &= \frac{1}{\sqrt{r_\mu}}\, e^{\pm i\lambda q_\mu(x,\lambda)}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\left(S_\mu^*(x) \pm i\, T_\mu^*(x)\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \text{ für } \mu = \nu \text{ und} \\ y_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{r_\nu}}\, e^{\pm i\lambda q\ (x,\lambda)}\left[\frac{h_{\mu\nu}(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \quad \text{für } \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(17)\quad \begin{cases} S_\mu^*(x) = \int_a^x s_\mu(\xi)\, d\xi, \quad T_\mu^*(x) = \int_a^x t_\mu(\xi)\, d\xi, \\ q\ (x,\lambda) = \int_a^x \left[r_\mu(\xi) + \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(\xi)}{2\lambda r_\mu(\xi)}\right] d\xi \text{ und} \\ h_{\mu\nu}(x) = \frac{a_{\mu\nu}^{(0)}(x)}{r_\nu^2(x) - r_\mu^2(x)}. \end{cases}$$

Weiter haben wir $c_\mu^{(0)} = 1$ gesetzt, was nur eine unwesentliche Normierung der Spalten von $\mathfrak{Y}$ bedeutet. Außerdem haben wir $c_\mu^{(1)} = 0$ festgelegt. Die Berechtigung dazu zeigen wir dadurch, daß es uns trotzdem gelingt, (16) in die Form $\mathfrak{U}$ linear zu transformieren. Damit wäre zugleich die lineare Unabhängigkeit der Lösungsspalten gezeigt. Es ist

$$(18)\quad S_\mu^*(a) = T_\mu^*(a) = q_\mu(a, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad h_{\mu\nu}(a) = h_{\mu\nu}(a + 2\pi).$$

Es wird zweckmäßig sein, folgende weitere Abkürzungen einzuführen:

$$(19)\quad \begin{aligned} &h_{\mu\nu}(a) = H_{\mu\nu}, \quad q_\mu(a + 2\pi, \lambda) = Q_\mu, \\ &S_\mu^*(a + 2\pi) = S_\mu, \quad T_\mu^*(a + 2\pi) = T_\mu, \quad \frac{1}{\sqrt{r_\mu(a)}} = \frac{1}{\sqrt{r_\mu(a + 2\pi)}} = R_\mu \\ &\text{und} \\ &i\, q_\mu'(a, \lambda) \mp \frac{r_\mu'(a)}{2\lambda r_\mu(a)} = P_{\mu\gamma} \text{ bei } \gamma = 1, 2. \end{aligned}$$

[14]) [9]. II. S. 18.

Wir machen also jetzt den Ansatz

$$\mathfrak{U} = \{\mathfrak{Y}^{(1)}\mathfrak{Y}^{(2)}\}\mathfrak{G}. \tag{20}$$

Dabei ist $\mathfrak{G}$ eine noch unbekannte konstante Matrix vom Typ $(2n, 2n)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_{\mu r} = \sum_{\varkappa \neq \mu} \frac{1}{\sqrt{r_\varkappa}} (e^{i\lambda q_\varkappa} g_{\varkappa r} + e^{-i\lambda q_\varkappa} g_{\varkappa+n,r}) \left[\frac{h_{\mu\varkappa}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \\ + \frac{1}{\sqrt{r_\mu}} \left[e^{i\lambda q_\mu} g_{\mu r}\left(1 + \frac{1}{\lambda}(S_\mu^* + iT_\mu^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right. \\ \left. + e^{-i\lambda q_\mu} g_{\mu+n,r}\left(1 + \frac{1}{\lambda}(S_\mu^* - iT_\mu^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_{\mu r} = \sum_{\varkappa \neq \mu} \frac{i q'_\varkappa}{\sqrt{r_\varkappa}} (e^{i\lambda q_\mu} g_{\varkappa r} - e^{-i\lambda q_\varkappa} g_{\varkappa+n,r})\left(h_{\mu\varkappa} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ - \frac{r'_\mu}{2 r_\mu^{3/2}} (e^{i\lambda q_\mu} g_{\mu r} + e^{-i\lambda q_\mu} g_{\mu+n,r})\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ + \frac{i\lambda q'_\mu}{\sqrt{r_\mu}}\left[e^{i\lambda q_\mu} g_{\mu r}\left(1 + \frac{1}{\lambda}(S_\mu^* + iT_\mu^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right. \\ \left. - e^{-i\lambda q_\mu} g_{\mu+n,r}\left(1 + \frac{1}{\lambda}(S_\mu^* - iT_\mu^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Die Forderung (2) ergibt bei Benutzung von (17), (18) und (19):

$$\sum_{\varkappa \neq \mu} R_\varkappa (g_{\varkappa r} + g_{\varkappa+n,r}) \frac{H_{\mu\varkappa}}{\lambda} + R_\mu (g_{\mu r} + g_{\mu+n,r}) = \delta_{\mu r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$\sum_{\varkappa \neq \mu} R_\varkappa (P_{\varkappa 1} g_{\varkappa r} - P_{\varkappa 2} g_{\varkappa+n,r}) H_{\mu\varkappa} + \lambda R_\mu (P_{\mu 1} g_{\mu r} - P_{\mu 2} g_{\mu+n,r}) = \delta_{\mu+n,r} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Setzen wir

$$G_{\mu r} = R_\mu (g_{\mu r} + g_{\mu+n,r})$$

und

$$\bar{G}_{\mu r} = \lambda R_\mu (P_{\mu 1} g_{\mu r} - P_{\mu 2} g_{\mu+n,r}),$$

so zerlegen wir unser lineares Gleichungssystem in zwei Teilsysteme, nämlich

$$\sum_{\varkappa \neq \mu} G_{\varkappa r} \frac{H_{\mu\varkappa}}{\lambda} + G_{\mu r} = \delta_{\mu r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

und

$$\sum_{\varkappa \neq \mu} \bar{G}_{\varkappa r} \frac{H_{\mu\varkappa}}{\lambda} + \bar{G}_{\mu r} = \delta_{\mu+n,r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Da die Koeffizienten der linken Seiten nicht von r abhängen, können die Systeme für jedes r gesondert gelöst werden. Die Koeffizientendeterminanten haben den Wert $1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Also sind alle

$$G_{\mu,\mu+n} = G_{\mu,\nu+n} = \bar{G}_{\mu\mu} = \bar{G}_{\mu\nu} = 0.$$

Weiter ist $G_{\mu\mu} = \bar{G}_{\mu,\mu+n} = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, $G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu,\nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ für $\mu \neq \nu$.

Dann bestimmen sich die $g_{\mu r}$ und $g_{\mu+n,r}$ aus Systemen linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, deren Koeffizientendeterminanten

den Wert $-\lambda R_\mu^2(P_{\mu 1}+P_{\mu 2}) = -2i\lambda - i\frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{r_\mu^2(a)}$ haben, für hinreichend großes λ also sicher nicht verschwinden. Daher ist

$$g_{\mu\nu} = \frac{\lambda G_{\mu\nu} P_{\mu 2} + \overline{G}_{\mu\nu}}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1}+P_{\mu 2})} \quad \text{und} \quad g_{\mu+n,\nu} = \frac{\lambda G_{\mu\nu} P_{\mu 1} - \overline{G}_{\mu\nu}}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1}+P_{\mu 2})}.$$

Setzen wir die Werte für die G und $\overline{G}$ ein, so erhalten wir:

$$g_{\mu\mu} = \frac{P_{\mu 2}}{R_\mu}\frac{1+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{P_{\mu 1}+P_{\mu 2}},\ g_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ g_{\mu+n,\mu} = \frac{P_{\mu 1}}{R_\mu}\frac{1+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{P_{\mu 1}+P_{\mu 2}},\ g_{\mu+n,\nu} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$g_{\mu,\mu+n} = -g_{\mu+n,\mu+n} = \frac{1+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1}+P_{\mu 2})},\ g_{\mu,\nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\ g_{\mu+n,\nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Jetzt sollen die Elemente von $\mathfrak{F}^{(2n)}$ bestimmt werden. Allgemein ist

$$u_{\mu\nu}(a+2\pi) = \sum_{\varkappa \neq \mu} R_\varkappa (e^{i\lambda Q_\varkappa} g_{\varkappa\nu} + e^{-i\lambda Q_\varkappa} g_{\varkappa+n,\nu})\left[\frac{H_{\mu\varkappa}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]$$
$$+ R_\mu\left[e^{i\lambda Q_\mu} g_{\mu\nu}\left(1+\frac{S_\mu + iT_\mu}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) + e^{-i\lambda Q_\mu} g_{\mu+n,\nu}\left(1+\frac{S_\mu - iT_\mu}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right],$$

$$u'_{\mu\nu}(a+2\pi) = \sum_{\varkappa \neq \mu} R_\varkappa (P_{\varkappa 1} e^{i\lambda Q_\varkappa} g_{\varkappa\nu} - P_{\varkappa 2} e^{-i\lambda Q_\varkappa} g_{\varkappa+n,\nu})\left(H_{\mu\varkappa}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$
$$+ \lambda R_\mu (P_{\mu 1} e^{i\lambda Q_\mu} g_{\mu\nu} - P_{\mu 2} e^{-i\lambda Q_\mu} g_{\mu+n,\nu})$$
$$+ i q'_\mu(a,\lambda) R_\mu\left[g_{\mu\nu}\left(S_\mu + iT_\mu O + \left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) e^{i\lambda Q_\mu} - g_{\mu+n,\nu}\left(S_\mu - iT_\mu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) e^{-i\lambda Q_\mu}\right].$$

Es ist

$$\frac{P_{\mu\nu}}{P_{\mu 1}+P_{\mu 2}} = \frac{i q'_\mu(a) \mp \frac{r'_\mu(a)}{2\lambda r_\mu(a)}}{2 i q'_\mu(a)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{r'_\mu(a)}{2i\lambda r_\mu(a) q'_\mu(a)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{r'_\mu(a)}{2i\lambda r_\mu^2(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right).$$

Damit ergibt sich:

$$u_{\mu\mu}(a+2\pi) = \cos\lambda Q_\mu + \frac{1}{\lambda}\left[S_\mu \cos\lambda Q_\mu + \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r_\mu^2(a)} - T_\mu\right)\sin\lambda Q_\mu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{\mu,\mu+n}(a+2\pi) = \frac{\sin\lambda Q_\mu}{\lambda r_\mu(a)} + \frac{1}{\lambda^2 r_\mu(a)}\left[\left(S_\mu - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{2r_\mu^2(a)}\right)\sin\lambda Q_\mu + T_\mu \cos\lambda Q_\mu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \tag{21}$$

$$u'_{\mu,\mu}(a+2\pi) = -\lambda r_\mu(a)\sin\lambda Q_\mu - r_\mu(a)\left[\left(S_\mu + \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{2r_\mu^2(a)}\right)\sin\lambda Q_\mu + T_\mu\cos\lambda Q_\mu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$u'_{\mu,\mu+n}(a+2\pi) = \cos\lambda Q_\mu + \frac{1}{\lambda}\left[S_\mu\cos\lambda Q_\mu - \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r_\mu^2(a)} + T_\mu\right)\sin\lambda Q_\mu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Weiter ist

$$u_{\mu\nu}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad u'_{\mu\nu}(a+2\pi) = O(1),$$

$$u_{\mu,\nu+n}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad u'_{\mu,\nu+n}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Damit können wir jetzt (5) bilden. Zunächst folgende Bezeichnungserklärungen: $\sum_{(\nu)} \prod^{(\nu)}$ bedeute die Summe über alle möglichen Produkte von $(n-\nu)$ Faktoren aus n möglichen Faktoren. $\prod^{(\nu)*}$ bedeute das Produkt von genau den ν Faktoren, deren Indizes in $\prod^{(\nu)}$ nicht auftreten. Unter Benutzung des LAPLACEschen Entwicklungssatzes erhalten wir dann folgendes Ergebnis:

Das System (8) *besitzt genau dann für alle x beschränkte Lösungen, wenn alle $2n$ Wurzeln σ der Gleichung*

$$(5\,a)\quad \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \sum_{(\nu)} \{\prod^{(\nu)} [u_{\nu\nu}(a+2\pi) - \sigma] \cdot [u'_{\nu,\nu+n}(a+2\pi) - \sigma] \times \prod^{(\nu)*} u_{\nu,\nu+n}(a+2\pi) \cdot u'_{\nu\nu}(a+2\pi)\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

den Betrag eins haben, ohne daß $\sigma = \pm 1$ gilt.

Spezialisiert man sich auf *bzgl. $x = a$ gerade Matrizen* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{A}$, so ergibt sich

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left\{\cos\lambda Q_\mu + \frac{1}{\lambda}\left[S_\mu \cos\lambda Q_\mu + \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r^2_\mu(a)} - T_\mu\right)\sin\lambda Q_\mu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \cos 2\pi\tau_\mu\right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

oder

$$\cos 2\pi\tau_\nu = \cos\lambda Q_\nu + \frac{1}{\lambda}\left[S_\nu \cos\lambda Q_\nu + \left(\frac{r'_\nu(a)}{2r^2_\nu(a)} - T_\nu\right)\sin\lambda Q_\nu\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (\nu = 1 \ldots n).$$

Damit erhalten wir:

Sind die Matrizen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ bzgl. $x = a$ gerade, so ist das System (8) *stabil, falls alle n rechten Seiten der „Stabilitätsgleichung"*

$$\cos 2\pi\tau_\nu = \cos\left\{\int_a^{a+2\pi} \left[\lambda r_\nu(\xi) + \frac{a^{(0)}_{\nu\nu}(\xi)}{2r_\nu(\xi)}\right] d\xi\right\}\left\{1 + \frac{1}{2\lambda}\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a^{(0)}_{\nu\nu}(\xi)\, r'_\nu(\xi)}{r^3_\nu(\xi)} - \frac{a^{(0)\prime}_{\nu\nu}(\xi)}{2r^2_\nu(\xi)}\right] d\xi\right\}$$

$$(22)\qquad + \frac{1}{\lambda}\sin\left\{\int_a^{a+2\pi}\left[\lambda r_\nu(\xi) + \frac{a^{(0)}_{\nu\nu}(\xi)}{2r_\nu(\xi)}\right] d\xi\right\}\left\{\frac{r'_\nu(a)}{2r^2_\nu(a)} - \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi}\left[\sum_{\varkappa\neq\nu} \frac{a^{(0)}_{\nu\varkappa}(\xi)\, a^{(0)}_{\varkappa\nu}(\xi)}{r^2_\nu(\xi) - r^2_\varkappa(\xi)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{r''_\nu(\xi)}{2r_\nu(\xi)} + \frac{3r'^2_\nu(\xi)}{4r^2_\nu(\xi)} + a^{(1)}_{\nu\nu}(\xi) - \frac{a^{(0)2}_{\nu\nu}(\xi)}{4r^2_\nu(\xi)}\right] \frac{d\xi}{r_\nu(\xi)}\right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

dem Betrage nach kleiner eins, verschieden und reell sind.

5. Diskussion der Stabilitätsgleichung.

Aus der Stabilitätsgleichung (5a) bzw. (22) kann man ablesen, wann bei gegebenem Parameter das System (8) nur beschränkte und wann es zum Teil auch unbeschränkte Lösungen besitzt. Wie aus (4) und (7) folgt, liegt genau dann Stabilität vor, wenn die rechten Seiten aller n Gleichungen (22) reell, verschieden und dem Betrage nach kleiner eins sind.

Wir wollen nur den Fall diskutieren, daß die *Matrizen* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{A}$ *reell* sind. Zunächst soll gezeigt werden, daß für hinreichend große λ sicher nie Stabilität vorliegt, wenn auch nur ein Element $r_\mu^2(x)$ der Matrix $\mathfrak{R}$ negativ ist. Dann ergibt sich nämlich aus (22):

$$\cos 2\pi\tau_\mu = \mathfrak{Cof}\,\lambda \int_a^{a+2\pi} \left[|r_\mu(\xi)| - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(\xi)}{2\lambda\,|r_\mu(\xi)|}\right] d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \begin{matrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{matrix}\left\{\lambda \int_a^{a+2\pi} |r_\mu(\xi)|\, d\xi\right\}.$$

Für hinreichend große λ ist die rechte Seite sicher größer als eins. Für große λ erhalten wir also höchstens dann nur stabile Lösungen, wenn alle n Funktionen $r_\mu^2(x)$ positiv sind. Daher kann für die weiteren Untersuchungen $\arg r_\mu(x) = 0$ vorausgesetzt werden.

Ehe wir die eigentliche Diskussion beginnen, sei folgende Bemerkung eingeschoben: In (6) haben wir für reelle gerade $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ und positive $r_\mu^2(x)$ eine algebraische Gleichung n-ten Grades vor uns, die nach (22) abgesehen von mit wachsendem λ klein werdenden Fehlern n verschiedene reelle Lösungen besitzt. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von den Koeffizienten der Gleichung folgt daraus, — da keine reellen mehrfachen Wurzeln auftreten — daß für hinreichend große λ auch die exakten Wurzeln reell und verschieden sind. Es kann also für hinreichend große λ nicht der Fall eintreten, daß $\cos 2\pi\tau_\nu$ einen Realteil dem Betrage nach kleiner eins und einen nichtverschwindenden Imaginärteil hat. Diese Instabilitätsform nennt Herr Mettler „Instabilität zweiter Art". — Weiter berücksichtige man bei allen weiteren Schlüssen, daß die Bestimmung der Randpunkte von Instabilitätsintervallen immer Fehler von der Größenordnung $1/\lambda^{3/2}$ enthalten kann.

Im weiteren sehen wir λ als veränderlich an. Wir setzen

$$(23) \qquad m_\nu = \int_0^{2\pi} r_\nu(\xi)\, d\xi, \quad n_\nu = \int_0^{2\pi} \frac{a_{\nu\nu}^{(0)}(\xi)}{2r_\nu(\xi)}\, d\xi, \quad U_\nu = \frac{r_\nu'(a)}{2r_\nu^2(a)} - \frac{1}{4}T_\nu.$$

Dann erhält (22) die Form

$$(22)' \quad \cos 2\pi\tau_\nu = \cos(\lambda m_\nu + n_\nu)\left(1 + \frac{S_\nu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} U_\nu \sin(\lambda m_\nu + n_\nu) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Wir setzen weiter

$$(24) \qquad \lambda m_\mu + n_\mu = 2\pi(D_{\mu\gamma} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\gamma} + \xi_{\mu\gamma}).$$

Dabei ist $D_{\mu\gamma}$ eine positive ganze Zahl und $\eta_{\mu\gamma} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$, so daß $-\frac{1}{4} < \xi_{\mu\gamma} \leqq +\frac{1}{4}$ bestimmt werden kann. Zu jedem λ lassen sich diese drei Größen dann eindeutig bestimmen. Durchläuft λ ein gewisses Intervall, so ergibt sich eine Anzahl ($\gamma = 1, 2, \ldots$) solcher Tripel. $D_{\mu\gamma}$, $\eta_{\mu\gamma}$ sind dann Konstante, während $\xi_{\mu\gamma}$ eine in λ stückweise stetige Funktion ist. Damit erhält (22)′ die Gestalt:

$$(22)'' \quad \cos 2\pi\tau_\mu = (-1)^{\eta_{\mu\gamma}}\left[\cos 2\pi\xi_{\mu\gamma}\left(1 + \frac{S_\mu}{\lambda}\right) + \frac{U_\mu}{\lambda}\sin 2\pi\xi_{\mu\gamma}\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Wir wollen jetzt die Nullstellen der Funktion

$$Z_\mu(\xi) = 1 - \cos 2\pi\xi_{\mu\gamma}\left(1 + \frac{S_\mu}{\lambda(\xi)}\right) - \frac{U_\mu}{\lambda(\xi)}\sin 2\pi\xi_{\mu\gamma}$$

näherungsweise bestimmen. Diese Nullstellen entsprechen den Grenzpunkten zwischen stabilen und instabilen Intervallen. Für $Z_\mu > 0$ ist $|\cos 2\pi\tau_\mu| < 1$, für $Z_\mu < 0$ ist $|\cos 2\pi\tau_\mu| > 1$.

Zunächst soll der Ausnahmefall $S_\mu = 0$ diskutiert werden:

$$\int_a^{a+2\pi}\left(\frac{a_{\mu\mu}^{(0)}\,r'_\mu}{r_\mu^3} - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)\prime}}{2\,r_\mu^2}\right)d\xi = 0.$$

Dieser Fall tritt etwa auf, wenn bei $r_\mu = \text{const.}$ der Mittelwert von $a_{\mu\mu}^{(0)\prime}$ verschwindet oder $r_\mu = \sqrt{a_{\mu\mu}^{(0)}}$ ist. Dann ist $\xi_{\mu\gamma} = 0$ eine Nullstelle von Z_μ. In diesem Fall ist

$$\left.\frac{dZ_\mu}{d\xi_{\mu\gamma}}\right|_{\xi_{\mu\gamma}=0} = -\frac{2\pi}{\lambda}U_\mu \quad \text{und} \quad \left.\frac{d^2Z}{d\xi_{\mu\gamma}^2}\right|_{\xi_{\mu\gamma}=0} = 4\pi^2\left(1 - \frac{2\,U_\mu}{\lambda^2 m_\mu}\right).$$

Die zweite Ableitung ist also für hinreichend große λ immer positiv. Für $U_\mu = 0$ ist daher $\xi_{\mu\gamma} = 0$ ein labiler Punkt innerhalb eines Stabilitätsintervalles. Für $U_\mu \neq 0$ ergibt sich ein γ-tes Instabilitätsintervall, dessen einer Eckpunkt $\xi_{\mu\gamma} = 0$ ist. Für sign $U_\mu = +1$ ist dieser Eckpunkt (im Sinne wachsender λ, also auch wachsender $\xi_{\mu\gamma}$) Anfangspunkt, für sign $U_\mu = -1$ Endpunkt. Der andere Eckpunkt ergibt sich näherungsweise aus $\frac{Z_\mu}{\sin 2\pi\xi_{\mu\gamma}} = \operatorname{tg}\pi\xi_{\mu\gamma} - \frac{U_\mu}{\lambda} \approx \pi\xi_{\mu\gamma} - \frac{U_\mu}{\lambda} = 0$ zu $\xi_{\mu\gamma} \approx \frac{U_\mu m_\mu}{2\pi^2}\,\frac{1}{D_{\mu\gamma} + \frac{\eta_{\mu\gamma}}{2} - \frac{n_\mu}{2\pi}}$. Da $D_{\mu\gamma}$ die Größenordnung von λ hat, haben die Instabilitätsintervalle die Größenordnung $\frac{1}{\lambda}$. Sie werden also mit wachsendem λ schmaler.

Im weiteren werde $S_\mu \neq 0$ vorausgesetzt. An Stelle der Nullstellen von Z_μ können wir auch die Nullstellen von λZ_μ suchen. Die Intervall-

grenzen sind dann näherungsweise die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2\pi^2(m_\mu S_\mu + 2\pi D_{\mu\gamma} + \pi\eta_{\mu\gamma} - n_\mu)\,\xi_{\mu\gamma}^2 - 2\pi m_\mu U_\mu \xi_{\mu\gamma} - m_\mu S_\mu = 0:$$

$$\xi_{\mu\gamma} = \frac{m_\mu U_\mu}{2\pi(2\pi D_{\mu\gamma} + \pi\eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)}$$

$$\pm \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m_\mu S_\mu}{2(2\pi D_{\mu\gamma} + \pi\eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)}}\left[1 + \frac{m_\mu U_\mu^2}{4 S_\mu(2\pi D_{\mu\gamma} + \pi\eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)}\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Nun ist $Z_\mu(0) = -\frac{S_\mu}{\lambda}$. Ist sign $S_\mu = -1$, so sind die Wurzeln komplex. Man sieht in diesem Fall auch an $Z_\mu(\xi)$ direkt, daß dann *immer* Stabilität herrscht. Für sign $S_\mu = +1$ ergeben sich Instabilitätsintervalle von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, die den Punkt $\xi_{\mu\gamma} = 0$ enthalten. Wir wollen das Diskussionsergebnis zusammenfassen:

Die einzelne Stabilitätsgleichung (22) gibt immer Anlaß zur Stabilität, wenn das zugehörige $S_\mu < 0$ ist. Ist $S_\mu \geqq 0$, so ergeben sich mit wachsendem λ eine Folge von Instabilitätsintervallen, deren Breite für $S_\mu = 0$ mit $\frac{1}{\lambda}$, für $S_\mu > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ abnimmt. Bei $S_\mu = 0$ gibt das Zeichen von U_μ an, ob das Intervall sich von rechts oder von links an $\xi_{\mu\gamma} = 0$ anschließt. Ist auch $U_\mu = 0$, so ergibt sich ein labiler Punkt in einem Stabilitatsbereich. Nachdem wir uns so die Struktur der Instabilitätsbereiche für eine einzelne Gleichung (22) klargemacht haben, folgt für die Stabilität des Differentialgleichungssystem (8):

Bei gegebenem λ ist (8) nur dann stabil, wenn *alle* n zugehörigen $\xi_{\mu\gamma}(\mu = 1 \ldots n)$ außerhalb der Instabilitätsintervalle liegen. Labilität liegt vor, wenn bei Betrachtung *aller* n Größen $\xi_{\mu\gamma}$ mindestens eine in einem Eckpunkt eines Instabilitätsintervalles liegt oder die zugehörigen Werte $S_\mu = U_\mu = 0$ sind, die übrigen $\xi_{\mu\gamma}$ aber außerhalb der Instabilitätsintervalle liegen. In jedem anderen Falle ist (8) instabil.

Man kann auch die Abhängigkeit der Lösungen von anderen Parametern α, β untersuchen, wenn man $\mathfrak{A}^{(0)}(x) = \alpha\mathfrak{B}^{(0)}(x)$ oder $\mathfrak{A}^{(1)} = \beta\mathfrak{B}^{(1)}(x)$ setzt. Die Abhängigkeit der Lösungen von α ist sehr ähnlich der Abhängigkeit von λ, während ein variables β nur sehr geringfügig wegen $U_\mu = U_\mu(\beta)$ die Lage der Eckpunkte der Instabilitätsintervalle beeinflußt.

Zum Schluß sei es mir noch gestattet, Herrn Prof. Dr. H. Schmidt für wertvolle Hinweise zu danken, durch die er das Entstehen der Arbeit gefördert hat.

Literaturverzeichnis.

Birkhoff, G. D. and Langer, R. E.

[1] The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order. Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sc. **58**, 51—128 (1922/23).

Borg, G.

[2] Bounded solutions of a system of differential equations. Ark. Mat. Astron. Fysik B **34**, Nr. 24 (1948).

Cesari, L.

[3] Sulla stabilita delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coeffizienti periodici. Atti Accad. Italia. Mem. (6) **11**, 633—695 (1940).

Jeffreys, H.

[4] Asymptotic solutions of linear differential equations. Phil. Mag. VII. s. **33**, 451—456 (1942).

Langer, R. E.

[5] The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **46**, 151—190 (1939).

[6] The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 461—490 (1949).

Mettler, E.

[7] Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing. Arch. **17**. 418—449 (1949).

Newell, H. E. Jr.

[8] The asymptotic forms of the solutions of an ordinary linear matrix differential equation in the complex domain. Duke Math. J. **9**. 245—258 (1942). **10**, 705—709 (1943).

Perron, O.

[9] Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Heidelberg (1918/19), I—III.

Schmeidler, W.

[10] Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendung in Physik und Technik. Akad. Verlag Berlin (1949), 158 S.

Seifert, H.

[11] Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen. Math. Zeitschr. **48**, 173—192 (1942).

(Eingegangen am 9. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 80—83 (1952).

Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl.

Von

Claus Müller in Bonn.

Unter dem Titel „Kapazität von Strahlungsfeldern" untersuchte Herr Weyl kürzlich [1]) das Außenraumproblem der Schwingungsgleichung

$$\Delta U + k^2 U = 0. \tag{1}$$

Die vorliegende Mitteilung liefert einen vereinfachten Beweis des Existenzsatzes ohne Benutzung der Theorie der Elementarteiler höheren Grades für lineare Integralgleichungen.

Wir benutzen die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Arbeit von Herrn Weyl und nehmen an, daß der dreidimensionale Euklidische Raum in das „Innere" V und das „Äußere" W zerfällt. Ihre gemeinsame Grenze heiße Ω und bestehe aus einer oder mehreren glatten Flächen. Das Gebiet V sei beschränkt und das Gebiet W zusammenhängend.

Gesucht ist eine Funktion U, die in W der Schwingungsgleichung (1) sowie den Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial U}{\partial n} + ikU\right) = 0 \tag{2}$$

gleichmäßig für alle Richtungen genügt und auf Ω vorgegebene Werte annimmt.

Der Ansatz

$$U(p) = \int_{\Omega} \mu(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s')\, ds'; \quad Q(p, p') = \frac{1}{2\pi r} e^{-ikr} \tag{3}$$

führt auf die Integralgleichung

$$\mu(s) + \int_{\Omega} K(s, s')\, \mu(s')\, ds' = \gamma(s); \quad K(s, s') = \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(s, s'), \tag{4}$$

die wir symbolisch in der Form

$$(E + K)\,\mu = \gamma \tag{5}$$

schreiben. Die Existenz nicht-trivialer Lösungen der homogenen Gleichung erfordert zusätzliche Betrachtungen. Wir bezeichnen mit

[1]) H. Weyl: Math. Zeitschr. 55, 187—198 (1952). Herr Weyl unterrichtete mich freundlicherweise vor Erscheinen seiner Arbeit über deren Inhalt.

Φ und H die Gesamtheit der Lösungen der zueinander transponierten Integralgleichungen

$$(6) \qquad (E+K)\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \eta(E+K) = 0.$$

Zum Studium der Beziehungen zwischen Φ und H untersuchen wir die Funktionen

$$(7) \qquad U_1(p) = \int_{\Omega} \varphi(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s')\, ds'; \quad U_2(p) = \int_{\Omega} \eta(s')\, Q(p, s')\, ds'.$$

Dann besagt (6), daß $U_1(p)$ an der Außenseite von $\mathfrak{Q}$ verschwindet. In W ist dann auf Grund des Eindeutigkeitssatzes $U_1(p) = 0$. Es ist somit

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0 \text{ an der Außenseite von } \mathfrak{Q},$$

während sich aus den Sprungrelationen

$$(\mathrm{II}) \qquad U_1 = -2\varphi \text{ an der Innenseite von } \mathfrak{Q}$$

ergibt. Für U_2 erhalten wir ebenfalls nach (6)

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{\partial U_2}{\partial n} = 0 \text{ an der Innenseite von } \mathfrak{Q}$$

und es folgt aus den Sprungrelationen wiederum

$$(\mathrm{IV}) \qquad \frac{\partial U_2}{\partial n} = -2\eta \text{ an der Außenseite von } \mathfrak{Q}.$$

Aus (III) entnehmen wir mit Hilfe der Greenschen Formel, daß die Randwerte von U_2 zu Φ gehören, und beweisen nun

Lemma 1. *Durch* $M\eta = \int_{\Omega} \eta(s')\, Q(s, s')\, ds'$ *wird* H *umkehrbar eindeutig auf* Φ *abgebildet.*

Da nämlich U_2 beim Durchgang durch $\mathfrak{Q}$ stetig ist, würde aus dem Verschwinden der Randwerte von U_2 nach dem Eindeutigkeitssatz folgen, daß U_2 in W identisch verschwindet. Dann ist aber an der Außenseite von $\mathfrak{Q}$ $\frac{\partial U_2}{\partial n} = 0$, so daß aus (IV) $\eta = 0$ folgt.

Zu jedem $\varphi \in \Phi$ gibt es daher ein U_2 mit der Eigenschaft (III) so, daß auf $\mathfrak{Q}$ $U_2 = \varphi$ ist. Aus der Greenschen Formel mit $Q(p, p')$ oder $\overline{Q(p, p')}$ einerseits und U_2 andererseits folgt für p auf $\mathfrak{Q}$

Lemma 2. *Es ist* $(E+K)\varphi = (E+\overline{K})\varphi$, *so daß mit* φ *auch* $\overline{\varphi}$ *zu* Φ *gehört.*

Wir beweisen nun

Lemma 3. *Für* $\eta \in \mathsf{H}$ *ist*

$$\mathrm{Im}\,(\eta, \overline{M}\overline{\eta}) \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\eta = 0$ gilt.

Es sei nämlich K_R das Innere der Kugel vom Radius R um den beliebigen, fest gewählten Punkt O. Mit Σ_R bezeichnen wir die Randfläche dieser Kugel und nehmen an, daß R so groß gewählt wurde.

daß K_R das beschränkte Gebiet V ganz enthält. Dann wird nach der Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} \left(U_2 \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial n} - \overline{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds = \int_{\Sigma_R} \left(U_2 \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial n} - \overline{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds. \tag{8}$$

Wegen (IV) ist die linke Seite gleich

$$2\,[(\eta, \overline{M}\,\overline{\eta}) - (\overline{\eta}, M\eta)] = 4\,i\,\mathrm{Im}\,(\eta, \overline{M}\,\overline{\eta}), \tag{9}$$

während sich auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen für $R \to \infty$

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_{\Sigma_R} \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} + ikU_2 \right) \left(\frac{\partial \overline{U}_2}{\partial n} - ik\overline{U}_2 \right) ds \\ &= \int_{\Sigma_R} \left(k^2 |U_2|^2 + \left| \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|^2 \right) ds + ik \int_{\Sigma_R} \left(U_2 \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial n} - \overline{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \tag{10}$$

ergibt. So finden wir mit (8) und (9)

$$4\,\mathrm{Im}\,(\eta, \overline{M}\,\overline{\eta}) = \int_{\Sigma_R} \left(k|U_2|^2 + k^{-1} \left| \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|^2 \right) ds + o(1) \tag{11}$$

und erhalten

$$\mathrm{Im}\,(\eta, \overline{M}\,\overline{\eta}) \geqq 0, \tag{12}$$

wobei aus $\mathrm{Im}\,(\eta, \overline{M}\,\overline{\eta}) = 0$ nach einem Satz von Rellich[2]) $U_2 = 0$ in W und somit nach (IV) $\eta = 0$ folgt.

Ist η_i eine Basis von H, so stellt nach Lemma 1 auch $\varphi_i = M\eta_i$ eine Basis von Φ dar. Die Matrix

$$C_{ik} = (\varphi_i, \eta_k) = (M\eta_i, \eta_k) \tag{13}$$

bezeichnen wir als Kapazitätsmatrix. Setzen wir

$$U_{2,i}(p) = \int_{\Omega} \eta_i(s')\, Q(p, s')\, ds', \tag{14}$$

so ist an der Außenseite von Ω

$$U_{2,i}(p) = M\eta_i; \quad \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} = -2\,\eta_i. \tag{15}$$

Mit den Bezeichnungen von (8) folgt dann aus der Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds = \int_{\Sigma_R} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds. \tag{16}$$

Da die Funktionen $U_{2,i}$ auf Grund ihrer Darstellung (14) gleichmäßig für alle Richtungen der Abschätzung

$$U_{2,i} = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{17}$$

[2]) F. Rellich, Jahresber. d. D. M. V. **53**, 57—65 (1943).

genügen, erhalten wir mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingungen für große R

$$\int_{\Sigma_R} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds = o(1) \tag{18}$$

und es folgt aus (15) und (16) die Symmetrie der Kapazitätsmatrix (13).

Wir beweisen nun

Lemma 5. *Die Kapazitätsmatrix ist nicht entartet.*

Wäre nämlich $\det |c_{ik}| = 0$, so gäbe es ein nicht triviales $\eta^* \in \mathsf{H}$ so, daß für alle $\varphi \in \Phi$

$$(\varphi, \eta^*) = 0 \tag{19}$$

ist. Da nach Lemma 1 und Lemma 2 auch $\bar{M}\bar{\eta}^*$ zu Φ gehört, folgte aus (19)

$$\mathrm{Im}\,(\bar{M}\bar{\eta}^*, \eta^*) = 0. \tag{20}$$

Nach Lemma 3 ist dies aber nur für $\eta^* = 0$ möglich, so daß $\det |c_{ik}| \neq 0$ ist.

Diese Vorbereitungen ermöglichen uns nun den Beweis des Existenzsatzes für das Außenraumproblem.

Satz. *Zu auf $\mathfrak{Q}$ beliebig vorgegebenen stetigen Randwerten γ gibt es stets eine Lösung U der Schwingungsgleichung, die den Ausstrahlungsbedingungen genügt und auf $\mathfrak{Q}$ die Werte γ annimmt.*

Zum Beweise bestimmen wir zunächst zu γ die eindeutig festgelegte Funktion η^* aus H durch die Bedingung

$$(\eta, \gamma - \eta^*) = 0 \qquad \text{für alle } \eta \in \mathsf{H}. \tag{21}$$

Da die Kapazitätsmatrix nicht entartet ist, können wir zu η^* eindeutig ein $\varphi^* \in \Phi$ mit

$$(\eta, \eta^* - \varphi^*) = 0 \qquad \text{für alle } \eta \in \mathsf{H} \tag{22}$$

bestimmen. Für dieses φ^* ist dann also auch

$$(\eta, \gamma - \varphi^*) = 0 \qquad \text{für alle } \eta \in \mathsf{H}. \tag{23}$$

Die Lösungen μ und η' der Gleichungen

$$(E + K)\mu = \gamma - \varphi^*; \quad (\mu, \varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \Phi \tag{24}$$

und

$$\varphi^* = M\eta' \tag{25}$$

liefern dann die gesuchte Funktion U in der Form

$$U(p) = \int_{\mathfrak{Q}} \mu(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s')\, ds' + \int_{\mathfrak{Q}} \eta'(s')\, Q(p, s')\, ds'. \tag{26}$$

Ich möchte Herrn Weyl für eine Anregung zur Verbesserung der Beweisanordnung herzlich danken.

(Eingegangen am 15. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 84—93 (1952).

On Laplace Transform.

By

S. K. Bose in Lucknow, India.

1. 1. If $\varphi(p)$ and $f(x)$ are related by the integral equation

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \tag{1}$$

then $\varphi(p)$ is said to be the *image* of $f(x)$ and $f(x)$ the *original* of $\varphi(p)$, the transform is known as *Laplace transform* and symbolically denoted as

$$\varphi(p) \doteqdot f(x).$$

The object of this paper is to establish some new properties of this transform by using a sequence of Laplace transforms. In fact, I have extended the result of Goldstein ([3], p. 105). The main results are given in the form of theorems. A few particular cases have been derived and they have been illustrated by examples.

2. 1. Theorem I. *If*

$$\varphi_1(p) \doteqdot f_1(t),$$
$$\varphi_2(p) \doteqdot t f_2(t),$$

and

$$\varphi_3(p) \doteqdot f_3(t)$$

then, provided the integrals converge[1]) *and the Laplace transforms of* $|f_1(t)|$, $|f_2(t)\,\varphi_3(t)|$, $|t f_2(t)|$ *and* $|f_3(t)|$ *exist,*

$$\int_0^\infty \varphi_1(u)\,\varphi_3(u)\, f_3(u)\,\frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v)\, F(v)\,\frac{dv}{v} \tag{1}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty f_3(z)\,(v+z)^{-1}\,\varphi_2(v+z)\, dz.$$

Proof. We have

$$\frac{1}{u}\,\varphi_1(u) = \int_0^\infty e^{-uv} f_1(v)\, dv. \tag{2}$$

[1]) By this we would mean absolute convergence throughout this paper.

Multiplying (2) by $\varphi_2(u) f_2(u)$ and integrating with respect to u from *zero* to *infinity*, we get

$$\int_0^\infty \varphi_1(u)\,\varphi_2(u) f(u)\,\frac{du}{u} = \int_0^\infty \varphi_2(u) f_2(u) \left[\int_0^\infty e^{-uv} f_1(v)\,dv\right] du$$

$$= \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty e^{-uv} f_2(u) \left\{u \int_0^\infty e^{-uz} f_3(z)\,dz\right\} du\right] dv \tag{3}$$

$$= \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty f_3(z) \left\{\int_0^\infty e^{-u(v+z)}\, u f_2(u)\,du\right\} dz\right] dv \tag{4}$$

$$= \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty f_3(z)\,(v+z)^{-1}\,\varphi_2(v+z)\,dz\right] dv$$

$$= \int_0^\infty f_1(v)\,F(v)\,\frac{dv}{v}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty f_3(z)\,(v+z)^{-1}\,\varphi_2(v+z)\,dz.$$

The change of order of integration in (3) can be justified by DE LA VALLÉE POUSSIN'S theorem ([2], p. 456), if u-integral and v-integral are absolutely convergent and the repeated integral

$$\int_0^\infty \varphi_2(u) f_2(u) \left[\int_0^\infty e^{-uv} f_1(v)\,dv\right] du$$

is absolutely convergent. Similarly, in (4), if z-integral and u-integral are absolutely convergent and

$$\int_0^\infty f_3(z)\,(v+z)^{-1}\,\varphi_2(v+z)\,dz$$

is absolutely convergent.

2.2. Particular Cases.

Case I. If $f = \varphi_2 = 1$, then the theorem reduces to

$$\int_0^\infty \varphi_1(u) f_2(u)\,\frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v)\,F(v)\,\frac{dv}{v} \tag{1}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty \frac{\varphi_2(v+z)}{v+z}\,dz$$

provided the integrals converge and the LAPLACE transforms of $|f_1(t)|$ and $|f_2(t)|$ exist.

(i) If we take ([4], p. 16)

$$t f_3(t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{q^2}{4t}} \doteqdot \sqrt{\pi p}\, e^{-q\sqrt{p}}, \qquad \Re(p) > 0,$$

then

$$\frac{1}{v} F(v) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty (v+z)^{-\frac{1}{2}} e^{-q\sqrt{(v+z)}}\, dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{q} e^{-q\sqrt{v}}, \quad \Re(q) > 0.$$

We obtain from (1)

$$(2) \qquad \int_0^\infty \varphi_1(u)\, e^{-\frac{q^2}{4u}} u^{-\frac{5}{2}}\, du = \frac{2\sqrt{\pi}}{q} \int_0^\infty f_1(v)\, e^{-q\sqrt{v}}\, dv = \frac{4\sqrt{\pi}}{q^2} \varphi(q),$$

where

$$\varphi(q) \doteqdot t f_1(t^2)$$

provided $\Re(q) > 0$ and the integrals converge.

(ii) If ([4], p. 16)

$$t f_3(t) = t^{\nu-1} e^{-qt} \doteqdot \frac{\Gamma(\nu) p}{(p+q)^\nu}, \quad \Re(\nu) > 0 \text{ and } \Re(p) > 0$$

then

$$\frac{1}{v} F(v) = \Gamma(\nu) \int_0^\infty (v+z+q)^{-\nu}\, dz = \frac{\Gamma(\nu)}{\nu - 1} (v+q)^{-\nu+1}, \quad \Re(\nu) > 1.$$

Hence (1) reduces to

$$(3) \qquad \int_0^\infty f_1(v)\, (v+q)^{-\nu+1}\, dv = \frac{(\nu-1)}{q\,\Gamma(\nu)} \psi(q)$$

where

$$\psi(q) \doteqdot u^{\nu-3} \varphi_1(u),$$

provided $\Re(\nu) > 1$, $\Re(q) > 0$ and the integrals in (3) converge.

Case II. If $f_1 = f_3$, then $\varphi_1 = \varphi_3$ and the theorem reduces to

$$(4) \qquad \int_0^\infty \{\varphi_1(u)\}^2 f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v) F(v) \frac{dv}{v}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty f_1(z)\, (v+z)^{-1} \varphi_3(v+z)\, dz,$$

provided the integrals converge and the LAPLACE transforms of $|f_3(t)\, \varphi_1(t)|$, $|f_1(t)|$ and $|t f_2(t)|$ exist.

(i) If ([4], p. 20)

$$f_1(t) = \sin(2\sqrt{qt}) \doteqdot \sqrt{\frac{q\pi}{p}}\, e^{-\frac{q}{p}}, \qquad \Re(p) > 0,$$

then, from (4) after little simplification, we obtain

$$(5)\qquad \int_0^\infty v^{-1}\sin(2\sqrt{qv})\,F(v)\,dv = \frac{q\pi}{2}\int_0^\infty e^{-qt} f_2\left(\frac{2}{t}\right)dt = \frac{\pi}{2}\psi_1(q),$$

where

$$\psi_1(q) \doteqdot f_2\left(\frac{2}{t}\right)$$

and

$$\frac{1}{v}F(v) = \int_0^\infty \sin(2\sqrt{qz})\,(v+z)^{-1}\varphi_2(v+z)\,dz,$$

provided the integrals converge.

2.3. Examples.

(1) If ([4], p. 14)

$$f_1(t) = \frac{1}{1+t}$$

then

$$f_1(t) \doteqdot p^{\frac{1}{2}} e^{\frac{p}{2}} W_{-\frac{1}{2},0}(p), \qquad \Re(p) > 0.$$

Also ([4], p. 14)

$$t f_1(t^2) = \frac{t}{1+t^2} \doteqdot -p[\cos p\,\mathrm{ci}(p) + \sin p\,\mathrm{si}(p)], \qquad \Re(p) > 0.$$

Hence from § 2.2 (2), we get

$$(1)\qquad \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{u}{2}-\frac{q^2}{4u}} W_{-\frac{1}{2},0}(u)\,du = -\frac{4\sqrt{\pi}}{q}[\cos q\,\mathrm{ci}(q) + \sin q\,\mathrm{si}(q)], \qquad \Re(q) > 0.$$

(2) If

$$f_1(t) = \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

then from § 2.2 (2), we get

$$(2)\qquad \int_0^\infty u^{-\frac{9}{2}} e^{\frac{u}{2}-\frac{q^2}{4u}} W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(u)\,du = \frac{4\sqrt{\pi}}{q^2}\left[\frac{\pi q}{2}\{H_1(q) - Y_1(q)\} - 1\right], \qquad \Re(q) > 0.$$

(3) If

$$f_1(t) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{2}} M_{\mu,-\frac{1}{4}}(t),$$

then from 2.2 (3), we get

$$(3)\qquad \int_0^\infty v^{-\frac{3}{4}}(v+q)^{\mu-\frac{9}{4}} e^{-\frac{v}{2}} M_{\mu,-\frac{1}{4}}(v)\,dv = \frac{(\frac{3}{4}-\mu)\sqrt{\pi}}{q\,\Gamma(\frac{13}{4}-\mu)}[1-(q+\mu-\tfrac{3}{4})\,S(\mu+\tfrac{1}{4}, q)], \quad \Re(4\mu) < 9 \text{ and } \Re(q) > 0,$$

where $S(\nu, z)$ is Schlömilch's function.

4. If ([4], p. 51)[2]

$$f_1(t) = t^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}t} W_{\mu,\nu}(t)$$

then

$$f_1(t) \doteqdot \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2}+\alpha\pm\nu)p}{\Gamma(\alpha-\mu+2)}\,{}_2F_1\left[\frac{3}{2}+\alpha\pm\nu;\ \alpha-\mu+2;\ p\right],$$

$$\Re(\alpha\pm\nu+\tfrac{3}{2})>0 \text{ and } \Re(p)>0.$$

Also ([1], p. 161)

$$u^{\alpha-\mu} q_1(u) = \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2}+\alpha\pm\nu)}{\Gamma(\alpha-\mu+2)}\,u^{\alpha-\mu+1}\,{}_2F_1[\tfrac{3}{2}+\alpha\pm\nu;\ \alpha-\mu+2;\ -u]$$

$$\doteqdot q^{\mu-\alpha-1}\,E[\tfrac{3}{2}+\alpha+\nu,\ \tfrac{3}{2}+\alpha-\nu :: q],\quad \Re(\tfrac{3}{2}+\alpha)>0 \text{ and } \Re(q)>0$$

where $E[\alpha, \beta :: z]$ is MAC ROBERT's function.

Then from § 2.2 (3), we get

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{2}} v^{\alpha}(v+q)^{\mu-\alpha-2} W_{\mu,\nu}(v)\,dv$$

(4)

$$= \frac{(\alpha-\mu+2)}{\Gamma(\alpha-\mu+3)}\,q^{\mu-\alpha-2}\,E\left[\frac{3}{2}+\alpha+\nu,\ \frac{3}{2}+\alpha-\nu :: q\right],$$

$$\Re(\alpha+\tfrac{3}{2})>0,\ \Re(\alpha\pm\nu+\tfrac{3}{2})>0,\ \Re(\alpha-\mu+2)>0 \text{ and } \Re(q)>0.$$

5. If

$$t f_3(t) = t^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}t} W_{\alpha-1,\nu}(t),$$

then from § 2.2 (5), we obtain

$$\int_0^{\infty} v^{-1} \sin(2\sqrt{qv})\,F(v)\,dv = \frac{\pi\, 2^{\alpha-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{2\alpha-1}{2}}}\,K_{2\nu}(2\sqrt{2q}) \tag{5}$$

where

$$\frac{1}{v}F(v) = \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2}+\alpha\pm\nu)}{2}\int_0^{\infty}\sin(2\sqrt{qz})\,{}_2F_1[\tfrac{3}{2}+\alpha\pm\nu;\ 3;\ -(v+z)]\,dz,$$

$$\Re(\alpha\pm\nu+\tfrac{3}{2})>0 \text{ and } \Re(q)>0,$$

and $K_{\nu}(z)$ is the BESSEL function.

3.1. Theorem II. *If*

$$\varphi(p) \doteqdot f(t),$$

$$\sqrt{p}\,f\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot g(t),$$

and

$$\psi(p) \doteqdot \chi(t),$$

---

[2]) The symbol

$$\Gamma_*(\alpha\pm\beta) \text{ denotes } \Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta)$$

and

$${}_2F_1[\alpha\pm\beta;\ \nu;\ z] \text{ denotes } {}_2F_1\left\{\begin{matrix}\alpha+\beta,\ \alpha-\beta\\ \nu\end{matrix};\ z\right\}.$$

then, provided the integrals converge,

$$(1) \qquad \int_0^\infty \varphi(t^2)\,\chi(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty g\left(\frac{t^2}{4}\right)\psi(t)\,dt.$$

Proof. We have ([4], p. 13), if

$$\varphi(p) \doteqdot f(t)$$

and

$$\sqrt{p}\,f\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot g(t),$$

then

$$(2) \qquad \varphi(p^2) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,t\,g\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

Also ([3], p. 105), if

$$\varphi_1(p) \doteqdot f_1(x)$$

and

$$\varphi_2(p) \doteqdot f_2(x),$$

then

$$(A) \qquad \int_0^\infty \varphi_1(u)\,f_2(u)\,\frac{du}{u} = \int_0^\infty \varphi_2(v)\,f_1(v)\,\frac{dv}{v}.$$

Now, if

$$\varphi_1(p) = \psi(p), \quad \varphi_2(p) = \varphi(p^2), \quad f_1(x) = \chi(x), \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,x\,g\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

then from (A), we have

$$\int_0^\infty \varphi(t^2)\,\chi(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty g\left(\frac{t^2}{4}\right)\psi(t)\,dt.$$

3.2. Particular Cases.

Case I. If

$$g(t) = K_{\pm\frac{1}{2}}(t),$$

where $K_\nu(z)$ is the Bessel function, then ([4], p. 39)

$$\sqrt{p}\,f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi p}{\sqrt{2}\,\sqrt{(p+1)}}, \qquad \Re(p) > 0,$$

therefore ([4], p. 14)

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,\sqrt{(x+1)}} \doteqdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\sqrt{(\pi p)}\,e^p\,\operatorname{erfc}\sqrt{p},$$

where

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Hence, from theorem II, we get

$$(1)\qquad \sqrt{2\pi}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(t^2)\chi(t)\,dt = \int_0^\infty K_{\pm\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{4}\right)\psi(t)\,dt,$$

provided the integrals converge.

Case II. If ([4], p. 28)

$$g(t) = t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{at}),$$

then

$$g(t) \doteqdot a^{\frac{\nu}{2}} p^{-\nu} e^{-\frac{a}{p}} = \sqrt{p}\, f\left(\frac{1}{p}\right), \qquad \Re(\nu+1)>0,$$

therefore ([4], p. 16)

$$f(t) = a^{\frac{\nu}{2}} t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-at} \doteqdot \frac{a^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\,p}{(p+a)^{\nu+\frac{3}{2}}} = \varphi(p), \quad \Re(\nu+\tfrac{3}{2})>0 \text{ and } \Re(p)>0.$$

Hence, from § 3.1 (1), we get

$$(2)\qquad \sqrt{\pi}\int_0^\infty t^\nu J_\nu(\sqrt{a}\,t)\,\psi(t)\,dt = 2^{\nu+1}\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2})\,a^{\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty z(t^2+a)^{-\nu-\frac{3}{2}}\chi(t)\,dt$$

provided $\Re(\nu+1)>0$ and the integrals converge.

3.3. Example. If ([4], p. 17)

$$\chi(t) = e^{-qt^2}(\sqrt{q}\,t)^{\lambda-1} \doteqdot \frac{\Gamma(\lambda)p}{2^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{q}}\, e^{\frac{p^2}{8q}} D_{-\lambda}\left(\frac{p}{\sqrt{2q}}\right), \quad \Re(p)>0 \text{ and } \Re(\lambda)>0,$$

then, from § 3.2 (2), we obtain

$$\frac{\Gamma(2\nu+2)\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\sqrt{q}}\int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(\sqrt{a}\,t)\, e^{\frac{t^2}{8q}} D_{-(2\nu+2)}\left(\frac{t}{\sqrt{2q}}\right)dt$$

$$= q^{\nu+\frac{1}{2}}\, 2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2})\, a^{\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty t^{2\nu+2}(t^2+a)^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{-qt^2}\,dt.$$

Now, on using the operational relation ([4], p. 15], we obtain

$$(1)\qquad \int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(\sqrt{a}\,t)\, e^{\frac{t^2}{8q}} D_{-(2\nu+2)}\left(\frac{t}{\sqrt{2q}}\right)dt$$

$$= a^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\, 2^{\nu+\frac{3}{2}}(\nu+1)\, q^{\nu+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{aq}{2}}\, D_{-(2\nu+3)}(\sqrt{2qa})$$

$$\Re(\nu)>-1 \text{ and } \Re(q)>0.$$

4.1. Theorem III. *If*

$$\varphi(p) \doteqdot f(t),$$

$$p^{\nu} e^{-xp^{\mu}} \doteqdot g(x, t)$$

and

$$\Theta(p) \doteqdot F(t),$$

then, provided the integrals converge and $\int_0^{\infty} g(x, v) f(x)\, dx$ *is convergent,*

$$\int_0^{\infty} u^{\nu-\mu-1} \varphi(u^{\mu}) F(u)\, du = \int_0^{\infty} f(x) G(x)\, dx \tag{1}$$

where

$$G(x) = \int_0^{\infty} \Theta(v) g(x, v) \frac{dv}{v}.$$

Proof. We have ([4], p. 13), if

$$\varphi(p) \doteqdot f(t)$$

and

$$p^{\nu} e^{-xp^{\mu}} \doteqdot g(x, t),$$

then

$$p^{\nu-\mu} \varphi(p^{\mu}) \doteqdot \int_0^{\infty} g(x, t) f(x)\, dx.$$

Now, applying (A), with

$$\varphi_1(p) = p^{\nu-\mu} \varphi(p^{\mu}),\ f_1(t) = \int_0^{\infty} g(x, t) f(x)\, dx,$$

$\varphi_2(p) = \Theta(p)$ and $f_2(t) = F(t)$, we obtain

$$\int_0^{\infty} F(u) u^{\nu-\mu-1} \varphi(u^{\mu})\, du = \int_0^{\infty} \Theta(v) \left[\int_0^{\infty} g(x, v) f(x)\, dx \right] \frac{dv}{v} \tag{2}$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) G(x)\, dx$$

where

$$G(x) = \int_0^{\infty} \Theta(v) g(x, v) \frac{dv}{v}.$$

The change of order of integration in (2) can be justified by DE LA VALLÉE POUSSIN's theorem, if x-integral and v-integral are absolutely convergent and the integral

$$\int_0^{\infty} f(x) G(x)\, dx$$

is absolutely convergent.

4.2. Particular Case. If

$$g(x,t) = (2t)^{-\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right),$$

then ([4], p. 52)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2t)^{-\nu} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \doteqdot p^{\nu} e^{-x\sqrt{p}}.$$

Hence § 4.1 (1) reduces to

$$\int_0^\infty u^{\nu-\frac{3}{2}} F(u)\,\varphi(\sqrt{u})\,du = \int_0^\infty f(x)\,G(x)\,dx, \tag{1}$$

where

$$G(x) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Theta(v)\,(2v)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8v}} D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2v}}\right) dv$$

provided the integrals converge and also the integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) f(x)\,dx$$

is convergent.

Further, if ([4], p. 48)

$$f(x) = J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}}) \doteqdot \frac{e^{-\frac{2}{p^3}}}{p}\, I_n\left(\frac{2}{p^3}\right), \qquad \Re(p) > 0,$$

then § 4.2 (1) reduces to

$$\int_0^\infty F(u)\,u^{\nu-2} e^{-\frac{2}{u}} I_n\left(\frac{2}{u}\right) du = \int_0^\infty J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}})\,G(x)\,dx, \tag{2}$$

where

$$G(x) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Theta(v)\,(2v)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8v}} D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2v}}\right) dv,$$

provided the integrals converge.

4.3. Example. If ([4], p. 16)

$$F(t) = t^{-\nu} e^{-\frac{q}{t}},$$

then

$$F(t) \doteqdot 2\, q^{\frac{1-\nu}{2}}\, p^{\frac{\nu+1}{2}}\, K_{\nu-1}(2\sqrt{pq}), \qquad \Re(p) > 0$$

where $K_{\nu-1}(z)$ is the BESSEL function.

Then, from § 4.2 (2), after little simplification, we obtain

$$(5) \qquad \int_0^\infty J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}})\, G(x)\, dx = \frac{2^n q}{\{q(q+4)\}^{\frac{1}{2}}\,[q+2+\{q(q+4)\}^{\frac{1}{2}}]^n}$$

where

$$G(x) = \frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, q^{\frac{1-\nu}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{\nu+1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{8t}}\, K_{\nu-1}(2\sqrt{qt})\, D_{2\nu-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) dt,$$

$$\Re(n) > -\tfrac{1}{2}, \quad \Re(\nu) > 1 \text{ and } \Re(q) > 0.$$

References.

[1] Bose, N. N.,
Math. Zeitschr. **54** (1951), p. 160—167.

[2] Bromwich, T. J. I'A.,
The Theory of Infinite Series (1908).

[3] Goldstein, S.,
Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1932), p. 103—125.

[4] McLachlan, N. W. and Humbert, P.,
Formulaire pour le Calcul symbolique (1941).

(Eingegangen am 1. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 94—104 (1952).

A Formalisation of Post's m-valued Propositional Calculus.

By

Alan Rose in Aberdeen (Scotland).

It has recently been shown [1]) that the m-valued logics of Słupecki [2]) with $s\,(1 \leqq s \leqq m-1)$ designated truth-values can be formalised by means of eighteen axioms, whatever the value of m. The object of the present paper is to show that if we take the primitive functions of Post [3]) instead of those of Słupecki we can, in the case $s = 1$, formalise the system by means of ten axioms.

We denote the truth-values by $1, 2, \ldots, m$; 1 being the designated truth-value. The truth-values of the primitive functions, alternation and negation, are determined as follows. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\sim\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ have the truth-values $x, y, f(x), g(x, y)$ respectively then

$$f(x) = x + 1 \quad (x \neq m)$$
$$f(m) = 1$$
$$g(x, y) = \text{min. } (x, y).$$

Post showed [4]) that the system with these primitives is functionally complete. Thus we can define in terms of the primitives a second negation function such that if the truth-values of $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ are $x, h(x)$ respectively then

$$h(1) = m$$
$$h(x) = 1 \quad (x \neq 1),$$

and a conjunction function such that if the truth-values of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ are $x, y, j(x, y)$ respectively then

$$j(x, y) = \text{max. } (x, y).$$

---

[1]) A. Rose, Eight-valued Geometry, Proc. Lond. Math. Soc., Third Series 2 (1952), pp. 30—44.

[2]) J. Słupecki, Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań, Comptes rendus (Warsaw) Classe III 32 (1939), pp. 110—128.

[3]) E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions, American J. of Math. 43 (1921), pp. 163—185.

[4]) Loc. cit.

We can then define a second conjunction function by

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = _{\text{df.}} \overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}.$$

Thus $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ has the truth-value 1 when $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ both have the truth-value 1, otherwise $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ has the truth-value m. We define implication and equivalence by

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} = _{\text{df.}} \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$$

and

$$\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B} = _{\text{df.}} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})\ (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}).$$

Thus if the truth-values of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ are x, y, $k(x, y)$, $l(x, y)$ respectively

$$\begin{aligned} k(1, y) &= y \\ k(x, y) &= 1 \quad (x \neq 1) \\ l(1, 1) &= 1 \\ l(1, x) &= l(x, 1) = m \quad (x \neq 1) \\ l(x, y) &= 1 \quad (x \neq 1,\ y \neq 1). \end{aligned}$$

We define the J_m function of ROSSER and TURQUETTE [5]) by

$$J_m(\mathfrak{A}) = _{\text{df.}} \sim^{m-1}(\mathfrak{A} \vee \sum_{i=2}^{m-1} \sim^i \mathfrak{A}),$$

where $\sum$ relates to summation by v. Thus $J_m(\mathfrak{A})$ has the truth-value 1 when $\mathfrak{A}$ has the truth-value m, otherwise $J_m(\mathfrak{A})$ has the truth-value m. We then define a second equivalence function by

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} = _{\text{df.}} \prod_{i=0}^{m-1} (\sim^i \mathfrak{A} \longleftrightarrow \sim^i \mathfrak{B}),$$

where $\prod$ relates to summation by $\cdot$. Thus $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ has the truth-value 1 when the truth-values of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are the same, otherwise $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ has the truth-value m.

The proof of completeness of our formalisation will depend on a generalisation of HILBERT's method [6]) of reducing formulae to normal form.

We consider the axioms

(A 1) $\quad \sum_{i=0}^{m-1} \sim^i X$

(A 2) $\quad ((X \to Y) \to Z \vee (U \vee V)) \to ((U \to X) \to Z \vee (V \vee X))$

(A 3) $\quad (X \equiv Y) \to (Z \vee X \equiv Y \vee Z)$

[5]) J. B. ROSSER and A. R. TURQUETTE, Axiom schemes for m-valued Propositional Calculi, Journal Symbolic Logic 10 (1945), pp. 61—82.

[6]) D. HILBERT and W. ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen Logik, Second Edition, Springer, Berlin (1938), pp. 14—18; Principles of Mathematical Logic, Chelsea, N. Y. (1950), pp. 17—18.

(A 4) $X \,\&\, Y \longleftrightarrow X \cdot Y$

(A 5) $J_m(X \,\&\, Y) \equiv J_m(X) \vee J_m(Y)$

(A 6) $J_m(X \vee Y) \equiv J_m(X) \,\&\, J_m(Y)$

(A 7) $J_m(X) \longleftrightarrow \sim X$

(A 8) $X \longleftrightarrow \sim^m X$

(A 9) $\sim(X \vee Y) \equiv (\sim X \vee \sim Y) \,\&\, (\sim X \vee Y) \,\&\, (X \vee \sim Y)$

(A 10) $\sim(X \,\&\, Y) \equiv (\sim X \vee J_m(Y)) \,\&\, (J_m(X) \vee \sim Y)$

together with a substitution rule (Rule (α)) and

Rule (β) *If* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *then* $\mathfrak{B}$.

It has been shown by MEREDITH [7]) that if we regard (A 2) as a formula of the 2-valued Propositional Calculus with v and $^-$ as primitives we can deduce from it all identical formulae of the 2-valued Propositional Calculus. Thus we can deduce

(F 1) $(X \to Y) \to ((Z \to U) \to (X \cdot Z \to Y \cdot U))$

(F 2) $X \cdot Y \to X$

(F 3) $X \cdot (Y \cdot Z) \longleftrightarrow (X \cdot Y) \cdot Z$, $(X \cdot Y) \cdot Z \longleftrightarrow X \cdot (Y \cdot Z)$

(F 4) $(X \longleftrightarrow Y) \to ((Y \longleftrightarrow Z) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Z))$

(F 5) $(Z \longleftrightarrow Y) \to ((X \longleftrightarrow Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Z))$

(F 6) $(Y \longleftrightarrow X) \to (Z \cdot X \longleftrightarrow Z \cdot Y)$.

(F 7) $X \longleftrightarrow X$

(F 8) $X \to (Y \to (X \cdot Y))$

(F 9) $X \to (Y \to (Y \cdot X))$

(F 10) $(X \longleftrightarrow Y) \cdot (Y \longleftrightarrow Z) \to (X \longleftrightarrow Z)$

(F 11) $(X \to Y) \to ((Y \to Z) \to (X \to Z))$

(F 12) $X \vee (Y \cdot Z) \longleftrightarrow (X \vee Y) \cdot (X \vee Z)$

(F 13) $(X \cdot Y) \vee Z \longleftrightarrow (X \vee Z) \cdot (Y \vee Z)$

(F 14) $X \cdot (Y \vee Z) \longleftrightarrow (X \cdot Y) \vee (X \cdot Z)$

(F 15) $(X \vee Y) \cdot Z \longleftrightarrow (X \cdot Z) \vee (Y \cdot Z)$

(F 16) $X \vee Y \longleftrightarrow Y \vee X$

(F 17) $X \to X \vee Y$.

From (F 2) and the definition of $\equiv$ we deduce

(F 18) $(X \equiv Y) \to (X \longleftrightarrow Y)$.

Applying Rule (α) to (F 4) we deduce

(F 19) $(X \longleftrightarrow \sim^m X) \to ((\sim {}^m X \longleftrightarrow \sim^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow \sim^m Y))$.

[7]) This result has not yet been published.

Applying Rule (β) to (A 8) and (F 19) we deduce

(F 20) $\quad (\sim {}^m X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow \sim {}^m Y).$

Applying Rule (α) to (F 5) we deduce

(F 21) $\quad (Y \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \rightarrow ((X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y)).$

Applying Rule (α) to (A 8) we deduce

(F 22) $\quad Y \longleftrightarrow \sim {}^m Y.$

Applying Rule (β) to (F 21) and (F 22) we deduce

(F 23) $\quad (X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y).$

We now prove

Rule 1. *If* $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ *and* $\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$ *then* $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$.

From (A 2) we deduce $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((Y \longleftrightarrow Z) \rightarrow (X \longleftrightarrow Z))$. Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ for X, Y, Z respectively and applying Rule (β) twice we deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$.

Rule 2. *If* $\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$ *is demonstrable and* Φ *is definable in terms of* v *and* $\bar{}$ *then* $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ *is demonstrable.*

We prove this by strong induction on the number n of occurrences of v and $\bar{}$ in Φ. If $n = 1$ we apply Rule (α) to the formulae $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (\bar{X} \longleftrightarrow \bar{Y})$, $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \longleftrightarrow Z \vee Y)$, $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (X \vee Z \longleftrightarrow Y \vee Z)$ which can be deduced from (A 2). Thus we deduce $(\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\overline{\mathfrak{B}} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{C}})$. Applying Rule ($\beta$) we deduce $\overline{\mathfrak{B}} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{C}}$. Similarly we can deduce $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C} \longleftrightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$. We now assume the result for $1, 2, \ldots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ is of the form $\overline{\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}^{\,i}$ where neither Ψ nor χ contains more than n occurrences of v and $\bar{}$. From (A 2) we deduce

$$(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((Z \longleftrightarrow U) \rightarrow (\overline{\bar{X} \vee Z}^{\,i} \longleftrightarrow \overline{Y \vee U}^{\,i})).$$

By our induction hypothesis we can prove $\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ and $\chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$. Thus, applying Rule ($\alpha$) to the previous formula and then applying Rule (β) twice we deduce

$$\overline{\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}^{\,i} \longleftrightarrow \overline{\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})}^{\,i} \quad \text{i. e. } \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}).$$

Thus the rule is proved. Since $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ can be deduced from (A 2) it follows that if, in addition, $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ is demonstrable then $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ is demonstrable.

Applying Rule 1 to (F 20) and (F 23) we deduce

(F 24) $\quad (\sim {}^m X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y).$

From (A 2) we deduce

(F 25) $\quad X \cdot Y \longleftrightarrow Y \cdot X.$

From (F 3), (F 25) and Rules 1 and 2 we deduce

$$(\text{F } 26) \qquad (X \equiv Y) \leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}Y) \cdot (X \leftrightarrow Y)\right).$$

Applying Rule (α) to (F 6) we deduce

$$(\text{F } 27) \qquad \left(\left(\sim {}^{m}X \leftrightarrow \sim {}^{m}Y\right) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)\right) \rightarrow \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}Y) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \times (X \leftrightarrow Y)\right) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y)\right).$$

Applying Rule (β) to (F 24) and (F 27) we deduce

$$(\text{F } 28) \qquad \left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}Y) \cdot (X \leftrightarrow Y)\right) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y).$$

Applying Rule 1 to (F 26) and (F 28) we deduce

$$(\text{F } 29) \qquad (X \equiv Y) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y).$$

Applying Rule (α) to (F 7) we deduce

$$(\text{F } 30) \qquad \sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}X. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ for X, Y respectively in (F 8) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 3. *If* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B}$ *then* $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$.

Applying Rule 3 to (F 7) and (F 30) we deduce

$$(\text{F } 31) \qquad X \equiv X.$$

Applying Rule (α) to (A 3) we deduce

$$(\text{F } 32) \qquad (X \equiv X) \rightarrow (Z \vee X \equiv X \vee Z).$$

Applying Rule (β) to (F 31) and (F 32) we deduce

$$(\text{F } 33) \qquad Z \vee X \equiv X \vee Z.$$

Applying Rule (α) to (F 10) we deduce

$$(\text{F } 34) \qquad (\sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}Y) \cdot (\sim {}^{i}Y \leftrightarrow \sim {}^{i}Z) \rightarrow (\sim {}^{i}X \leftrightarrow \sim {}^{i}Z)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ for X, Y, Z, U in (F 1) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 4. *If* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ *and* $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ *then* $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}$.

Applying Rule 4 to (F 10), (F 25) and (F 34) and then using (F 3) and (F 11) we deduce

$$(\text{F } 35) \qquad (X \equiv Y) \cdot (Y \equiv Z) \rightarrow (X \equiv Z).$$

Applying Rule (α) to (F 33) we deduce

$$(\text{F } 36) \qquad Y \vee Z \equiv Z \vee Y.$$

Applying Rule (α) to (F 9) we deduce

$$(\text{F } 37) \qquad (Y \vee Z \equiv Z \vee Y) \rightarrow ((Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot$$
$$\times (Y \vee Z \equiv Z \vee Y)).$$

Applying Rule (β) to (F 36) and (F 37) we deduce

(F 38) $\quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot (Y \vee Z \equiv Z \vee Y).$

Applying Rule (α) to (F 35) we deduce

(F 39) $\quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot (Y \vee Z \equiv Z \vee Y) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ for X, Y, Z respectively in (F 11) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 5. *If* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ *and* $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ *then* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$.

Applying Rule 5 to (F 38) and (F 39) we deduce

(F 40) $\quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$

Applying Rule 5 to (A 3) and (F 40) we deduce

(F 41) $\quad (X \equiv Y) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$

Applying Rule (α) to (F 8) we deduce

(F 42) $\quad (X \vee Z \equiv Z \vee X) \rightarrow \{(Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot \prec (Z \vee X \equiv Y \vee Z)\}.$

Applying Rule (α) to (F 33) we deduce

(F 43) $\quad X \vee Z \equiv Z \vee X.$

Applying Rule (β) to (F 42) and (F 43) we deduce

(F 44) $\quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot (Z \vee X \equiv Y \vee Z).$

Applying Rule (α) to (F 35) we deduce

(F 45) $\quad (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$

Applying Rule 5 to (F 44) and (F 45) we deduce

(F 46) $\quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$

Applying Rule 5 to (A 3) and (F 46) we deduce

(F 47) $\quad (X \equiv Y) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$

We now prove

Rule 6. *If* $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ *is demonstrable and* $\mathfrak{B}$ *is part of* $\mathfrak{A}$ *and the result of replacing* $\mathfrak{B}$ *by* $\mathfrak{C}$ *in* $\mathfrak{A}$ *is* $\mathfrak{D}$, *then* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$ *is demonstrable.*

Let the numbers of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ be $x + n$, x respectively. We shall prove the rule by strong induction on n. If $n = 0$ $\mathfrak{A}$ is of the form $\sim {}^{i}\mathfrak{B}$. From (F 29) we deduce, using (A 2), $(X \equiv Y) \rightarrow (\sim {}^{i}X \equiv \sim {}^{i}Y)$.

Applying Rule (α) we deduce

$$(\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}) \rightarrow (\sim {}^{i}\mathfrak{B} \equiv \sim {}^{i}\mathfrak{C}).$$

Applying Rule (β) to this formula and $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ we deduce

$$\sim {}^{i}\mathfrak{B} \equiv \sim {}^{i}\mathfrak{C}, \text{ i. e. } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}.$$

We now assume the Rule for $0, 1, 2, \ldots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ will be of the forms

$$\sim^i(\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}), \quad \sim^i(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$$

respectively or of the forms

$$\sim^i(\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E}), \quad \sim^i(\mathfrak{G} \vee \mathfrak{F})$$

respectively where, in each case, $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}$ is demonstrable. Let us consider the first case. Applying Rule (α) to (F 47) we deduce

$$(\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}) \to (\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}).$$

Applying Rule (β) to this formula and $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}$ we deduce

$$\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}.$$

As above we then deduce

$$\sim^i(\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}) \equiv \sim^i(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}),$$

i. e. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$. In the second case we proceed as above except that we use (F 41) instead of (F 47). Thus the rule is proved.

We now make two definitions.

Definition 1. (i) A propositional variable is an A-formula.
(ii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula $\sim\mathfrak{A}$ is an A-formula.
(iii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula $J_m(\mathfrak{A})$ is an A-formula.
(iv) A formula cannot be an A-formula except in virtue of (i), (ii), (iii).

Definition 2. (i) An A-formula is a B-formula.
(ii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are B-formulae $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ is a B-formula.
(iii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are B-formulae $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ is a B-formula.
(iv) A formula cannot be a B-formula except in virtue of (i), (ii), (iii).

We now prove

Rule 7. *If* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ *and* $\mathfrak{B}$ *is a part of* $\mathfrak{A}$ *and the result of replacing* $\mathfrak{B}$ *by* $\mathfrak{C}$ *in* $\mathfrak{A}$ *is* $\mathfrak{D}$ *then* $\mathfrak{D}$.

From Rule 6 we deduce $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$. Using (F 18) we then deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{D}$. From (A 2) we deduce $(X \longleftrightarrow Y) \to (X \to Y)$. Using this we deduce $\mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$. Using Rule ($\beta$) we then deduce $\mathfrak{D}$.

We now prove

Theorem 1. *To every formula* $\mathfrak{A}$ *there corresponds a* B*-formula* $\mathfrak{A}^*$ *such that* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^*$ *is demonstrable.*

Lemma 1. *If* $\mathfrak{A}$ *is a* B*-formula then there exist* B*-formulae* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *such that* $\sim\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $J_m(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{C}$ *are demonstrable.*

Let the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathfrak{A}$ be n. We shall prove the lemma by strong induction on n. If $n = 1$ we apply Rule (α) to (F 31). We now assume the lemma for $1, 2, \ldots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$ is of one of

the forms $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$, $\mathfrak{D} \& \mathfrak{E}$ where $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{E}$ are B-formulae and neither $\mathfrak{D}$ nor $\mathfrak{E}$ contains more than n propositional variables. Applying Rule (α) to (A 5), (A 6), (A 9) and (A 10) we deduce

$$\sim(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv (\sim \mathfrak{D} \vee \sim \mathfrak{E}) \& (\sim \mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \& (\mathfrak{D} \vee \sim \mathfrak{E})$$
$$\sim(\mathfrak{D} \& \mathfrak{E}) \equiv (\sim \mathfrak{D} \vee J_m(\mathfrak{E})) \& (J_m(\mathfrak{D}) \vee \sim \mathfrak{E})$$
$$J_m(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv J_m(\mathfrak{D}) \& J_m(\mathfrak{E})$$
$$J_m(\mathfrak{D} \& \mathfrak{E}) \equiv J_m(\mathfrak{D}) \vee J_m(\mathfrak{E}).$$

By our induction hypothesis there exist B-formulae $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ such that $\sim\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{F}$, $J_m(\mathfrak{D}) \equiv \mathfrak{G}$, $\sim\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{H}$, $J_m(\mathfrak{E}) \equiv \mathfrak{K}$ are demonstrable. Applying Rule 7 we deduce

$$\sim(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \& (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{E}) \& (\mathfrak{D} \vee \mathfrak{H})$$
$$\sim(\mathfrak{D} \& \mathfrak{E}) \equiv (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{K}) \& (\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H})$$
$$J_m(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv \mathfrak{G} \& \mathfrak{K}$$
$$J_m(\mathfrak{D} \& \mathfrak{E}) \equiv \mathfrak{G} \vee \mathfrak{K}.$$

Since $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ are B-formulae $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \& (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{E}) \& (\mathfrak{D} \vee \mathfrak{H})$, $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{K}) \& (\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H})$, $\mathfrak{G} \& \mathfrak{K}$, $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{K}$ are B-formulae. Thus the lemma is proved.

Lemma 2. *If $\Phi(X)$ is an* A*-formula and $\mathfrak{A}$ is a* B*-formula then there exists a* B*-formula $\mathfrak{B}$ such that $\Phi(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{B}$ is demonstrable.*

We prove the lemma by induction on the number n of occurrences of $\sim$ and J_m in Φ. If $n = 1$ the lemma follows from Lemma 1. We now assume the lemma for n and prove it for $n+1$. Then $\Phi(\mathfrak{A})$ is of one of the forms $\sim\Psi(\mathfrak{A})$, $J_m(\Psi(\mathfrak{A}))$ where Ψ contains n occurrences of $\sim$ and J_m. By our induction hypothesis there exists a B-formula $\mathfrak{C}$ such that $\Psi(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{C}$ is demonstrable. Applying Rule 6 we deduce

$$\sim\Psi(\mathfrak{A}) \equiv \sim\mathfrak{C}$$
$$J_m(\Psi(\mathfrak{A})) \equiv J_m(\mathfrak{C}).$$

Since $\mathfrak{C}$ is a B-formula it follows from Lemma 1 that there exist B-formulae $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ such that

$$\sim\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{D}$$
$$J_m(\mathfrak{C}) \equiv \mathfrak{E}$$

are demonstrable. Using Rule 3 and (F 35) we deduce

$$\sim\Psi(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{D}$$
$$J_m(\Psi(\mathfrak{A})) \equiv \mathfrak{E}.$$

Thus the lemma is proved.

Proof of the main theorem. Let the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathfrak{A}$ be n. We shall prove the theorem by strong induction on n. If $n = 1$ we apply Rule (α)

to (F 31). We now assume the theorem for $1, 2, \ldots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$ is of the form $\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$, where $\Phi(X)$ is an A-formula and neither $\mathfrak{B}$ nor $\mathfrak{C}$ contains more than n propositional variables. By our induction hypothesis there exist B-formulae $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ such that $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{E}$ are demonstrable. Using Rule 6 we deduce

$$\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \equiv \Phi(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}).$$

Since $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ are B-formulae $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$ is a B-formula. Thus by Lemma 2 there exists a B-formula $\mathfrak{F}$ such that

$$\Phi(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv \mathfrak{F}$$

is demonstrable. Using Rule 3 and (F 35) we deduce

$$\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \equiv \mathfrak{F}.$$

Thus the theorem is proved.

We now define C-formulae and D-formulae.

(i) Every formula of the form $\sim {}^{i}X$, where X is a propositional variable, is a C-formula.

(ii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula then $\sim {}^{i}J_m(\mathfrak{A})$ is a C-formula $(i = 2, 3, \ldots, m-1)$.

(iii) A formula cannot be a C-formula except in virtue of (i) and (ii).

(iv) Every C-formula is a D-formula.

(v) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are D-formulae then $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ is a D-formula.

(vi) A formula cannot be a D-formula except in virtue of (iv) and (v).

We now prove

Theorem 2. *If $\mathfrak{A}$ is an* A*-formula then there exists a* D*-formula $\mathfrak{A}^{**}$ such that $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{A}^{**}$ is demonstrable.*

We prove the theorem by induction on the number n of occurrences of J_m in $\mathfrak{A}$.

If $n = 1$ $\mathfrak{A}$ is of the form $\sim {}^{i}J_m(\sim {}^{j}X)$. Let $i = a\,m + k$ where a and k are integers and $0 \leqq k \leqq m-1$. From (A 2), (A 8) and Rule 1 we deduce

$$\sim {}^{i}J_m(\sim {}^{j}X) \longleftrightarrow \sim {}^{k}J_m(\sim {}^{j}X).$$

If $k \geqq 2$ the theorem is proved. If $k = 0$ we apply Rule (α) to (A 7) deducing

$$J_m(\sim {}^{j}X) \longleftrightarrow \sim {}^{j+1}X.$$

Applying Rule 1 to the last two formulae we deduce

$$\sim {}^{i}J_m(\sim {}^{j}X) \longleftrightarrow \sim {}^{j+1}X.$$

If $k = 1$ we deduce from (A 2) and (A 8) $\sim {}^{m}X \longleftrightarrow X$. Applying Rule ($\alpha$) we thus deduce

$$\sim J_m(\sim {}^{j}X) \longleftrightarrow \sim {}^{j}X \vee \sum_{i=2}^{m-1} \sim {}^{i+j}X.$$

We now assume the theorem for n and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$ is of the form $\Phi(J_m(\sim {}^iX))$ where Φ contains n occurrences of J_m and $\Phi(X)$ is an A-formula. By our induction hypothesis there exists a D-formula $\Psi(X)$ such that $\Phi(X) \longleftrightarrow \Psi(X)$ is demonstrable. Applying Rule (α) we deduce

$$\Phi(J_m(\sim {}^iX)) \longleftrightarrow \Psi(J_m(\sim {}^iX)).$$

From (A 2) we deduce

(F 48) $\quad X \vee (Y \vee Z) \longleftrightarrow (X \vee Y) \vee Z,\ (X \vee Y) \vee Z \longleftrightarrow X \vee (Y \vee Z).$

Thus, using Rule 2, we deduce a formula of the form

$$\Psi(J_m(\sim {}^iX)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^{r} \Xi_s(J_m(\sim {}^iX)),$$

where $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_r$ are C-formulae. If Ξ_s is of the form $\sim^j J_m(\chi)$ where $\chi(X)$ is an A-formula then $\Xi_s(J_m(\sim {}^iX))$ is a C-formula. If Ξ_s is a function of the form $\sim^j$ then $\Xi_s(J_m(\sim {}^iX))$ is of the form $\sim^j J_m(\sim {}^iX)$. It follows from the result of the previous paragraph that there exists a D-formula $A_s(X)$ such that $\Xi_s J_m(\sim {}^iX) \longleftrightarrow A_s(X)$ is demonstrable.

Since we have shown that there exist $A_1, A_2, \ldots, A_r$ such that

$$\Xi_s(J_m(\sim {}^iX)) \longleftrightarrow A_s(X) \qquad (1 \leqq s \leqq r)$$

is demonstrable we deduce from Rule 2

$$\sum_{s=1}^{r} \Xi_s(J_m(\sim {}^iX)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^{r} A_s(X).$$

Since for all $s\,(1 \leqq s \leqq r)$ $A_s(X)$ is a D-formula, $\sum_{s=1}^{r} A_s(X)$ is a D-formula. Applying Rule 1 we deduce

$$\Phi(J_m(\sim {}^iX)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^{r} A_s(X).$$

Thus the theorem is proved.

We define an E-formula as follows:

(i) Every D-formula is an E-formula.

(ii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are E-formulae then $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ is an E-formula.

(iii) A formula cannot be an E-formula except in virtue of (i) and (ii).

We now prove

Theorem 3. *To every formula* $\mathfrak{A}$ *there corresponds an* E-*formula* $\mathfrak{B}$ *such that* $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ *is demonstrable.*

By theorem 1 there exists a B-formula $\mathfrak{A}^*$ such that $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^*$ is demonstrable. Using (F 18) we deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{A}^*$. Hence if we can prove $\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ we can deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ from Rule 1. Thus it is sufficient to prove the theorem for B-formulae.

By Rule 2 and (A 4) we can replace & by $\cdot$ in any B-formula. Thus we can prove by means of (F 3), (F 48), (F 12—15) and Rule 2a a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{u_i} \mathfrak{A}_{ij}$$

where $\mathfrak{A}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}_{1u_1}, \mathfrak{A}_{21}, \ldots, \mathfrak{A}_{vu_v}$ are A-formulae. But for each of the $\mathfrak{A}_{ij}$ we can, by Theorem 2, prove a formula of the form $\mathfrak{A}_{ij} \longleftrightarrow \mathfrak{B}_{ij}$ where $\mathfrak{B}_{ij}$ is a D-formula. Thus, by Rule 2 we deduce a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{u_i} \mathfrak{B}_{ij}.$$

Using (F 48) and Rule 2 we deduce a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w_i} \mathfrak{C}_{ij}$$

where the $\mathfrak{C}_{ij}$ are C-formulae. Thus the theorem is proved.

We now prove

Theorem 4. *If $\mathfrak{A}$ is an* E*-formula which always takes the truth-value* 1 *then $\mathfrak{A}$ is demonstrable.*

In view of Rule 3 it is sufficient to prove the theorem for D-formulae. It follows from the truth-tables for $\sim$ and J_m that when $2 \leqq i \leqq m-1$ no formula of the form $\sim^i J_m(\mathfrak{A})$ can under any circumstances take the truth-value 1. Thus a necessary and sufficient condition that a D-formula always takes the truth-value 1 is that the set of its generating C-formulae includes for the same propositional variable X formulae of the form $\sim^{i_1} X, \sim^{i_2} X, \ldots, \sim^{i_m} X$ where, for all j $(1 \leqq j \leqq m)$

$$i_j = a_j m + b_j$$

where a_j, b_j are integers, $0 \leqq b_j \leqq m-1$ and when $j \neq k$, $b_j \neq b_k$. But we can prove all D-formulae of this kind by means of (A 1), (A 8), (F 48), (F 16), (F 17) and Rule 7. Thus the theorem is proved.

We are now in a position to show that the formalisation is complete. Let $\mathfrak{A}$ be a formula which always takes the truth-value 1. Then there exists, by Theorem 3, an E-formula $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ is demonstrable. Hence $\mathfrak{B}$ always takes the truth-value 1 so, by Theorem 4, $\mathfrak{B}$ is demonstrable. From $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ and (A 2) we deduce $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$. Applying Rule ($\beta$) to $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ we deduce $\mathfrak{A}$. Thus the formalisation is complete.

(Eingegangen am 20. August 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 105—119 (1952).

Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges.

KONRAD KNOPP zum siebzigsten Geburtstag in Freundschaft zugeeignet.

Von

Hermann Weyl in Zürich und Princeton, N. J.

Die von mir in einer voraufgehenden Note[1]) gegebene Behandlung der „Kapazität" von Strahlungsfeldern hat inzwischen durch Herrn C. MÜLLER eine wesentliche Vereinfachung erfahren, indem es ihm gelang zu zeigen, daß hier so wenig wie in der Potentialtheorie Elementarteiler höherer Ordnung auftreten[2]). Im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathfrak{R}_n (n \geqq 2)$ existieren zwei zueinander duale natürliche Randwertprobleme, das „elektrische" und „magnetische", für ein Schwingungsfeld vom Range q; wobei q der Werte $0, 1, \ldots, n$ fähig ist. Das magnetische Problem vom Range $n - q$ ist mit dem elektrischen vom Range q identisch. Nachdem die Herren W. K. SAUNDERS und C. MÜLLER dem für $n = 3$, $q = 1$ sich ergebenden Randwertproblem des elektromagnetischen Feldes von neuem ihre Aufmerksamkeit geschenkt haben[3]), möchte ich auch die von mir für den allgemeinen Fall eines beliebigen n und q vorgesehene Behandlung bekannt geben, mit der Modifikation jedoch, welche die schöne MÜLLERsche Entdeckung möglich gemacht hat. Dafür ist der heute vielen Mathematikern geläufige CARTANsche Kalkül der linearen Differentialformen, wie ich ihn kurz in § 2 auseinandersetze, das angemessene Werkzeug. Im Unterschied von neueren Untersuchungen über harmonische Integrale ist das Operationsgebiet hier euklidisch, aber nicht-kompakt.

§ 1.

Die Grundlösung.

Im $\mathfrak{R}_n$ seien $x_1, \ldots, x_n$ die Cartesischen Koordinaten eines variablen Punktes p, k eine positive Konstante. Für irgend zwei Punkte

[1]) Kapazität von Strahlungsfeldern, diese Zeitschrift **55** (1952), 187—198.

[2]) C. MÜLLER, Zur Methode der Strahlungskapazität von H. WEYL, diese Zeitschrift **55** (1952), 80—83.

[3]) W. K. SAUNDERS, On solutions of MAXWELL's equations in an exterior region, Proc. Nat. Ac. of Sciences, USA., **38** (1952), 342—348. C. MÜLLER, Randwertprobleme der Theorie elektro-magnetischer Schwingungen (erscheint demnächst in dieser Zeitschrift).

p, p' bezeichne $\mathfrak{r}(pp') = \overrightarrow{p'p}$ den von p' nach p führenden Vektor, r seine Länge. Σ_R sei die Kugel um den Ursprung o vom Radius R. Indem wir zunächst p' mit o zusammenfallen lassen, bestimmen wir eine kugelsymmetrische, d. i. nur von r abhängige Lösung (Grundlösung) $G(r)$ der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ aus der HANKELschen Zylinderfunktion $H(r)$ der Ordnung $\frac{n}{2} - 1$, die sich im Unendlichen asymptotisch wie $e^{-ir}/\sqrt{r}$ verhält, indem wir $G(r) = H(kr)/r^{\frac{n}{2}-1}$ setzen. Im Nullpunkt wird $G(r)$ singulär wie const. $r^{-(n-2)}$ (man weiß, wie diese Aussage für $n = 2$ zu modifizieren ist). Ein zunächst in $G(r)$ willkürlich bleibender konstanter Faktor werde so normiert, daß der Fluß von G, nämlich das Integral von $-dG/dr$ über die Kugel vom Radius r, mit $r \to 0$ gegen 2 konvergiert. Die Wahl der besonderen HANKELschen Zylinderfunktion hat zur Folge, daß

$$r^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\text{grad } G + ikG\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)$$

mit $r \to \infty$ gegen 0 strebt (Ausstrahlungsbedingung).

Ist $r = r(pp')$ die Entfernung des variablen Punktes p von einem beliebigen festen Aufpunkt p', so werde die Grundlösung $G(r)$ mit $G(pp')$ bezeichnet, und $\Gamma = \Gamma(pp')$ sei der Vektor $\text{grad}_p G(pp')$ mit den Komponenten $\partial G/\partial x_i$. Offenbar ist $\Gamma' = \text{grad}_{p'} G(pp') = -\Gamma$.

§ 2.

Kalkül der schiefsymmetrischen Tensorfelder im Euklidischen Raum.

Ein schiefsymmetrischer Tensor mit den Komponenten $f_{i_1 \dots i_q}$ vom Range q werde kurz als q-Tensor, ein derartiges Tensorfeld als q-Feld bezeichnet. Das innere Produkt $(f \cdot g)$ zweier q-Tensoren f und g ist die Summe

$$\sum f_{i_1 \dots i_q} \cdot g_{i_1 \dots i_q},$$

erstreckt über die $\binom{n}{q}$ Kombinationen verschiedener Ziffern $i_1, \dots, i_q$ aus der Reihe $1, 2, \dots, n$. Ist α ein Vektor mit den Komponenten α_i, so ist $(f\alpha)$ ein Tensor vom Range $q-1$, $[f\alpha]$ einer vom Range $q+1$, mit den Komponenten

$$(1) \quad (f\alpha)_{i_1 \dots i_{q-1}} = \sum_{i=1}^{n} f_{i_1 \dots i_{q-1} i} \cdot \alpha_i, \quad [f\alpha]_{i_1 \dots i_{q+1}} = \mathfrak{S} \pm f_{i_1 \dots i_q} \cdot \alpha_{i_{q+1}}.$$

$\mathfrak{S} \pm$ zeigt eine alternierende Summe von $q+1$ Gliedern an, die dadurch zustande kommt, daß der letzte i_{q+1} in der Reihe der Indizes schrittweise von hinten nach vorn durchgezogen wird. Man beachte die Regeln

$$(2) \qquad ((f\alpha)\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad [[f\alpha]\alpha] = 0$$

Eine triviale Rechnung ergibt für zwei Vektoren α, β

$$([f\beta]\alpha) = f(\beta\alpha) - [(f\alpha)\beta], \tag{3}$$

insbesondere für $\beta = \alpha$:

$$f(\alpha\alpha) = ([f\alpha]\alpha) + [(f\alpha)\alpha]. \tag{4}$$

Wird der Vektor α vom Betrage 1, $(\alpha\alpha) = 1$, als „Normale" angesprochen, so liefert diese Gleichung die Zerlegung von f in einen „tangentiellen" Tensor $f_t = ([f\alpha]\alpha)$ und einen „normalen" $f_\nu = [(f\alpha)\alpha]$; denn wir werden f normal oder tangentiell nennen, je nachdem $[f\alpha] = 0$ oder $(f\alpha) = 0$ ist. Wird α als $(0, \ldots, 0, 1)$ normiert, so faßt f_t die $\binom{n-1}{q}$ Komponenten $f_{i_1 \ldots i_q}$ zusammen, für die keiner der q Indizes i gleich n ist, f_ν die $\binom{n-1}{q-1}$ Komponenten $f_{i_1 \ldots i_{q-1} n}$. Daher das Pythagoreische Gesetz

$$(f \cdot g) = (f_t \cdot g_t) + (f_\nu \cdot g_\nu).$$

Die folgende Regel, in der f vom Range q, w vom Range $q+1$ ist, findet vielfache Verwendung:

$$(f \cdot (w\alpha)) = ([f\alpha] \cdot w). \tag{5}$$

Nimmt man $\alpha_i = \partial/\partial x_i$, so erhält man statt (1) die beiden auf ein q-Feld f wirkenden Differentialoperatoren div und rot,

$$(\operatorname{div} f)_{i_1 \ldots i_{q-1}} = \sum_i \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_{q-1} i}}{\partial x_i}, \quad (\operatorname{rot} f)_{i_1 \ldots i_{q+1}} = \mathfrak{S} \pm \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_q}}{\partial x_{i_{q+1}}}.$$

Den Formeln (2), (4) entsprechen die Gleichungen

$$\operatorname{div}\operatorname{div} f = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} f = 0; \tag{6}$$

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{rot} f + \operatorname{rot}\operatorname{div} f. \tag{7}$$

Aus einem q-Tensor f entsteht in einer gegenüber *eigentlichen* orthogonalen Koordinaten-Transformationen invarianten Weise der duale $(n-q)$-Tensor f^* nach der Gleichung

$$f_{i_1 \ldots i_q} = f^*_{i_{q+1}, \ldots, i_n},$$

in der $i_1, \ldots, i_q, i_{q+1}, \ldots, i_n$ irgend eine gerade Permutation von $1, \ldots, n$ ist. Ersetzt man konsequent alle Tensoren durch ihre dualen, so vertauschen sich die Operationen $(f\alpha)$ und $[f\alpha]$ sowie div f und rot f.

§ 3.

Greensche Formel.

Seien u, v zwei Felder vom Range q. Man bilde die folgenden beiden Vektorfelder F und $\tilde{F}$:

$$F_i = \sum_{i_1, \ldots, i_{q-1}} u_{i_1 \ldots i_{q-1} i} (\operatorname{div} v)_{i_1 \ldots i_{q-1}},$$

$$\tilde{F}_i = \sum_{i_1, \ldots, i_q} u_{i_1 \ldots i_q} \cdot (\operatorname{rot} v)_{i_1 \ldots i_q i},$$

(die Summen erstrecken sich über alle Kombinationen $(i_1, \ldots)$ zu $q-1$ bzw. q). Es sei V ein beschränktes Gebiet, das von einer oder mehreren glatten Oberflächen $\mathfrak{Q}$ begrenzt wird. Auf $\mathfrak{Q}$ bezeichne ν den Vektor der äußeren Einheitsnormalen. Ein variabler Punkt auf $\mathfrak{Q}$ werde mit s (oder s') bezeichnet; bei Integration über den Raumpunkt p oder den Flächenpunkt s bedeute dp das Volumen-, ds das Flächen-Element. Anwendung der Gaussschen Integralformel auf F und $\tilde{F}$ ergibt die Gleichungen

$$\int_V \{(\operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v) + (u \cdot \operatorname{rot} \operatorname{div} v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} ((u\nu) \cdot \operatorname{div} v) \cdot ds,$$

$$\int_V \{(\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v) + (u \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} (u \cdot (\operatorname{rot} v, \nu)) \cdot ds,$$

aus denen durch Addition nach (7) die fundamentale Greensche Formel folgt:

$$\int_V \{(\operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v) + (\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v) + (u \cdot \Delta v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} \{((u\nu) \cdot \operatorname{div} v) + (u \cdot (\operatorname{rot} v, \nu))\}\, ds.$$

Auf der rechten Seite kann man, da die Felder $(u\nu)$, $(\operatorname{rot} v, \nu)$ tangentiell sind, $\operatorname{div} v$ und u auch durch ihre tangentiellen Teile $(\operatorname{div} v)_t$, u_t ersetzen. Vertauscht man in dieser Formel u mit v und subtrahiert, so ergibt sich die zweite Greensche Gleichung

$$\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{L}(u, v)\, ds = \int_V \{u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u)\}\, dp.$$

Hier ist

$$\mathfrak{L}(u, v) = \begin{array}{l} ((u\nu) \cdot (\operatorname{div} v)_t) + (u_t \cdot (\operatorname{rot} v, \nu)) \\ -((v\nu) \cdot (\operatorname{div} u)_t) - (v_t \cdot (\operatorname{rot} u, \nu)). \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{L}(u, v)\, ds = 0, \tag{8}$$

wenn u und v Lösungen der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in V sind.

§ 4.

Eindeutigkeit.

Der Raum $\mathfrak{R}_n$ sei durch eine oder mehrere glatte Flächen $\mathfrak{Q}$ in ein beschränktes Inneres V und ein zusammenhängendes Äußeres W geteilt. Zur Untersuchung stehen (komplex-wertige) q-Felder u im Außenraum W, die daselbst der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen. Eine derartige Lösung gilt als zulässig, wenn sie der Aus-

strahlungsbedingung genügt. Diese besagt, daß die auf der Kugel Σ_R gebildeten Ausdrücke

$$R^{\frac{n-1}{2}} \cdot \{(\operatorname{div} u)_t + ik[uv)\} \quad \text{und} \quad R^{\frac{n-1}{2}} \cdot \{(\operatorname{rot} u, v) + ik u_t\}$$

gleichmäßig in allen Richtungen gegen 0 streben, wenn der Radius R über alle Grenzen wächst. Wir suchen eine zulässige Lösung u, für welche $(\operatorname{div} u)_t$ und u_t auf $\mathfrak{Q}$ mit einem vorgegebenen tangentiellen $(q-1)$-Feld γ bzw. q-Feld g zusammenfallen (elektrisches Randwertproblem). Der Eindeutigkeitssatz behauptet, daß eine zulässige Lösung u in ganz W verschwindet, falls $(\operatorname{div} u)_t$ und u_t auf $\mathfrak{Q}$ verschwinden. Der Beweis folgt dem Rellichschen Schema. Neben u benutzt man das konjugierte Feld $\bar{u}$. Gemäß der Ausstrahlungsbedingung konvergiert das über Σ_R erstreckte Integral von

$$\begin{cases} ((\operatorname{div} u)_t + ik(uv),\ (\operatorname{div} \bar{u})_t - ik(\bar{u}v)) \\ + ((\operatorname{rot} u, v) + ik u_t,\ (\operatorname{rot} \bar{u}, v) - ik \bar{u}_t) \end{cases} \tag{9}$$

mit $R \to \infty$ gegen Null. Sobald Σ_R ganz V einschließt, kann man die Greensche Formel (8) auf die beiden Felder $u, \bar{u}$ in dem von Σ_R begrenzten Teil von W anwenden. Wegen der auf $\mathfrak{Q}$ geltenden Randbedingungen folgt alsdann, daß das über Σ_R erstreckte Integral von $\mathfrak{L}(u, \bar{u})$ exakt gleich 0 ist, und aus unserer Aussage ergibt sich demnach, daß das Integral von

$$(|(\operatorname{div} u)_k|^2 + |(\operatorname{rot} u, v)|^2) + k^2 (|u_v|^2 + |u_t|^2)$$

mit $R \to \infty$ gegen 0 strebt und demnach a fortiori das Integral von

$$|u_v|^2 + |u_t|^2 = (u \cdot \bar{u}) = \Sigma |u_{i_1 \dots i_q}|^2.$$

Anwendung des Rellichschen Lemmas auf jede der Komponenten $u_{i_1 \dots i_q}$ führt zu dem gewünschten Resultat.

§ 5.

Integralgleichung des elektrischen Randwertproblems.

Die Größen

$$G \cdot \begin{vmatrix} \delta_{i_1 k_1}, \dots, \delta_{i_1 k_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_{i_q k_1}, \dots, \delta_{i_q k_q} \end{vmatrix} = G_{i_1 \dots i_q, k_1 \dots k_q} \tag{10}$$

können als die Komponenten einer Matrix betrachtet werden, für welche $(i_1, \dots, i_q)$ als Zeilen-, $(k_1, \dots, k_q)$ als Kolonnen-Index figuriert. Für variables p und festes p' ist die einer festen Kombination $(i_1, \dots, i_q)$ entsprechende Zeile $G_{i_1 \dots i_q}(p\,p')$ ein q-Feld w mit den Komponenten $w_{k_1, \dots, k_q} = G_{i_1 \dots i_q, k_1 \dots k_q}$.

Die Greensche Formel (8) weist den Weg zur Konstruktion der gesuchten Lösung $u(p)$ des elektrischen Randwertproblems mittels zweckmäßig gewählter Oberflächenbelegungen. Sei $\varphi = \varphi(s)$ ein stetiges $(q-1)$-Feld und $f = f(s)$ ein ebensolches q-Feld auf $\mathfrak{Q}$; beide seien tangentiell, so daß $\varphi = ([\varphi\nu]\nu)$ und $f = ([f\nu]\nu)$, sonst aber beliebig. Man bilde aus dem q-Feld $w(p) = G_{i_1} \ldots {}_{i_q}(p\,p')$ und dem Paar $\varphi = \{\varphi(s), f(s)\}$ dieser beiden Felder den Ausdruck[4])

$$-((w\nu)\cdot\varphi) + ((\mathrm{rot}\, w, \nu)\cdot f), \tag{11}$$

(wobei in w und rot w der variable Flächenpunkt s für p eintritt) und integriere alsdann nach s über ganz $\mathfrak{Q}$: die entstehenden Zahlen $u_{i_1} \ldots {}_{i_q}(p')$ sind die Komponenten eines q-Feldes, das sowohl im Innen- wie im Außenraum als Funktion von p' der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt und im Außenraum der Ausstrahlungsbedingung genügt. Es ist bequem, die Bezeichnungen s, p' gegen s', p zu vertauschen. Wir gebrauchen die Abkürzungen φ, φ' für $\varphi(s)$ und $\varphi(s')$, und analog für alle Funktionen auf $\mathfrak{Q}$. $\Gamma' = \Gamma'(s'\,p)$ bedeutet nunmehr den Vektor $\mathrm{grad}_{p'} G(p'\,p)$ für $p' = s'$. Integration über $\mathfrak{Q}$ nach s oder s' werde durch $\int$ bzw. $\int'$ angedeutet. Das beschriebene Verfahren ergibt den folgenden Ansatz:

$$u(p) = u(p;\varphi) = -\int' [\varphi', \nu']\, G + \int' ([f', \nu']\, \Gamma'). \tag{12}$$

Es gilt, die äußeren Randwerte der Tangentialteile von u und div u zu bestimmen. Da $\Gamma' = -\Gamma$ und somit

$$\int' ([f', \nu']\, \Gamma') = -\,\mathrm{div} \int' [f', \nu']\, G$$

ist, kommt wegen (6):

$$\mathrm{div}\, u = -\int' ([\varphi', \nu']\, \Gamma) = \int' ([\varphi', \nu']\, \Gamma').$$

Um die gesuchten Randwerte an der Stelle s zu finden, errichte man die Normale in s, wähle für p den Punkt auf dieser Normalen, der von s den Abstand $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ hat, und lasse dann ε gegen 0 konvergieren. Indem wir für einen Augenblick ψ für $[\varphi\nu]$ schreiben, handelt es sich also zunächst darum, den Grenzwert von

$$[\mathrm{div}\, u, \nu] = \int' [(\psi'\, \Gamma')\nu]$$

zu ermitteln. Nach (3) ist

$$[(\psi'\, \Gamma')\nu] = \psi'(\Gamma'\, \nu) - ([\psi'\, \nu], \Gamma'). \tag{13}$$

Es ist wohl bekannt, was aus dem Integral des ersten Teiles, $\int' \psi'(\Gamma'\, \nu)$, wird, wenn ε gegen 0 strebt, nämlich

$$\pm\, \psi(s) + \int' \psi'(\Gamma'\, \nu).$$

[4]) So verfuhr ich schon in einer frühen Arbeit über die Eigenschwingungen elastischer Körper, Rend. Circ. Mat. di Palermo **39** (1915), 1—49, insbesondere S. 16.

Hier gilt das obere Vorzeichen bei Annäherung von außen, das untere bei Annäherung von innen, und in Γ' ist $p = s$ zu setzen. Der Kern $(\Gamma'(s's), \nu(s))$ ist regulär genug, da wegen der Glattheit der Oberfläche $\left(\frac{\tau}{r}(s's), \nu(s)\right)$ von positiver Ordnung für $s' \doteq s$ verschwindet. Da die Komponenten von $[\psi'\nu] = [[\varphi'\nu']\nu]$ die Größen ν_i', ν_i nur in der „schiefen" Kombination $\nu_i(s')\nu_k(s) - \nu_k(s')\nu_i(s)$ enthalten, kann im zweiten Teil der Grenzübergang von p zu s unmittelbar ausgeführt werden. Wenn man im Endresultat die Verwandlung (13) wieder rückgängig macht, so erhält man

$$[\operatorname{div} u, \nu](s) = \pm \psi(s) + \int' [(\psi(s'), \Gamma'(s's)), \nu(s)]$$

und damit für den Tangentialteil $(\operatorname{div} u)_t$ von $\operatorname{div} u$ an der Stelle s den Wert

$$\pm \varphi + \int' ([([[\varphi'\nu']\Gamma')\nu]\nu).$$

Auf genau die gleiche Weise bekommt man für den Tangentialteil u_t von u selber den Wert

$$\pm f + \int' ([([[f'\nu']\Gamma')\nu]\nu) - \int' G([[[\varphi'\nu']\nu]\nu).$$

Sei $\gamma = \{\gamma, g\}$ ein gegebenes Paar bestehend aus einem tangentiellen $(q-1)$-Feld γ und einem tangentiellen q-Feld g auf Ω. Das elektrische Randwertproblem, ein zulässiges Außenfeld $u(p)$ zu finden, für welches auf dem Rande Ω die Tangentialteile von $\operatorname{div} u$ und u bzw. die vorgegebenen Werte γ und g annehmen, ergibt dann das System von Fredholmschen Integralgleichungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \gamma = \varphi + \int' ([([[\varphi'\nu']\Gamma')\nu]\nu), \\ g = f + \int' ([([[f'\nu']\Gamma')\nu]\nu) - \int' G([[[\varphi'\nu']\nu]\nu), \end{cases}$$

die wir symbolisch zu

$$\gamma = (E + K)\varphi$$

zusammenfassen mit dem Einheitsoperator E. Wenn γ und g tangentiell sind, sorgt diese Integralgleichung von selbst dafür, daß die Lösung $\{\varphi, f\}$ aus zwei tangentiellen Feldern besteht.

Die Möglichkeit der Existenz von nicht-trivialen Lösungen η der homogenen transponierten Gleichung $\eta(E + K) = 0$ erfordert das Eingehen auf

§ 6.

Das duale Problem.

Dazu verfolgen wir den zu (12) dualen „magnetischen" Ansatz. Wiederum wählen wir eine stetige Belegung $\eta = \{\eta, e\}$, die aus zwei tangentiellen Feldern η und e auf Ω vom Range $q-1$ bzw. q besteht,

und integrieren diesmal an Stelle von (11) den Ausdruck

$$(\operatorname{div} w \cdot \eta) + (w \cdot e)$$

nach s über $\mathfrak{Q}$, unter w wiederum eine der Zeilen $G_{i_1} \dots {}_{i_q}(sp')$ von (10) verstehend. Wir unterlassen diesmal die Abänderung der Bezeichnung von sp' in $s'p$. Wir erhalten so die Komponenten $v_{i_1} \dots {}_{i_q}(p')$ des folgenden q-Feldes

$$v(p') = \int [\eta \Gamma] + \int e G, \tag{15}$$

wo Γ und G für $\Gamma(sp')$ und $G(sp')$ stehen. Es genügt als Funktion von p' im Innen- und Außenraum der Schwingungsgleichung, und der Ausstrahlungsbedingung im Außenraum. Jetzt lassen wir den Punkt p' von außen oder innen gegen den Punkt s' von $\mathfrak{Q}$ auf der in s' errichteten Normalen $\nu' = \nu(s')$ rücken. Es ist zu bestimmen, was dabei aus $-(v(p'), \nu')$ und $(\operatorname{rot} v(p'), \nu')$ wird. Was $-(v(p'), \nu')$ anlangt, so ist klar, daß der zweite Summand des Ausdrucks (15) von $v(p')$ zum Grenzwert den Beitrag $-\int (e\nu')G$ leistet, wo G jetzt für $G(ss')$ steht. Im ersten Teil $([\eta\Gamma]\nu')$ nehme man zunächst wieder die Umwandlung

$$-([\eta\Gamma]\nu') = -\eta(\Gamma\nu') + [(\eta\nu')\Gamma]$$

vor und nutze dann die tangentielle Natur von η aus, indem man η durch $([\eta\nu]\nu)$ ersetzt; dann hat man mit dem Integral $\int$ von

$$-\eta(\Gamma\nu') + [(([\eta\nu]\nu)\nu')\Gamma]$$

zu tun. Aus dem gleichen Grunde wie früher ergibt sich für dieses Integral im Limes $\mp \eta(s')$ plus dem Integral über den gleichen Ausdruck, in dem nun p' durch den Punkt s' auf $\mathfrak{Q}$ ersetzt ist, und aus dem gleichen Grunde ist auch hier der Kern hinreichend regulär. Indem man den Ausdruck in seine ursprüngliche Form zurückverwandelt, erhält man darum

$$-(v\nu)' = \mp \eta' + \int ([([\eta\nu]\nu)\Gamma']\nu') - \int (([e\nu]\nu)\nu')G.$$

Dabei ist noch Γ durch $-\Gamma'$ ersetzt worden.

Für ein Feld $v(p')$ wird man unter rot' natürlicherweise den Operator $\operatorname{rot}_{p'}$ verstehen. Wegen

$$\int [\eta\Gamma] = -\int [\eta\Gamma'] = -\operatorname{rot}' \int \eta G$$

ist

$$\operatorname{rot}' v = \int [e\Gamma'] = -\int [e\Gamma],$$

und durch dieselbe kleine Rechnung, die oben für $[\eta\Gamma]$ ausgeführt wurde, kommt

$$(\operatorname{rot}' v, \nu') = \mp e' + \int ([([e\nu]\nu)\Gamma']\nu').$$

Ist darum $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, l)$ das Paar, das aus den inneren Randwerten von $-(v\nu)$ und $(\operatorname{rot} v, \nu)$ besteht, so resultiert die Gleichung

$$\boldsymbol{\lambda} = \eta(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}).$$

In der Tat ist der Operator, der η in λ überführt, transponiert zu demjenigen, der nach den Gleichungen (14) γ aus φ hervorgehen läßt. Denn gemäß (5) ist ja z. B.

$$(f' \bullet ([[[e\,\nu]\,\nu)\,\Gamma']\,\nu')) = ((([[[f'\,\nu']\,\Gamma')\,\nu]\,\nu) \bullet e),$$

da nach jener Gleichung die Vektor-Faktoren von e in umgekehrter Reihenfolge an f' angehängt werden können, indem man jede runde in eine eckige, jede eckige in eine runde Klammer verwandelt. Die Gleichung

$$\eta\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}) = 0 \tag{16}$$

bedeutet also, daß für $v(p) = v(p;\eta)$ die inneren Randwerte von $-(v\,\nu)$ und $(\mathrm{rot}\ v, \nu)$ verschwinden. Auf jeden Fall erleiden diese Größen den Sprung -2η bzw. $-2e$ beim Durchgang durch die Fläche $\mathfrak{Q}$ von innen nach außen.

§ 7.

Der Operator M und die Kapazitätsmatrix.

Die Lösungen φ, η von $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})\varphi = 0$ bzw. $\eta(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}) = 0$ bilden lineare Mannigfaltigkeiten Φ und H von derselben Dimension h. Es sei p' ein Punkt im Äußern W. Dann ist $G(p\,p')$ als Funktion von p eine reguläre Lösung der Schwingungsgleichung für $p \in V$. Wir wenden die Gleichung (8) an auf das q-Feld $w(p) = G_{i_1 \dots i_q}(p\,p')$, das an Stelle von u tritt, und das q-Feld $v(p) = v(p;\eta)$, das mittels der H entnommenen Belegung η durch (15) definiert ist. Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß die Randwerte f und φ der Tangentialteile von v und $\mathrm{div}\ v$ existieren und auf der Innen- und Außenseite von $\mathfrak{Q}$ die gleichen Werte haben. M bedeutet den linearen Operator, durch den η in $\varphi = \{\varphi, f\}$ übergeht, $\varphi = M\eta$. Berücksichtigt man, daß die inneren Randwerte von $-(v\,\nu)$ und $(\mathrm{rot}\ v, \nu)$ verschwinden, so ergibt unsere Gleichung

$$\int \{-((w\,\nu)\cdot\varphi) + ((\mathrm{rot}\ w, \nu)\cdot f)\} = 0$$

oder

$$u(p;\varphi) = 0 \quad \text{für } \varphi = M\eta,\ \eta \in H \text{ und } p \in W.$$

Läßt man jetzt p von außen in einen Flächenpunkt s hineinrücken, so kommt

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})\varphi = 0.$$

Verfährt man in gleicher Weise mit $\bar{v}(p)$, so zeigt sich, wie Herr Müller zuerst bemerkte, daß nicht nur $\varphi = M\eta$, sondern auch das konjugierte $\bar{\varphi}$ derselben Gleichung genügt.

Sind $\eta = \{\eta, e\}$, $\varphi = \{\varphi, f\}$ irgend zwei Belegungen von der hier durchgehend benutzten Art, die erste als Zeile, die zweite als Spalte

aufgefaßt, so kann man das innere Produkt

$$(\eta, \varphi) = \int (\eta \cdot \varphi) + \int (e \cdot f)$$

bilden. Aus zwei Belegungen η, η^* von der Art wie η entsteht die Bilinearform

$$C(\eta, \eta^*) = (\eta, M\eta^*).$$

Ihre *Symmetrie* beweist man am besten, indem man die GREENsche Formel (8) auf $v = v(p; \eta)$ und $v^* = v(p; \eta^*)$ anwendet, nicht jedoch für V, sondern für das Innere der Kugel Σ_R. Sobald der Radius R so groß ist, daß Σ_R ganz V umschließt, erhält man dann, bedenkend, daß $-(v\nu)$ und $(\text{rot } v, \nu)$ den Sprung -2η bzw. $-2e$ über Ω hinüber erleiden, während $\varphi = (\text{div } v)_t$ und $f = v_t$ stetig hindurchgehen, eine Gleichung, durch welche $2\{(\eta, M\eta^*) - (\eta^*, M\eta)\}$ in das über Σ_R sich erstreckende Integral von $\mathfrak{L}(v, v^*)$ verwandelt wird. Schreibt man hier $\mathfrak{L}(v, v^*)$ in der Form

$$\begin{aligned}(17)\qquad &((v\nu), (\text{div } v^*)_t + ik(v^*\nu)) + (v_t, (\text{rot } v^*\nu) + ikv_t^*)\\ &-((v^*\nu), (\text{div } v)_t + ik(v\nu)) - (v_t^*, (\text{rot } v, \nu) + ikv_t),\end{aligned}$$

so ergibt sich aus den Ausstrahlungsbedingungen, daß $\int_{\Sigma_R} \mathfrak{L}(v\,v^*)\,ds$ mit $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folglich

$$(18)\qquad (\eta, M\eta^*) - (\eta^*, M\eta) = 0.$$

Das entsprechende Verfahren für v und $\bar{v}$ liefert zunächst

$$2(\eta, \overline{M\eta}) - 2(\bar{\eta}, M\eta) = \int_{\Sigma_R} \mathfrak{L}(v, \bar{v})\,ds.$$

Parallel zu (17) bildet man[5])

$$\begin{aligned}(19)\qquad &((v\nu), (\text{div } \bar{v})_t - ik(\bar{v}\nu)) + (v_t, (\text{rot } \bar{v}, \nu) - ik\bar{v}_t)\\ &-((\bar{v}\nu), (\text{div } v)_t + ik(v\nu)) - (\bar{v}_t, (\text{rot } v, \nu) + ikv_t).\end{aligned}$$

Gemäß der Ausstrahlungsbedingung konvergiert das Integral dieses Ausdrucks über Σ_R mit $R \to \infty$ gegen Null, somit

$$k \cdot \int_{\Sigma_R} |v|^2\,ds \to 2 \cdot \mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta}).$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$(20)\qquad \mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta}) \geqq 0,$$

und nach RELLICHS Lemma kann hier das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn $v(p)$ in ganz W verschwindet; diese Bedingung hat das Ver-

[5]) Dieser Gedanke rührt von Herrn MÜLLER her, nur benutzt er statt (19) den RELLICHschen Ausdruck (9) für v.

schwinden der *äußeren* Randwerte von $-(v\nu)$ und (rot v, ν) oder die Gleichung

$$\eta(-E+K)=0 \tag{21}$$

zur Folge.

Die Beziehungen (18), (20) samt diesem Zusatz gelten unabhängig davon, ob η zu H gehört. Ist aber $\eta(E+K)=0$, so führt (21) auf $\eta=0$. Für die Elemente η von H gilt somit

$$\mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta})>0 \text{ außer für } \eta=0. \tag{20*}$$

Diese Ungleichung lehrt, daß $M\eta$ für $\eta \in H$ nur dann Null sein kann, wenn $\eta=0$ ist, und darum ist die Abbildung $\eta \to \varphi = M\eta$ von H auf Φ ein-eindeutig. Aus einer Basis η_i $(i=1,\ldots,h)$ von H entspringt darum eine Basis $\varphi_i = M\eta_i$ für Φ. Es gilt der fundamentale

Satz: *Die Kapazitätsmatrix der* $c_{ij}=(\eta_i\varphi_j)$ *ist nicht-ausgeartet.*

Zum Beweise muß man zeigen, daß $\eta=0$ die einzige Linearkombination der η_i ist, die zu allen φ_j orthogonal ist. Da $\overline{M\eta}$ zu Φ gehört, folgt aus $(\eta\varphi_j)=0$ $(j=1,\ldots,h)$ in der Tat $(\eta, \overline{M\eta})=0$, was der Ungleichung (21*) widerspricht, es sei denn $\eta=0$.

Danach führt das klassische Vorgehen zur Lösung der elektrischen Randwertaufgabe: Von dem gegebenen γ subtrahiert man ein solches Element $\Sigma\alpha_j\varphi_j$ von Φ, daß die Differenz γ^* zu allen η_i orthogonal ist,

$$(\eta_i\gamma)=\Sigma_j c_{ij}\alpha_j \qquad (i,j=1,\ldots,h).$$

Für γ^* hat die inhomogene Integralgleichung $(E+K)\varphi^*=\gamma^*$ eine Lösung φ^*. Zum „elektrischen Schwingungspotential" $u^*(p)=u(p;\varphi^*)$ der so gefundenen Belegung φ^* addiert man das magnetische Potential $v(p;\eta)$ der H entnommenen Belegung $\eta=\Sigma_j\alpha_j\eta_j$. Die Summe $u(p)$ ergibt die gewünschten äußeren Randwerte $\{\gamma, g\}$ für $(\operatorname{div} u)_t$ und u_t.

§ 8.

Die Randwerte von v_t und $(\operatorname{div} v)_t$.

Ein heikler Punkt, der im Falle $q=0$ noch nicht auftaucht, ist der Nachweis der Existenz und des stetigen Durchgangs der tangentiellen Teile v_t und $(\operatorname{div} v)_t$ des im Innen- und Außenraum durch (15) bestimmten Potentials v. In der Tat, für $q=0$ hat man einfach

$$v(p')=\int e(s)\,G(s\,p'),$$

und es ist sofort klar, daß die Randwerte von v auf der Innen- und Außenseite durch $v(s')=\int e(s)\,G(s\,s')$ gegeben sind. Für $q\geqq 1$ erfordert die Bestimmung des Oberflächenwertes des tangentialen Teils von $\int'[\eta' T]$ eine zusätzliche Überlegung, die aber aus der klassischen Potentialtheorie wohlbekannt ist. Wenn p längs der Normalen in s

in den Oberflächenpunkt s hineinrückt, ergibt sich von innen und außen der gleiche Limes, nämlich der *Hauptwert* des uneigentlichen Integrals

$$\int'([[\eta(s'),\ \Gamma(s's)],\ \nu(s))\,\nu(s)).$$

Dabei wird es dann freilich nötig, von $\eta(s)$ vorauszusetzen, daß es nicht nur stetig ist, sondern auch einer HÖLDER-Bedingung genügt. Der Hauptwert des Integrals über $\mathfrak{Q}$ wird bestimmt, indem man aus $\mathfrak{Q}$ um den Punkt s zunächst ein kleines *kreisförmiges* Loch ausstanzt, dessen Radius ε man dann gegen 0 gehen läßt. Genauer gesagt: in der Tangentenebene im Punkte s von $\mathfrak{Q}$ beschreibt man um s einen $(n-1)$-dimensionalen Kreis vom Radius ε und errichtet über ihm in Richtung der Normalen ν einen geraden Kreiszylinder; dieser wird zum Ausstanzen des Loches benutzt.

Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man s als den Ursprung des Koordinatensystems annimmt und der x_n-Achse die Richtung der Normalen ν gibt, $\nu = (0, \ldots, 0, 1)$. Dann besteht $[\eta'\Gamma]_i$ aus denjenigen Komponenten

$$[\eta'\Gamma]_{i_1 \ldots i_q} = \frac{1}{r}\frac{dG}{dr}\,\mathbf{S}\pm\eta'_{i_1 \ldots i_{q-1}}x'_{i_q}$$

von $[\eta'\Gamma]$, in denen alle Indizes $i_1, \ldots, i_q \neq n$ sind. Daraus ergibt sich sofort das gewünschte Resultat. Ohne Normierung des Koordinatensystems kann man das Argument auch darauf stützen, daß jede Komponente $i_1, \ldots, i_{q-1}, i, k$ von $[[\eta'\Gamma]\nu]$ die Vektoren Γ und ν nur in einer der schiefen Kombinationen $\Gamma_i\nu_k - \Gamma_k\nu_i$ enthält.

Für $q \geqq 1$ ist ferner der Oberflächenwert von $(\mathrm{div}\, v)_i$ zu bestimmen. Hier ziehen wir zunächst vor, die Bezeichnung sp' beizubehalten und nicht mit $s'p$ zu vertauschen. Wir operieren also mit $v(p')$ und schreiben z. B. $\mathrm{div}_{p'} v(p')$ als $\mathrm{div}' v$. Zu dieser Divergenz liefert der Teil $\int eG$ von $v(p')$ den Beitrag $\int(e\Gamma') = -\int(e\Gamma)$. Führt man $[e\nu] = c$ ein, so ist $(e\Gamma) = ((c\nu)\Gamma)$, und dies ist wiederum ein Ausdruck, der ν und Γ nur in der schiefen Kombination $\nu_i\Gamma_k - \nu_k\Gamma_i$ enthält. Setzt man also voraus, daß e und darum auch c einer HÖLDER-Bedingung genügt, so ergibt sich als Grenzwert von $\int(e\Gamma')$ der Hauptwert des Integrals

$$\int((c(s)\,\nu(s))\,\Gamma'(ss')),$$

wenn p' auf der Normalen ν' in s' dem Oberflächenpunkt s' zustrebt, ob dies nun von der Innen- oder Außenseite her geschieht.

Bleibt noch der Beitrag zu diskutieren, den der Teil $\int[\eta\Gamma]$ von $v(p')$ zu $\mathrm{div}' v$ liefert. Hier hat man es mit der gleichen Schwierigkeit zu tun, auf die man in der klassischen dreidimensionalen Potentialtheorie bei der normalen Ableitung des Potentials einer Doppelbelegung

stößt. Ich verfahre so, wie ich es seit langem in Vorlesungen über Potentialtheorie zu tun pflegte. Es ist

$$\int [\eta \Gamma] = -\int [\eta(s), \Gamma'(s\,p')] = -\operatorname{rot}' \int (\eta(s) \cdot G(s\,p')).$$

Darum ist $\operatorname{div}' \int [\eta \Gamma] = -\operatorname{div}' \operatorname{rot}' \int (\eta G)$; da aber $\operatorname{div} \operatorname{rot} = \Delta - \operatorname{rot} \operatorname{div}$ und $\Delta' G = -k^2 G$ ist, so kommt

$$\operatorname{div}' \int [\eta \Gamma] = k^2 \cdot \int (\eta G) + \operatorname{rot}' \int (\eta \Gamma'). \tag{22}$$

Was mit dem ersten Summanden rechts geschieht, wenn p' in den Oberflächenpunkt s' hineinrückt, ist klar: er geht in

$$k^2 \cdot \int \eta(s)\, G(s\,s')\, ds$$

über.

Wir untersuchen jetzt das nur für $q \geqq 2$ auftretende zweite Glied in (22), $\int (\eta \Gamma') = -\int (\eta \Gamma) = -\int ((\vartheta \nu) \Gamma)$, wo $\vartheta = [\eta \nu]$. Um das über eine geschlossene Oberfläche Ω sich erstreckende Integral zu berechnen, bedeckt man die Fläche „dachziegel-artig" mit sich überlappenden Gebieten, die je auf ein Koordinatensystem $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ bezogen sind. Man kann dann ϑ additiv in Bestandteile zerlegen (Dieudonné), deren jedes nur in einem der Stücke, genauer in einem kompakten „Kern" eines solchen Stückes verschwindet. Sei $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ die Parameterdarstellung der Fläche in dem von dem Parametersystem ξ bedeckten Stück. Wir haben angenommen, daß diese Darstellungsfunktionen $x_i(\xi)$ stetig differentiierbar sind, daß die Ableitungen einer Hölder-Bedingung genügen und daß die Jacobische Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right\|,$$

— die aus der hingeschriebenen Zeile entsteht, indem man $n-1$ Zeilen untereinander schreibt, in welchen ξ durch $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ersetzt ist —, vom Maximalrang $n-1$ sei. Das ist, was wir eine glatte Fläche nannten. Wir fügen jetzt die Voraussetzung hinzu, daß auch die zweiten Ableitungen von $x_i(\xi)$ existieren und einer Hölder-Bedingung genügen. Wir sprechen dann von einer *glatt-gekrümmten* Fläche. Es gilt z. B. (richtige Orientierung des Systems $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ vorausgesetzt)

$$\nu_1\, ds = \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

So ergibt sich für $(\nu_1 \Gamma_2 - \nu_2 \Gamma_1) \cdot ds$ der Ausdruck

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Indem man zu der ersten Spalte dieser Determinante die bzw. mit $\frac{\partial G}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n}$ multiplizierten folgenden Spalten hinzuaddiert, verwandelt sie sich in

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right|.$$

Ich nehme jetzt an, daß η und darum auch ϑ als Funktion der ξ differentiierbar ist und die Ableitungen einer HÖLDER-Bedingung genügen. Dann kann man auf das Integral

$$(23) \qquad \int \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12} \cdot \left| \frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}$$

partielle Integration so anwenden, daß G von der Differentiation befreit wird. Auf diese Weise verwandelt sich (23) in

$$-\int G \cdot \left| \frac{\partial \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12}}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Schreibt man

$$(24) \qquad \mu_{i_1 \ldots i_{q-2}}(s)\, ds = \mathbf{S} \pm \left| \frac{\partial \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12}}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1},$$

wo die Summe sich alternierend über die $n(n-1)/2$ Mischungen der Ziffern 1, 2 mit 3, ..., n erstreckt, so erhält man

$$(25) \qquad \int (\eta\, \Gamma') = \int \mu(s) \cdot G(s\,p') \cdot ds = \int \mu\, G.$$

In Wahrheit bezieht sich die Zwischenrechnung auf ein durch die Koordinaten ξ bedecktes Stück von $\mathfrak{Q}$ und den zugehörigen Bestandteil von ϑ. Aber wegen der Invarianz des durch (24) eingeführten μ gegenüber Transformationen der Koordinaten ξ ist im Endresultat (25) die Zerstückelung von $\mathfrak{Q}$ und ϑ wieder überwunden.

In diesem Stadium finden wir es zweckmäßig, die Bezeichnung $s\,p'$ wieder gegen $s'\,p$ zu vertauschen. Es handelt sich dann darum, während p auf der Normalen ν im Flächenpunkt s gegen s rückt, den Grenzwert des tangentiellen Teils von rot $\int'(\mu' G) = \int'[\mu'\, \Gamma]$ zu ermitteln $[G = G(s'\,p),\ \Gamma = \Gamma(s'\,p)]$. Das geschieht genau so, wie vorhin für $\int'[\eta'\, \Gamma]$ verfahren wurde. Das Resultat ist der Hauptwert des Integrals $\int'[\mu(s'), \Gamma(s'\,s)]_t$.

Genügt η der Gleichung $\eta(E + K) = 0$, so ist $\eta = -\eta K = \eta K^2 = \ldots$, und daraus schließt man leicht, daß η unsern Forderungen genügt, unter der oben gemachten Voraussetzung, daß $\mathfrak{Q}$ glatt-gekrümmt ist.

§ 9.

Schlußbemerkungen.

Wird in der elektrischen Randwertaufgabe $\gamma(s) = 0$ angenommen, so erfüllt die Divergenz $w = \operatorname{div} u$ der im Außenraum konstruierten

zulässigen Lösung $u(p)$ die Randbedingung $w_t = 0$ auf Ω. Außerdem ist $\operatorname{div} w = 0$ in ganz W. Da man aus dem Ausdruck von u entnimmt, daß auch w der Ausstrahlungsbedingung

$$R^{\frac{n-1}{2}} \{(\operatorname{rot} w, \nu) + i k w_t\}_{\text{auf } \Sigma_R} \to 0 \text{ mit } R \to \infty$$

genügt, so ergibt sich nach dem auf w anzuwendenden Eindeutigkeits-Argument, daß w im Außenraum identisch verschwindet, $\operatorname{div} u = 0$. Damit reduziert sich die Schwingungsgleichung auf $\operatorname{div} \operatorname{rot} u + k^2 u = 0$. Ohne diese Bemerkung wäre die Behandlung des elektromagnetischen Feldes unvollständig.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 120—121 (1952).

Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit der Differentiationen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsinki (Finnland).

1. Dieser Satz ist bekanntlich von H. A. Schwarz in folgender Fassung gegeben und bewiesen worden:

Sei $f(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ erklärte, nebst ihren ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y stetige Funktion. Falls die zweite Ableitung f_{xy} in der Umgebung von (a, b) existiert und im Punkte (a, b) stetig ist, so existiert f_{yx} in (a, b), und es gilt in diesem Punkte

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Im folgenden soll eine einfache Beweisvariante gegeben werden.

2. Beweis. — Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $\varrho_\varepsilon > 0$, so daß für $|x - a| \leqq \varrho_\varepsilon$, $|y - b| \leqq \varrho_\varepsilon$ erstens die Stetigkeit von f, f_x, f_y erfüllt ist und zweitens [1])

$$f_{xy}(x, y) = f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle. \tag{1}$$

Seien h, k zunächst fest so gewählt, daß $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$, $0 < |k| < \varrho_\varepsilon$. Wir betrachten das Rechteck mit dem Rand $R = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$, wo $P_1 = (a, b)$, $P_2 = (a + h, b)$, $P_3 = (a + h, b + k)$, $P_4 = (a, b + k)$, $P_5 = P_1$. Dann ist

$$\int_R f_x \, dx + f_y \, dy = \sum_{\nu=1}^{4} (f(P_{\nu+1}) - f(P_\nu)) = 0. \tag{2}$$

Nach dem Mittelwertsatz wird für $0 \leqq |x - a| \leqq |h|$, mit Rücksicht auf (1),

$$f_x(x, b + k) - f_x(x, b) = f_{xy}(x, b + \Theta k)\, k = k\,(f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle),$$

wo $0 < \Theta < 1$, und also

$$-\int_R f_x \, dx = \int_{x=a}^{a+h} (f_x(x, b + k) - f_x(x, b))\, dx = h\,k\,(f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle). \tag{3}$$

Andererseits ist nach dem Mittelwertsatz (der Integralrechnung)

$$\begin{aligned} \int_R f_y \, dy &= \int_{y=b}^{b+h} (f_y(a + h, y) - f_y(a, y))\, dy \\ &= k\,(f_y(a + h, b + \Theta' k) - f_y(a, b + \Theta' k)), \end{aligned} \tag{4}$$

[1]) $\langle \varepsilon \rangle$ bezeichnet im folgenden jede Zahl mit einem Betrag $< \varepsilon$.

wo $0 < \Theta' < 1$. Aus (2), (3) und (4) folgt, daß

$$\frac{f_y(a+h, b+\Theta' k) - f_y(a, b+\Theta' k)}{h} = f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle$$

für jedes h und k mit $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$, $0 < |k| < \varrho_\varepsilon$ gilt.

Bei festem h lasse man jetzt $k \to 0$ konvergieren. Dann wird, wegen der Stetigkeit der linken Seite für $k = 0$,

$$\frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} = f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle$$

für $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$; d. h. es existiert $f_{yx}(a, b)$ und es ist $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 2. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2. S. 122—130 (1952).

Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Im folgenden bedeutet p eine ungerade Primzahl; alle Gleichheiten sind als Kongruenzen modulo p zu verstehen. Das Wort Rest bedeutet quadratischer Rest (mod p), entsprechend Nichtrest.

Die Menge R der $\frac{p-1}{2}$ Reste hat folgende Eigenschaften. Wenn man alle Zahlen von R mit ein und derselben Zahl aus R multipliziert, entsteht wieder die Menge R. Wenn man sie mit ein und demselben Nichtrest multipliziert, entsteht die Menge aller Nichtreste. Durch die ersterwähnte Eigenschaft ist die Menge R bereits eindeutig festgelegt, das heißt: Wenn eine Menge M von $\frac{p-1}{2}$ zu p relativ primen Zahlen die Eigenschaft hat, daß sie durch Multiplikation mit einer beliebigen Zahl aus M sich stets reproduziert, so ist M die Menge der Reste. Denn die Menge *aller* $p-1$ zu p relativ primen Zahlen bildet für die Multiplikation eine zyklische Gruppe, und die Menge M wird durch die geforderte Eigenschaft als Untergruppe vom Index 2 charakterisiert; aber da kann es nur *eine* geben und das ist eben die Menge der Reste.

Obwohl nun die Reproduktion durch Multiplikation die Menge der Reste eindeutig festlegt, so gibt diese Eigenschaft doch keinerlei Aufschluß über die Verteilung der Reste innerhalb der Zahlenreihe. Einen gewissen Einblick in diese Verteilung wird man aber gewinnen, wenn man sich fragt, was aus R entsteht, wenn man zu jeder Zahl von R ein und dieselbe Zahl *addiert*; wieviel Reste und wieviel Nichtreste werden dabei herauskommen? Die Antwort auf diese Frage ist überraschend einfach. Dabei empfiehlt es sich, im Gegensatz zu dem sonst in der Zahlentheorie Zweckmäßigen, auch die Zahl 0 zu den Resten zu rechnen; schließlich gehört ja auch 0 zu den Zahlen a, für welche die Kongruenz $x^2 \equiv a$ lösbar ist.

§ 2.

Formulierung der Sätze.

Satz 1. Sei $p = 4k - 1$. Sind dann

$$r_1, r_2, \ldots, r_{2k}$$

die $2k$ Reste (inklusive 0) und ist a eine beliebige zu p prime Zahl, so sind unter den $2k$ Zahlen

$$r_1 + a, r_2 + a, \ldots, r_{2k} + a$$

stets k Reste (eventuell 0 dabei) und k Nichtreste.

Satz 2. Sei $p = 4k - 1$. Sind dann

$$n_1, n_2, \ldots, n_{2k-1}$$

die $2k - 1$ Nichtreste und ist a eine beliebige zu p prime Zahl, so sind unter den $2k - 1$ Zahlen

$$n_1 + a, n_2 + a, \ldots, n_{2k-1} + a$$

stets k Reste (eventuell 0 dabei) und $k - 1$ Nichtreste.

Satz 3. Sei $p = 4k + 1$. Sind dann

$$r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$$

die $2k + 1$ Reste (inklusive 0) und ist a eine zu p prime Zahl, so sind unter den $2k + 1$ Zahlen

$$r_1 + a, r_2 + a, \ldots, r_{2k+1} + a,$$

falls a selbst Rest ist, $k + 1$ Reste (eventuell 0 dabei)[1]) und k Nichtreste. Wenn aber a Nichtrest. so sind es umgekehrt k Reste (eventuell 0 dabei)[2]) und $k + 1$ Nichtreste.

Satz 4. Sei $p = 4k + 1$. Sind dann

$$n_1, n_2, \ldots, n_{2k}$$

die $2k$ Nichtreste und ist a eine zu p prime Zahl, so sind unter den $2k$ Zahlen

$$n_1 + a, n_2 + a, \ldots, n_{2k} + a,$$

falls a Rest ist, k Reste (eventuell 0 dabei)[3]) und k Nichtreste. Wenn aber a Nichtrest ist, sind es $k + 1$ Reste (eventuell 0 dabei)[4]) und $k - 1$ Nichtreste.

[1]) 0 ist sogar *stets* dabei, weil für $p = 4k + 1$ mit a stets auch $-a$ Rest ist, so daß unter den r_ν die Zahl $-a$ vorkommt.

[2]) Diesmal ist 0 in Wahrheit *nie* dabei, weil mit a stets auch $-a$ Nichtrest ist, so daß unter den r_ν die Zahl $-a$ nicht vorkommt.

[3]) 1 Wahrheit ist 0 *nie* dabei; Begründung wie vorhin.

[4]) 0 t sogar *stets* dabei; Begründung wie vorhin.

§ 3.

Beweise.

Es wird genügen, die Sätze 1 und 3 zu beweisen. Denn Satz 2 folgt ja, weil die p Zahlen

$$r_1 + a, \ldots, r_{2k} + a, n_1 + a, \ldots, n_{2k-1} + a$$

ein volles System inkongruenter Zahlen bilden, sofort aus Satz 1. Ebenso folgt Satz 4 sofort aus Satz 3, da jetzt die p Zahlen

$$r_1 + a, \ldots, r_{2k+1} + a, n_1 + a, \ldots, n_{2k} + a$$

ein volles System inkongruenter Zahlen bilden.

Die Beweise für Satz 1 und 3 lassen sich ein Stück weit gemeinsam führen. Wir setzen $r_\nu \equiv s_\nu^2$. Damit dann $r_\nu + a$ ein Rest, also etwa $\equiv t_\nu^2$ ist, muß $s_\nu^2 + a \equiv t_\nu^2$ sein, also

$$s_\nu^2 - t_\nu^2 \equiv -a, \quad s_\nu - t_\nu \equiv -\frac{a}{s_\nu + t_\nu}, \quad 2 s_\nu \equiv s_\nu + t_\nu - \frac{a}{s_\nu + t_\nu}.$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß $s_\nu^2 + a$ Rest ist, besteht also darin, daß es eine zu p prime Zahl u gibt, für die

$$s_\nu \equiv \frac{1}{2}\left(u - \frac{a}{u}\right) \tag{1}$$

ist. Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wenn (1) gilt und man setzt noch $\frac{1}{2}\left(u + \frac{a}{u}\right) \equiv t$, so ist

$$u \equiv t + s_\nu, \quad \frac{a}{u} \equiv t - s_\nu,$$

also durch Multiplikation

$$a \equiv t^2 - s_\nu^2, \quad s_\nu^2 + a \equiv t^2,$$

so daß $s_\nu^2 + a$ in der Tat Rest ist.

Die Zahl $r_\nu + a$ wird also dann und nur dann Rest sein, wenn es eine zu p prime Zahl u gibt derart, daß

$$r_\nu \equiv \frac{1}{4}\left(u - \frac{a}{u}\right)$$

ist. Unter den Zahlen $r_\nu + a$ gibt es also soviel Reste, wie es inkongruente Zahlen der Form $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ gibt. *Zum Beweis von Satz 1 ist also zu zeigen, daß es für $p = 4k - 1$ genau k inkongruente Zahlen dieser Form gibt; und zum Beweis von Satz 3 ist zu zeigen, daß es für $p = 4k + 1$ genau $k + 1$ oder k Zahlen dieser Form gibt, je nachdem a Rest oder Nichtrest ist.*

Nun hat bei gegebenem u die Kongruenz

$$(2) \qquad \left(v - \frac{a}{v}\right)^2 \equiv \left(u - \frac{a}{u}\right)^2$$

die vier Lösungen

$$(3) \qquad v \equiv u, \quad v \equiv -u, \quad v \equiv \frac{a}{u}, \quad v \equiv -\frac{a}{u}$$

und keine anderen. Diese sind voneinander verschieden, außer wenn einmal $u \equiv \frac{a}{u}$ oder $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. In diesen Fällen sind je zwei der Lösungen (3) einander gleich, so daß es nur zwei verschiedene sind[5]).

Jetzt trennen sich die Beweise für Satz 1 und 3. Im Fall von Satz 1 ist $p = 4k-1$, also eine der beiden Zahlen $\pm a$ Rest, die andere Nichtrest. Wenn a Rest ist, gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für die $u \equiv \frac{a}{u}$ ist, und keine, für die $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. Wenn aber $-a$ Rest ist, gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für die $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist, und keine, für die $u \equiv \frac{a}{u}$ ist.

Läßt man daher in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u alle $p-1 = 4k-2$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so wird man zweimal die Zahl $\left(u_1 - \frac{a}{u_1}\right)^2$ erhalten, nämlich für $u \equiv u_1$ und für $u \equiv -u_1$. Unter den $4k-2-2$ anderen werden je vier einander gleich sein. Die Anzahl der inkongruenten ist also

$$1 + \frac{4k-4}{4} = k,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Im Fall von Satz 3 ist $p = 4k+1$ und man muß unterscheiden, ob a Rest oder Nichtrest ist. Wenn a und folglich auch $-a$ Nichtrest ist, sind die vier Lösungen (3) der Kongruenz (2) alle voneinander verschieden. Läßt man also in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u alle $p-1 = 4k$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so wird jede Zahl, die überhaupt kommt, genau viermal kommen. Die Anzahl der inkongruenten ist also $\frac{4k}{4} = k$, womit dieser Fall erledigt ist.

Wenn aber a und folglich auch $-a$ Rest ist, so gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für welche $u \equiv \frac{a}{u}$ ist, und ebenso zwei Zahlen $u_2, -u_2$, für welche $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. Läßt man also in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u

[5]) Auch im Fall $u \equiv -u$ scheint sich die Zahl der Lösungen zu verringern, aber in Wahrheit gibt es diesen Fall gar nicht, weil ja u relativ prim zu p sein muß.

wieder alle $p-1=4k$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so erhält man jede der beiden inkongruenten[6]) Zahlen

$$\left(u_1-\frac{a}{u_1}\right)^2,\quad \left(u_2-\frac{a}{u_2}\right)^2$$

zweimal, und unter den anderen $4k-4$ Zahlen wird jede, die überhaupt kommt, genau viermal kommen. Die Anzahl der inkongruenten ist also

$$2+\frac{4k-4}{4}=k+1,$$

womit auch dieser Fall von Satz 3 erledigt ist.

§ 4.

Folgerungen.

Die bewiesenen Sätze gestatten, über die Verteilung der Reste und Nichtreste schon Wesentliches auszusagen. So läßt sich aus Satz 1 und 2, indem man speziell $a=1$ nimmt, sofort folgendes ablesen:

Satz 5. Im Fall $p=4k-1$ gibt es genau k Paare aufeinander folgender Reste (inklusive das Paar 0,1) und $k-1$ Paare aufeinander folgender Nichtreste.

Für $p=4k+1$ ist zu beachten, daß $p-1$ quadratischer Rest ist, und da ihm die Zahl $p(\equiv 0)$ folgt, stellt $p-1,0$ ein Paar aufeinander folgender Reste dar. Aus Satz 3 und 4 folgt dann unmittelbar

Satz 6. Im Fall $p=4k+1$ gibt es genau $k+1$ Paare aufeinander folgender Reste (inklusive die Paare 0,1 und $p-1,0$) und k Paare aufeinander folgender Nichtreste.

Die Sätze 5 und 6 finden sich schon, wie ich dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Jahrgang 1896, S. 146 entnehme, in einer mir unzugänglichen russisch geschriebenen Arbeit von N. Aladow (Math. Sammlung der Math. Gesellschaft Moskau **18**, 61—75).

Versteht man unter der „Länge" eines Reste- oder Nichtrestepaares b, c die kleinste positive Zahl, die zu einer der Zahlen $b-c$ oder $c-b$ kongruent ist, so daß jede Länge $\leqq\frac{p-1}{2}$ ist, so folgt aus Satz 1 und 2 sofort

Satz 7. Im Fall $p=4k-1$ gibt es zu jeder vorgegebenen Länge a genau k Restepaare und $k-1$ Nichtrestepaare.

Für $p=11$, also $k=3$ sind z. B.

(0,4), (1,5), (5,9) die drei Restepaare,
(2,6), (6,10) die zwei Nichtrestepaare

der Länge 4.

---

[6]) Wären sie kongruent, so wäre $u_2\equiv u_1$ oder $-u_1$ oder $\frac{a}{u_1}$ oder $-\frac{a}{u_1}$, was aber wegen $u_1\equiv\frac{a}{u_1}$, $u_2\equiv-\frac{a}{u_2}$ alles nicht möglich ist.

Weiter folgt aus Satz 3 und 4:

Satz 8. Im Fall $p = 4k+1$ gibt es zu einer vorgegebenen Länge a, falls a Rest ist, genau $k+1$ Restepaare und k Nichtrestepaare; falls a Nichtrest ist, gibt es genau k Restepaare und $k-1$ Nichtrestepaare.

Für $p = 13$, also $k = 3$, gibt es z. B. zur Länge 3, weil 3 Rest ist,

vier Restepaare: (0,3), (1,4), (9,12), (10,0)
und drei Nichtrestepaare: (2,5), (5,8), (8,11).

Zur Länge 5 aber gibt es, weil 5 Nichtrest ist,

nur drei Restepaare: (4,9), (9,1), (12,4)
und zwei Nichtrestepaare: (2,7), (6,11).

Gruppiert man die in der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1$$

enthaltenen Reste in einzelne Blöcke aufeinander folgender Zahlen (wobei einige Blöcke vielleicht nur aus einer einzigen Zahl bestehen), so ist jede Lücke zwischen zwei benachbarten Blöcken durch einen Block aufeinander folgender Nichtreste ausgefüllt. Wenn man jede Zahl um 1 vermehrt, so wird von jedem Block die letzte Zahl und nur sie ihren Restcharakter ändern. Wie viele Zahlen das tun, wird aber in den Sätzen 1 bis 4 ausgesprochen, wodurch sich ohne weiteres die Zahl der Blöcke ergibt:

Satz 9. Für $p = 4k-1$ bilden die $2k$ Reste (inklusive 0) und ebenso die $2k-1$ Nichtreste je k Blöcke von aufeinander folgenden Zahlen.

Satz 10. Für $p = 4k+1$ bilden die $2k+1$ Reste (inklusive 0) und ebenso die $2k$ Nichtreste je k Blöcke von aufeinander folgenden Zahlen.

Bei Satz 10 ist zu beachten, daß $p-1$ und 0 zwei aufeinander folgende Reste sind, also demselben Block angehören. Für $p = 13$, also $k = 3$, hat man z. B. für die Reste die drei Blöcke

$$0,1), \quad (3,4), \quad (9,10), \quad (12,$$

wobei die Schlußzahl 12 mit den Anfangszahlen 0,1 zusammen nur einen Block bildet. In den Lücken stehen die drei Blöcke aufeinander folgender Nichtreste:

$$(2), \quad (5, 6, 7, 8), \quad (11).$$

§ 5.

Ergänzungen zum Fall $p = 4k-1$.

Schreibt man die $2k$ Reste (inklusive 0) in eine Zeile, in die nächste Zeile darunter die um 1 vermehrten Zahlen, in die folgende Zeile

darunter die abermals um 1 vermehrten Zahlen usw., so erhält man das Schema von $p = 4k - 1$ Zeilen und $2k$ Spalten:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} r_1, & r_2, & \ldots, & r_{2k} \\ r_1 + 1, & r_2 + 1, & \ldots, & r_{2k} + 1 \\ r_1 + 2, & r_2 + 2, & \ldots, & r_{2k} + 2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_1 + p - 1, & r_2 + p - 1, & \ldots, & r_{2k} + p - 1. \end{cases}$$

Hier hat nach Satz 1 die erste Zeile mit jeder folgenden genau k Zahlen gemein. Aber auch zwei beliebige Zeilen

$$r_1 + b,\ r_2 + b,\ \ldots,\ r_{2k} + b$$
$$r_1 + c,\ r_2 + c,\ \ldots,\ r_{2k} + c$$

haben genau k Zahlen miteinander gemein. Denn nach Satz 1 haben ja die beiden Zeilen

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{2k}$$
$$r_1 + c - b,\ r_2 + c - b,\ \ldots,\ r_{2k} + c - b$$

genau k Zahlen gemein, und hieraus entstehen durch Addition von b die obigen zwei Zeilen, für die also dasselbe gilt.

Diese Verhältnisse lassen sich in folgender Weise illustrieren. Man denke sich auf der unendlichen Zahlengeraden die ganzen Zahlen markiert und zwar die quadratischen Reste (inklusive $0, \pm p, \pm 2p, \ldots$) etwa durch dicke, die Nichtreste durch dünne Marken (Fig. 1 für $p = 7$). Ferner seien auf einem Stab der Länge $L (> p - 1, < p)$ die p Zahlen $0, 1, \ldots, p - 1$ in gleicher Weise markiert. Schiebt man nun den Stab an der Linie entlang, so werden in jeder Lage, wo ganze Zahlen auf ganze Zahlen treffen, entweder alle dicken Marken des Stabes oder genau die Hälfte wieder dicken Marken der Linie gegenüberliegen. In Fig 1. ist der Stab in drei verschiedenen Lagen gezeichnet.

Fig. 1.

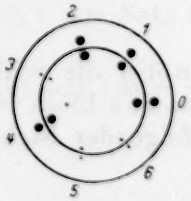


Fig. 2.

Besonders anschaulich ist es auch, wenn man die Zahlenlinie auf der Peripherie einer Kreisscheibe aufwickelt, also die Ecken eines regulären p-Ecks mit den Zahlen $0, 1, \ldots, p - 1$ durchnumeriert und die Reste bzw. Nichtreste durch dicke bzw. dünne Marken bezeichnet.

Eine zweite Kreisscheibe mit etwas kleinerem Radius sei konzentrisch und drehbar auf der ersten befestigt und ihr Rand mit der entsprechenden Markierung versehen, wobei zunächst die dicken Marken den dicken gegenüberliegen sollen (Fig. 2 für $p = 7$). Wenn man nun die Drehscheibe um den Winkel φ oder 2φ oder $3\varphi \ldots$ dreht, wo φ den Zentriwinkel des p-Ecks bedeutet, so wird jedesmal (außer bei einer vollen Drehung) genau die Hälfte aller dicken Marken wieder dicken gegenüberliegen [7]).

Das Schema (A) hat die Eigenschaft, daß je zwei Zeilen erstens konstante Differenz haben und zweitens genau k gemeinsame Zahlen aufweisen. Auf die Reihenfolge der Zeilen und Spalten soll es nicht ankommen. Ersetzt man im Schema (A) jede Zahl α durch die entgegengesetzte $-\alpha$, so entsteht ein Schema mit der gleichen Eigenschaft, das wir (B) nennen wollen. Im Fall $p = 3$ sind beide Schemas miteinander identisch; die drei Zeilen sind einfach die drei aus den Zahlen 0, 1, 2 zu bildenden Paare und weitere derartige Schemas gibt es nicht. Für $p > 3$ ist aber (B) mit (A) nicht identisch. Denn das Schema (B) enthält in der ersten Zeile die Zahl 0 und die $2k - 1$ Nichtreste, also keinesfalls k Reste, so daß diese Zeile nicht im Schema (A) auftritt. Bei der geometrischen Deutung auf der Zahlenlinie oder Kreisscheibe gehen beide Schemas durch Spiegelung ineinander über.

Man kann nun fragen, ob es außer den Schemas (A) und (B) noch weitere Schemas der gleichen Art gibt. Für $p = 7$ ist das nicht der Fall. Denn die vier dicken Marken müssen in zwei Blöcke aufeinander folgender Marken zerfallen, was sich aus den geforderten Eigenschaften des Schemas genau so ergibt wie Satz 9 aus Satz 1. Aber zwei Blöcke mit je zwei dicken Marken erweist ein Blick auf die Drehscheibe als unmöglich, weil dann nach einer Drehung um den zweifachen Zentriwinkel immer nur eine dicke Marke einer dicken gegenüberliegt statt zwei, wie verlangt. Es muß also ein Block mit einer und ein Block mit drei dicken Marken sein. Aber da gibt es nur die in Fig. 2 gezeichnete Anordnung und ihr Spiegelbild. Auch für $p = 11$ gibt es kein weiteres Schema, wiewohl die Durchführung aller Versuche auf der Drehscheibe jetzt schon wesentlich mühsamer ist. Für $p = 19$ kann ich ebenfalls kein weiteres Schema angeben. Doch sind die durchzuprüfenden Möglichkeiten jetzt schon so mannigfaltig, daß ich auf eine lückenlose Prüfung verzichtet habe. Und erst recht wird man für $p > 19$ ohne neue Ideen nicht herauskriegen, wieviel verschiedene Schemas es gibt.

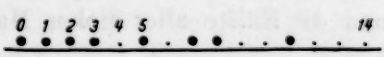
Wenn $p = 4k - 1$ keine Primzahl ist, bleibt die Frage, ob es überhaupt ein Schema der verlangten Art gibt, völlig offen. Ich möchte

[7]) Der phantasievolle Leser kann die Drehscheibe auch zu einem Gesellschaftsspiel verarbeiten, indem er die Scheiben mit Personen statt mit Marken besetzt.

wohl annehmen, daß es stets mehrere solche Schemas gibt, doch kann ich kein Rezept angeben, nach dem man sicher eines erhält. Für $p = 15$ fand ich eines, dessen erste Zeile so aussieht:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11$$

oder auf dem Stab



Daneben gibt es das durch Spiegelung entstehende Schema mit der ersten Zeile 0, 14, 13, 12, 10, 8, 7, 4, oder der Größe nach geordnet:

$$0,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14.$$

Die beiden Schemas sind nicht identisch; vielleicht gibt es auch noch andere.

(Eingegangen am 18. März 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 131—133 (1952).

Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

R. Moufang hat gezeigt [1]), daß in einer projektiven Ebene aus dem Satz vom vollständigen Viereck der Satz von Desargues für den Sonderfall der Inzidenz von Zentrum und Achse folgt. Unter einer *projektiven Ebene* ist dabei zu verstehen eine Menge, deren Elemente als *Punkte* bezeichnet werden, zusammen mit einer Menge von Teilmengen, *Geraden* genannt, welche die Bedingungen erfüllen: Zwei verschiedene Punkte liegen in genau einer Geraden; zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam; es gibt vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Der *Satz vom vollständigen Viereck* (V), der übrigens nicht in jeder projektiven Ebene zu gelten braucht, besagt: Sind A, B, C, D vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und setzt man [2]) $P = AB \wedge CD$ sowie $Q = AC \wedge BD$ $(\neq P)$, so ist $PQ \wedge AD$ bereits durch P, Q und $PQ \wedge BC$ eindeutig bestimmt. P, Q und $R = AD \wedge BC$ $(\neq P, Q)$ werden als die *Diagonalpunkte* des (vollständigen) Vierecks mit den *Eckpunkten* A, B, C, D bezeichnet. Ihre Kollinearität, also $R \in PQ$, bedeutet dasselbe wie $PQ \wedge AD = PQ \wedge BC$. M. Hall hat nun darauf hingewiesen [3]), daß der Moufangsche Beweis die Voraussetzung der Nichtkollinearität der Diagonalpunkte in jedem Viereck benötigt. Ich werde im folgenden zeigen, daß man diese Voraussetzung noch etwas abschwächen kann: Unter der Voraussetzung V folgt nämlich aus der Kollinearität der Diagonalpunkte in *einem* Viereck dasselbe für *jedes* Viereck. Die Voraussetzung V wird in den folgenden Sätzen nicht mehr besonders erwähnt.

Hilfssatz 1. *Sind P, Q, R die Diagonalpunkte eines Vierecks und R' ein Punkt $\neq P, Q$ auf PR, so sind auch P, Q, R' Diagonalpunkte eines Vierecks.*

---

[1]) Math. Ann. 106 (1932), 755—795.

[2]) AB bedeutet die Gerade, welche die beiden Punkte A, B enthält und $g \wedge h$ den Punkt, welcher in jeder der beiden Geraden g, h liegt.

[3]) Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 229—277, insb. 269, Fußn. 19.

Beweis. Die Bezeichnungen A, B, C, D seien so wie oben verwandt. Wegen $R' \neq Q$ kann R' nicht auf AC und BD zugleich liegen. O.B.d.A. sei daher angenommen, daß R' nicht auf BD liegt. Setzt man nun $DR' \wedge AB = A'$ und $BR' \wedge CD = C'$, so sind A', P, R', C' die Eckpunkte eines Vierecks mit den beiden Diagonalpunkten $B = A'P \wedge R'C'$, $D = A'R' \wedge PC'$. Ferner sind natürlich auch A, P, R, C die Eckpunkte eines Vierecks mit denselben beiden Diagonalpunkten. Wegen $PR' \wedge BD = PR \wedge BD$ folgt daher aus V die Gleichung $A'C' \wedge BD = AC \wedge BD = Q$. Wegen $R' = BC' \wedge DA'$ und $P = A'B \wedge C'D$ sind somit A', B, C', D die Eckpunkte eines Vierecks mit den Diagonalpunkten P, Q, R'.

Hilfssatz 2. *Hat ein Viereck kollineare Diagonalpunkte, so gilt dasselbe für jedes Viereck, welches mit diesem zwei Diagonalpunkte gemeinsam hat.*

Beweis. Die Bezeichnungen A, B, C, D, P, Q, R werden wie oben verwandt, und R liege auf PQ. Will man jetzt die Kollinearität der Diagonalpunkte eines Vierecks beweisen, das ebenfalls P und Q als Diagonalpunkte besitzt, so darf man sich auf den Fall eines Vierecks mit den Eckpunkten A', C', B, D beschränken, wobei A' auf AB, C' auf CD und Q auf $A'C'$ liegt; denn durch höchstens viermaliges Anwenden dieses Sonderfalles gelangt man offenbar zu einem beliebigen Viereck mit Diagonalpunkten P, Q. Man betrachtet nun wie im Beweis von Hilfssatz 1 die Vierecke mit den Eckpunkten A, P, R, C bzw. A', P, R', C', wobei $R' = BC' \wedge DA'$ gesetzt ist, und schließt aus V, daß $PR' \wedge BD = PR \wedge BD$ und somit tatsächlich $R' \in PR$, also $R' \in PQ$ ist.

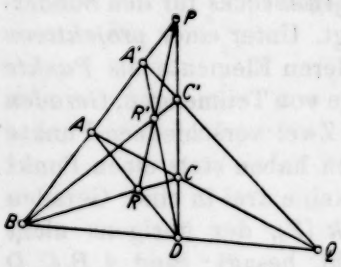


Fig. 1.

Satz. *Hat ein Viereck kollineare Diagonalpunkte, so gilt dasselbe für jedes Viereck.*

Beweis. Im Widerspruch zur Behauptung seien die Diagonalpunkte P', Q', R' eines Vierecks nicht kollinear, während P, Q, R kollineare Diagonalpunkte eines anderen Vierecks sind. Offenbar kann man die Bezeichnungen so wählen, daß R' nicht auf PQ liegt. Dann ist $PQ \neq P'R'$, $PQ \neq Q'R'$ und mit $PQ \wedge P'R' = P''$, $PQ \wedge Q'R' = Q''$ ferner

$$Q' \neq P'' \neq R' \neq Q'' \neq P''.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es daher ein Viereck mit den Diagonalpunkten P'', Q', R' und weiter eins mit den Diagonalpunkten P'', Q'', R'. Werden schließlich die Bezeichnungen P, Q noch so gewählt, daß $P \neq Q''$ ist, so gewinnt man nach Hilfssatz 1 ein Viereck mit den Diagonalpunkten P, Q'', R' und weiter eins mit den Diagonalpunkten P, Q, R'. Da diese nicht kollinear sind, hat sich so ein Widerspruch zu Hilfssatz 2 ergeben.

Daß ohne die Voraussetzung V der Satz nicht bewiesen werden kann, zeigt das folgende Beispiel. Zu der Teilebene[4]), welche aus acht Punkten A, B, C, D, P, Q, R, D' und den sieben Geraden $\{A, B, P\}$, $\{C, D, P\}$, $\{B, D, Q\}$, $\{A, C, Q\}$ $\{A, D, R\}$ $\{B, C, R\}$, $\{P, Q, R\}$ besteht, wird eine projektive Ebene als freie Erweiterung gebildet. Beim ersten Schritt werden dabei die Verbindungsgeraden AD', BD', ... hinzugefügt und beim zweiten Schritt die Schnittpunkte $P' = AB \wedge CD'$, $Q' = AC \wedge BD'$, $R' = AD' \wedge BC$, ... Da bei keinem der zur freien Erweiterung führenden Konstruktionsschritte Inzidenzen zwischen bereits vorher gebildeten Elementen eingeführt werden, liegen P', Q', R' in der freien Erweiterung nicht auf einer Geraden.

[4]) Zu den Begriffen Teilebene (partial plane) und freie Erweiterung siehe M. Hall a. a. O. [3]), 233—243.

(Eingegangen am 3. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 134—151 (1952).

Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Karl Zeller in Tübingen[1]).

1. Einleitung.

Wir betrachten Folgen komplexer Zahlen x_k $(k = 0, 1, \ldots)$ und Matrizen $A = \{a_{nk}\}$ mit komplexen Elementen a_{nk} $(n, k = 0, 1, \ldots)$. Wir sagen, daß die Matrix A oder das Matrixverfahren A die Folge x_k zum Werte x *limitiert*, wenn alle Summen

$$x_n^A = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

existieren und $\lim_n x_n^A = x$ gilt. Die Menge $\mathfrak{A}$ der A-limitierbaren Folgen heißt das *Wirkfeld* von A.

Wir nennen $\{s_k\}$ eine *Faktorfolge* (zu einer A-limitierbaren Folge x_k), wenn auch $\{x_k s_k\}$ von A limitiert wird. Das erste Ziel der Arbeit ist, unter gewissen Bedingungen Faktorfolgen zu bestimmen. Wir erläutern den von uns eingeschlagenen Weg an einem Beispiel.

Die Matrix A sei permanent (vgl. die Bezeichnungen in § 2) und limitiere die beschränkte Folge x_k zum Werte Null. Dann besitzt die Matrix G mit den Elementen $g_{nk} = a_{nk} x_k$ die Eigenschaften

$$(\mathrm{Zr}) \qquad \Big|\sum_{k=r}^{\infty} g_{nk}\Big| \leqq M \qquad (n, r = 0, 1, \ldots),$$

$$(\mathrm{Zs}_0) \qquad \lim_n \textstyle\sum_k g_{nk} = 0,$$

$$(\mathrm{Sp}_0) \qquad \lim_n g_{nk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Satz 3.2 besagt, daß wir natürliche Zahlen $q_0 < q_1 < \cdots$ so bestimmen können, daß G alle Folgen s_k limitiert, die der Bedingung

$$|\mathrm{Q}| \qquad \sum_{k=q_i+1}^{q_{i+1}} |s_k - s_{k-1}| = \sigma_i = o(1)$$

genügen. M. a. W.: G limitiert alle „genügend langsam schwankenden" Folgen s_k. Diese $\{s_k\}$ sind nun offenbar Faktorfolgen bezüglich A und $\{x_k\}$. Wir erhalten also in der Form $\{x_k s_k\}$ zahlreiche weitere A-limitierbare Folgen; unter diesen befinden sich unbeschränkte (§ 9).

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit bildete den Gegenstand eines Vortrags, den Verf. im September 1951 auf der DMV-Tagung in Berlin hielt.

Wir können das Ergebnis auch in die Form eines Limitierbarkeitskriteriums kleiden: „Eine Folge $\{y_k\}$ ist A-limitierbar, wenn sie in der Form $\{x_k s_k\}$ darstellbar ist, wo ...“.

Die damit beschriebene Methode der Faktorfolgen wurde schon von AGNEW [1] angewandt (man vgl. die Bemerkung am Ende von 3.4). Verf. verdankt der AGNEWschen Arbeit mancherlei Anregungen.

In 3.2 bestimmen wir überdies die Klasse der Matrizen, für die irgendeine Bedingung der Form $|Q|$ ein Limitierbarkeitskriterium ist. Die Sätze 3.1, 3.3, 3.4 und 3.5 sind von derselben Art. In 3.1 tritt dabei die stärkste, in 3.5 die schwächste Schwankungsbedingung auf. 3.6 bringt ein einfaches Limitierbarkeitskriterium anderer Gestalt.

Mit $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ bezeichnen wir — siehe § 4 — die Menge derjenigen $\{x_k\}$ aus einem Wirkfeld $\mathfrak{A}$, die so beschaffen sind, daß die oben definierte Matrix G den Voraussetzungen von $3.i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ genügt. In §§ 5—7 untersuchen wir $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ näher ($\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_5$ sind weniger interessant), u. a. mit Verwendung von Faktorfolgen, wobei wir für diese Unterräume des Wirkfeldes Vergleichs- und Approximationssätze sowie Größenordnungs- und Umkehrbedingungen aufstellen.

Weiter bedeutet $\mathfrak{A}_0$ eine Untermenge des Wirkfeldes, die bei permanenten Matrizen genau die zu Null limitierten Folgen umfaßt, bei anderen Matrizen in naheliegender Verallgemeinerung definiert ist. Von besonderer Bedeutung sind nun die Matrizen mit $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$. Zu diesen gehört z. B. das C_1-Verfahren. 7.5 liefert damit u. a. eine Variante des Beweises für den $O - C_1 - K$-Umkehrsatz. Für den Nachweis der Eigenschaft $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ ist ein Ergebnis aus § 8 wichtig, das besagt: Gilt für eine Matrix A die — relativ leicht nachzuweisende — Beziehung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$, so ist sogar $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$.

In § 9 beweisen wir: Limitiert eine konvergenztreue Matrix eine beschränkt-divergente Folge, so auch eine unbeschränkte Folge. Dabei können wir über die zugehörigen Reihenglieder — d. h. die ersten Differenzen der Folgen — gewisse zusätzliche Aussagen machen, aus denen sich Beziehungen zwischen Umkehrsätzen ergeben (siehe 9.2).

Mit Hilfe der Ergebnisse des § 3 können wir auch nicht-limitierte Folgen konstruieren und damit weitere Umkehrsätze erhalten (§ 10). § 11 bringt einen Satz über Matrizen, die mit zwei limitierten Folgen x_k und y_k stets auch $\{x_k y_k\}$ limitieren. § 12 weist auf einige Verallgemeinerungen hin, die Integraltransformationen und den Durchschnitt abzählbar vieler Wirkfelder betreffen.

Die Untermengen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ sind auch leicht vom funktionalanalytischen Standpunkt aus zu charakterisieren. Man vergleiche dazu die Veröffentlichungen des Verfassers [12, 13], in denen einige Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf anderem Wege erhalten wurden.

Unter der verwendeten Literatur sei noch besonders auf die Arbeit von MAZUR und ORLICZ [8] hingewiesen (siehe auch 9.1, 9.3, 11.1, 12.1).

2. Bezeichnungen.

Zahlenfolgen bezeichnen wir mit $\{x_k\}$ oder x_k. Wir kürzen $\sum_{k=0}^{\infty}$ ab durch $\sum_k$ oder $\sum$. Entsprechendes gilt für $\overline{\text{fin}}$, lim usw. In Gleichungen $x_k = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ wird häufig $(k = 0, 1, \ldots)$ weggelassen. K und M sind Konstante, die von den in der jeweiligen Formel vorkommenden Variabeln unabhängig sind. Wir setzen $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(x_{-1} = 0)$. Mit $\nearrow$ und $\searrow$ bezeichnen wir Monotonie im weiteren Sinn (z. B. $x_k \searrow 0$).

Eine *abbrechende Folge* ist eine Folge mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Gliedern. Unter einer *Indexfolge* q_i verstehen wir eine unbeschränkte Folge ganzer Zahlen $-1 \leqq q_0 \leqq q_1 \leqq \cdots$. Der Wert -1 ist zur Erleichterung der Schreibung mancher Formeln zugelassen. Folgenglieder mit Index -1, etwa x_{-1}, sind meistens gleich Null zu setzen. Die *Anzahlfunktion* ω_k der q_i ist die durch „ω_k = Anzahl der $q_i \leqq k$" definierte Folge.

Gilt $x_k = w_k d_k$ mit $\overline{\text{fin}}\,|w_k| < \infty$, so schreiben wir $x_k = O(d_k)$. Wir lassen für die d_k auch den Wert „∞" zu, wobei jede (endliche) Zahl als in der Form $0 \cdot \infty$ darstellbar gilt. Eine Bedingung $O(d_k)$ heißt schärfer als $O(e_k)$, wenn jede der ersten Bedingung genügende Folge auch die zweite erfüllt, das Umgekehrte aber nicht der Fall ist. Entsprechendes gilt für $x_k = o(d_k)$ mit $\lim w_k = 0$.

Eine Matrix heißt *konvergenztreu (permanent)*, wenn sie jede konvergente Folge (zu ihrem Grenzwert) limitiert. Wir verwenden ferner folgende Eigenschaften bei Matrizen (die Existenz — im eigentlichen Sinn — der jeweils benützten Grenzwerte ist in den Bedingungen eingeschlossen):

(Sp) $\lim_n y_{nk}$ existiert $(k = 0, 1, \ldots)$;

(Sp_0) $\lim_n y_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$;

(Zs) $\lim_n \sum_k y_{nk}$ existiert;

(Zs_a) $\lim_n \sum_k y_{nk} = a$;

(Zn) $\sum_k |y_{nk}| \leqq M$ $(n = 0, 1, \ldots)$;

(Zn_0) $\lim_r \overline{\text{fin}}_n \sum_{k=r}^{\infty} |y_{nk}| = 0$;

(Zr) $|\sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}| \leqq M$ $(n, r = 0, 1, \ldots)$;

(Zr_0) $\lim_r \overline{\text{fin}}_n |\sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}| = 0$.

Ferner setzen wir

$$\chi = \chi_Y = \lim_n \sum_k y_{nk} - \sum_k \lim_n y_{nk} = \lim_r \lim_n \sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}.$$

(Der rechts stehende Ausdruck soll dabei nur dann als erklärt gelten, wenn $\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} y_{nk}$ für $r = 0, 1, \ldots$ existiert.) Beide Ausdrücke für χ sind gleichzeitig erklärt und dann einander gleich. Dies erkennt man nach naheliegenden Umformungen aus den Beziehungen

$$\lim_n \sum_{k=p}^{r} y_{nk} = \sum_{k=p}^{r} \lim_n y_{nk} \qquad (p, r = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_n \textstyle\sum_k y_{nk} - \sum_k \lim_n y_{nk} = \lim_n \sum_{k=r}^{\infty} y_{nk} - \sum_{k=r}^{\infty} \lim_n y_{nk} \quad (r = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_r \sum_{k=r}^{\infty} \lim_n y_{nk} = 0.$$

Wir geben noch einige Erläuterungen zu den genannten Eigenschaften. Sprechen wir von einer Matrix mit $\chi = a$, $\chi = 0$, $\chi \neq 0$, so ist darin impliziert, daß χ im eigentlichen Sinne existiert (was z. B. bei konvergenztreuen Matrizen der Fall ist). Die Matrizen mit $\chi = 0$ unterscheiden sich wesentlich von denjenigen mit $\chi \neq 0$: Eine Sp_0-Matrix hat genau dann $\chi = 0$, wenn sie Zs_0-Matrix ist. Aus Zr_0 (oder auch Zn_0) und Sp folgt $\chi = 0$ (rechte Seite der Definitionsgleichung für χ verwenden!).

Eine Matrix ist genau dann konvergenztreu (permanent), wenn sie den Bedingungen Zn, Zs, Sp (Zn, Zs_1, Sp_0) genügt. Sie ist genau dann konvergenzerzeugend (d. h. limitiert jede beschränkte Folge), wenn sie Sp und Zn_0 erfüllt. Für die Bedeutung von Zr, Zr_0 und χ vergleiche man § 3.

3. Limitierbarkeitskriterien.

Wir setzen in § 3 durchweg $u_k = \Delta s_k$, also $s_k = \sum_{l=0}^{k} u_l$.

3. 1. Von Hahn [5, Satz X b], Lorentz [7] und Winn [11] wurde bewiesen: *Eine Matrix G limitiert genau dann alle absolut konvergenten Folgen (d. h. Folgen s_k mit $\sum |u_k| < \infty$), wenn G den Bedingungen Zr, Zs und Sp genügt.*

Wir bemerken dazu: Genügen G und $\{s_k\}$ den genannten Bedingungen, so hat auch die Matrix $\{g_{nk} s_k\}$ die Eigenschaften Zr, Zs und Sp. Denn sie limitiert alle absolut konvergenten Folgen z_k, weil für solche stets $\{s_k z_k\}$ absolut konvergent ist.

3. 2. Satz. *Zu einer Matrix G mit den Eigenschaften Zr und $\chi = 0$ können wir eine Indexfolge q_i bestimmen, so daß G jede Folge limitiert, die der Bedingung*

$$|Q| \qquad \sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} |u_l| = \sigma_i = o(1)$$

genügt. Hat G nicht die Eigenschaften Zr und $\chi = 0$, so gibt es für G kein Limitierbarkeitskriterium der Form $|Q|$ (wo $\{q_i\}$ eine Indexfolge ist).

Beweis. Hilfssatz 1. *Genau dann limitiert die Matrix H alle einer bestimmten Bedingung $|Q|$ genügenden Folgen u_l (und zwar zum Werte $\sum_l u_l \lim_n h_{nl}$), wenn H Sp-Matrix ist und die Matrix H' mit den Elementen*

$$h'_{ni} = \max_{q_i < l \leq q_{i+1}} |h_{nl}|$$

der Bedingung Zn genügt.

Es ist

$$|\sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} h_{nl} u_l| \leqq h'_{ni} \sigma_i . \tag{1}$$

Man weiß nun (vgl. etwa Schur [9, Satz IV]): Eine Matrix H' limitiert genau dann jede Nullfolge σ_i (und zwar zum Werte $\sum_i \sigma_i \lim_n h'_{ni}$), wenn sie die Eigenschaften Zn und Sp besitzt. Man sieht daraus, daß die Bedingungen hinreichend sind. Ihre Notwendigkeit ergibt sich mit dem Schurschen Beweisverfahren oder einer der bekannten funktionalanalytischen Methoden.

Hilfssatz 2. *Konvergiert $\sum g_k s_k$ für alle $\{s_k\}$, die einer bestimmten Bedingung $|Q|$ genügen, so gilt für diese $\{s_k\}$*

$$\sum g_k s_k = \sum h_l u_l \quad \text{mit} \quad h_l = \sum_{k=l}^{\infty} g_k .$$

Zum Beweis wendet man Hilfssatz 1, insbesondere die eingeklammerte Bemerkung, auf die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} g_0 & & & \\ g_0 + g_1 & g_1 & & \\ g_0 + g_1 + g_2 & g_1 + g_2 & g_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

an. Es ist nämlich

$$u_n^p = \sum_{k=0}^{n} g_k s_k .$$

Wir kommen zum eigentlichen Beweis des Satzes.

I. G limitiere alle $\{s_k\}$, die eine bestimmte Bedingung $|Q|$ erfüllen. Nach Hilfssatz 2 gilt dann

$$\sum_k g_{nk} s_k = \sum_l h_{nl} u_l \quad \text{mit} \quad h_{nl} = \sum_{k=l}^{\infty} g_{nk}$$

für die betrachteten $\{s_k\}$. Den nach Hilfssatz 1 für H erfüllten Bedingungen entnehmen wir, daß

$$|h_{nl}| \leqq M \ (l, n = 0, 1, \ldots) \quad \text{und} \quad \lim_l \lim_n h_{nl} = 0$$

gilt (letzteres, weil wegen Zn $\sum_l |\lim_n h'_{nl}| < \infty$ ist). Daraus sieht man, daß G die Eigenschaften Zr und $\chi = 0$ besitzt.

II. G genüge den Bedingungen Zr und $\chi = 0$. Wir bestimmen H wie unter I. Die $\alpha_i \geqq 0$ seien irgendwelche Zahlen mit $\sum \alpha_i < \infty$. Wir definieren die Indexfolge q_i und eine Hilfs-Indexfolge n_i induktiv. Die Auswahl gemäß den unten gegebenen Vorschriften ist möglich, weil H den Bedingungen

$$\lim_l h_{nl} = 0 \ (n = 0, 1, \ldots) \quad \text{und} \quad \lim_l \lim_n h_{nl} = 0$$

genügt. Wir bestimmen $q_0 < q_1$ so, daß

$$|\lim_n h_{nl}| < \alpha_i \quad \text{für} \quad q_i < l \ . \qquad (i = 0, 1)$$

gilt und setzen $n_0 = -1$. Nun seien $q_0, \ldots, q_j, n_0, \ldots, n_{j-1}$ bestimmt. Wir wählen $n_j > n_{j-1}$ so, daß

$$|h_{nl}| < \alpha_{j-1} \quad \text{für} \quad q_{j-1} < l \leqq q_j, \quad n_j < n$$

gilt (vgl. die Ungleichung für $\lim_n h_{nl}$); sodann $q_{j+1} > q_j$ derart, daß

$$|h_{nl}| < \alpha_{j+1} \text{ für } q_{j+1} < l, \quad n \leqq n_j; \qquad |\lim_n h_{nl}| < \alpha_{j+1} \text{ für } q_{j+1} < l$$

gilt. Die h'_{ni} seien wie im Hilfssatz 1 definiert. Für $n_j < n \leqq n_{j+1}$ ist

$$h'_{ni} \begin{cases} \leqq \alpha_i & (i \neq j, j+1) \\ \leqq M & (i = j, j+1). \end{cases}$$

H limitiert also nach Hilfssatz 1 alle $\{u_l\}$, die $|Q|$ genügen. Wir müssen noch erreichen, daß $u_n^H = s_n^G$ ist. Dazu bieten sich zwei Wege. Entweder bestimmen wir die q_i so, daß auch die Summen $\sum_k g_{nk} s_k$ für alle $|Q|$ genügenden $\{s_k\}$ konvergieren, — dies erreicht man z. B. durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge der oben definierten q_i —, und wenden Hilfssatz 2 an. Oder wir unterwerfen die α_i noch der Bedingung $i \cdot \alpha_i = O(1)$. Dann folgen aus

$$\sum_{k=0}^{r} g_{nk} s_k = \sum_{l=0}^{r} h_{nl} u_l - h_{n,r+1} \cdot s_r$$

und

$$s_k = o(\omega_k) \quad (\omega_k = \text{Anzahlfunktion der } q_i)$$

die Gleichungen $u_n^H = s_n^G$.

Für zeilenfinite Matrizen vereinfacht sich der Beweis. Man vgl. 8. 3. Wir bemerken für später, daß es immer eine $|Q|$ genügende Folge $s_k \nearrow \infty$ gibt.

3. 3. *Für Matrizen mit den Eigenschaften Zr_0 und Sp gilt ein entsprechender Satz unter Verwendung der Bedingung*

$$|Q^*| \qquad \sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} |u_l| = O(1).$$

3. 4. Satz. *Zu einer Matrix G mit den Eigenschaften Zn und $\chi = 0$ können wir eine Indexfolge q_i bestimmen, so daß G jede Folge*

s_k limitiert, die der Bedingung

$$(Q) \qquad \operatorname*{Max}_{q_i \leqq k,\, l \leqq q_{i+1}} |s_k - s_l| = o(1)$$

genügt. Hat G nicht die Eigenschaften Zn und $\chi = 0$, so gibt es für G kein Limitierbarkeitskriterium der Form (Q).

Beweis. I. G genüge den genannten Bedingungen. Wir definieren zwei Indexfolgen $p_n < r_n$ sowie eine Folge $d_k \nearrow \infty$, so daß die untenstehenden Summen konvergieren und

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{p_n-1} g_{nk} s_k \to \sum_k s_k \lim_p g_{pk}; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} g_{nk} s_k \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $s_k = O(d_k)$ gilt. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten.

1.) Wir wählen die p_n und r_n so, daß

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} |g_{nk} - \lim_p g_{pk}| \to 0; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} |g_{nk}| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Mit einer genügend langsam wachsenden Folge d_k ist dann (2) erfüllt.

2.) Wir wählen eine Folge $d_k \nearrow \infty$, so daß

$$(3) \qquad \sum_k |g_{nk} d_k| < \infty (n = 0, 1 \ldots); \quad \sum_k |d_k \lim_p g_{pk}| < \infty$$

gilt (solche Folgen gibt es wegen Zn) und bestimmen die p_n und r_n so, daß

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} |(g_{nk} - \lim_p g_{pk})\, d_k| \to 0; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} |g_{nk} d_k| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Letztere Forderungen sind wegen (3) erfüllbar.

Setzt man in (2) $s_k = 1$ ein, so liefert $\chi_G = 0$, daß die Zahlen

$$\varepsilon_n = \sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk}$$

eine Nullfolge bilden. Wir wählen nun eine Folge $e_k \nearrow \infty$ mit $e_k \leqq d_k$ und $e_{p_n} \cdot \varepsilon_n = O(1)$. Aus

$$\Big|\sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} s_k\Big| \leqq |s_{p_n}\ \varepsilon_n| + \operatorname*{Max}_{p_n \leqq k \leqq r_n} |s_k - s_{p_n}| \cdot \sum_{k=p_n}^{r_n} |g_{nk}|$$

und den Formeln (2) erkennen wir, daß G jede Folge limitiert, die den Bedingungen

$$\operatorname*{Max}_{p_n \leqq k,\, l \leqq r_n} |s_k - s_l| = o(1), \quad s_k = o(e_k)$$

genügt. Wir wählen die q_i so, daß in jedem Intervall $\langle p_n, r_n \rangle$ höchstens ein q_i liegt und $\omega_k \leqq e_k$ ist (ω_k = Anzahlfunktion der q_i). Jede (Q) genügende Folge s_k erfüllt dann auch die beiden letztgenannten Bedingungen, was die Behauptung ergibt.

II. Wir stellen zunächst fest: Sind (Q^1) und (Q^2) Bedingungen der Form (Q), so gibt es eine dritte Bedingung (Q^3) derselben Form, die nicht schwächer ist als (Q^1) und (Q^2). Wir wählen einfach die Zahlen $q_i^{(3)}$ so, daß in jedem der Intervalle $\langle q_i^{(1)}, q_{i+1}^{(1)}\rangle$ und $\langle q_i^{(2)}, q_{i+1}^{(2)}\rangle$ höchstens ein $q_i^{(3)}$ liegt. Daraus folgt, daß es divergente Folgen gibt, die sowohl (Q^1) als auch (Q^2) genügen.

Nun limitiere G alle einer gewissen Bedingung der Form (Q) genügenden Folgen s_k. Dann ist G konvergenztreu, d. h. genügt den Bedingungen Zn, Zs und Sp. Sei $\chi_G = \alpha$ und I die Einheitsmatrix. Die Matrix $(G - \alpha I)$ hat die Eigenschaften Zn und $\chi = 0$, limitiert also nach I. alle einer zweiten Bedingung (Q) genügenden Folgen s_k. Nach dem voranstehenden Absatz gibt es divergente Folgen s_k, die beiden (Q)-Bedingungen genügen. Diese werden von αI limitiert, woraus $\alpha = 0$ folgt.

Agnew [1] erhielt ein ähnliches Ergebnis, wobei er jedoch nur beschränkte Folgen s_k betrachtet.

3.5. *Ein entsprechender Satz gilt für Matrizen mit den Eigenschaften Sp und Zn_0 unter Verwendung der Bedingung*

$$(Q^*) \qquad \max_{q_i \leqq k,\, l \leqq q_{i+1}} |s_k - s_l| = O(1).$$

3.6. Wir bringen noch ein anders geartetes Limitierbarkeitskriterium: *Eine Sp-Matrix A limitiert alle Folgen t_k, für die*

$$\sum_k |t_k| \cdot \overline{\operatorname{fin}}_n |a_{nk}| < \infty$$

ist, zum Werte

$$\sum_k t_k \lim_n a_{nk}.$$

Denn die Matrix $\{a_{nk} t_k\}$ genügt den Bedingungen Sp und Zn_0, woraus die Behauptung folgt (vgl. den Schluß von § 2).

Als Anwendung ziehen wir die Folgerung: Bei einer Sp-Matrix A gibt es sicher keine schärfere O- bzw. o-Bedingung als

$$t_k = O \text{ bzw. } o\left(\frac{1}{\overline{\operatorname{fin}}_n |a_{nk}|}\right),$$

die für alle $\{t_k\} \in \mathfrak{A}$ gilt. —

Agnew [2] zeigte: Genügt eine Matrix A den Bedingungen Zn und $\lim_n \overline{\operatorname{fin}}_k |a_{nk}| = 0$, so limitiert A eine divergente Folge t_k, die aus Nullen und Einsen besteht. Aus seinen Voraussetzungen folgt Sp und $\lim_k \overline{\operatorname{fin}}_n |a_{nk}| = 0$. Der Satz am Anfang von 3.6 liefert nun das Agnewsche Ergebnis. Überdies sieht man, daß A dann auch unbeschränkte Folgen limitiert.

4. Ausgezeichnete Teile des Wirkfeldes.

4.1. Wir sagen, daß die Folge x_k aus dem Wirkfeld $\mathfrak{A}$ einer Matrix A der Untermenge $\mathfrak{A}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ angehört, wenn die Matrix G mit

den Elementen $g_{nk} = a_{nk} x_k$ die unten bezeichneten Eigenschaften hat:

$\mathfrak{A}_0$: G genügt $\chi = 0$;
$\mathfrak{A}_1$: G genügt Zr und Sp;
$\mathfrak{A}_2$: G genügt Zr und $\chi = 0$;
$\mathfrak{A}_3$: G genügt Zr_0 und Sp.

Da $\{x_k\} \in \mathfrak{A}$ ist, besitzt G überdies in jedem Falle die Eigenschaft Zs, erfüllt also für $i = 1, 2, 3$ die in 3.i für G genannten Bedingungen. Es ist

$$\mathfrak{A}_3 \leqq \mathfrak{A}_2 \leqq \begin{matrix} \mathfrak{A}_0 \\ \mathfrak{A}_1 \end{matrix} \text{ und } \mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$$

(man vgl. den Schluß von § 2). Bei einer Sp-Matrix A (nur für solche sind die Definitionen von Bedeutung) gehört eine abbrechende Folge jedem $\mathfrak{A}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ an. Bei einer Sp_0-Matrix wird $\mathfrak{A}_0$ gebildet von den zu Null limitierten Folgen.

4.2. Die Bedeutung dieser Untermengen liegt zum Teil darin, daß wir mit Hilfe von 3.i zu einem $\{x_k\}$ aus $\mathfrak{A}_i (i = 1, 2, 3)$ weitere limitierte Folgen in der Form $\{x_k s_k\}$ erhalten.

4.3. Verfasser hat in früheren Arbeiten [12, 13] die Wirkfelder von Matrizen (und allgemeiner die „FK-Räume") mit funktionalanalytischen Methoden untersucht. Dabei führte er die Eigenschaften SAK und AK ein [13, § 2]. Es gilt nun: Eine Folge x_k gehört genau dann zu $\mathfrak{A}_2 (\mathfrak{A}_3)$, wenn sie SAK (AK) im Wirkfeld $\mathfrak{A}$ besitzt.

5. Der Unterraum $\mathfrak{A}_1$.

5.1. *Ist* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$, *so gehört auch jede Folge der Form* $\{x_k s_k\}$ mit $\sum |\Delta s_k| < \infty$ *zu* $\mathfrak{A}_1$.

Nach 3.1, erster Absatz, wird die Folge $x_k s_k$ von A limitiert, nach 3.1, zweiter Absatz, gehört sie zu $\mathfrak{A}_1$.

5.2. Für 5.3 benötigen wir einen Hilfssatz:

Zu jeder unbeschränkten Folge x_k *gibt es eine Folge* $s_k \searrow 0$, so daß die Folge $w_k = x_k s_k$ beschränkt divergent ist und

$$\Delta w_k = o(\Delta x_k) \tag{1}$$

gilt.

Für zwei komplexe Zahlen mit $|y| < |z|$ gilt nämlich die Ungleichung

$$|\Theta z - y| \leqq |z - y| \text{ für } \left|\frac{y}{z}\right|^2 \leqq \Theta \leqq 1. \tag{2}$$

Sei $\xi_{l-1} = \max\limits_{-1 \leqq k \leqq l-1} |x_k|$ (mit $x_{-1} = 1$). Wir setzen

$$s_k = \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\xi_{l-1}}{\xi_l}\right)^{\alpha(l)} = \prod_{l=0}^{k} \Theta_l,$$

wobei wir $\alpha(l)$ in den Grenzen $0 \leqq \alpha(l) \leqq 2$ noch näher bestimmen.

Es gilt

$$|s_k x_k - s_{k-1} x_{k-1}| = s_{k-1} \cdot |\Theta_k x_k - x_{k-1}| \leqq s_{k-1} \cdot |\Delta x_k|.$$

Denn es ist $\Theta_k \neq 1$ nur, wenn $\xi_k = |x_k| > \xi_{k-1} \geqq |x_{k-1}|$ gilt. Dann ist

$$\left|\frac{x_{k-1}}{x_k}\right|^2 \leqq \left|\frac{\xi_{k-1}}{\xi_k}\right|^2 \leqq \Theta_k \leqq 1.$$

Somit ergibt (2) die gewünschte Abschätzung. Setzen wir $\alpha(l) = 1$, so gilt $s_k \searrow 0$ und wir erhalten eine beschränkte Folge w_k, die aber möglicherweise konvergent ist gegen einen Grenzwert w mit $|w| = 1$ (z. B. im Falle $x_k \nearrow \infty$). Lassen wir jedoch $\alpha(l)$ in geeigneter Weise um den Wert 1 pendeln, so können wir die Forderungen des Satzes erfüllen. Der Leser möge dies selber durchführen.

5. 3. Die Ergebnisse von 5. 1 und 5. 2 liefern unmittelbar: *Gibt es in $\mathfrak{A}_1$ eine unbeschränkte Folge x_k, so auch eine beschränkt-divergente Folge w_k, die* (1) *genügt.*

5. 4. *Die natürliche Zahl n_0 und die Folge φ_k mit $\sum |\Delta \varphi_k| = ||\varphi|| < \infty$ seien gegeben. Für jedes $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$ ist dann das Funktional*

$$\varphi(x_k) = \sum_k \varphi_k a_{n_0 k} x_k$$

erklärt und es gilt

$$|\varphi(x_k)| \leqq ||\varphi|| \cdot \overline{\text{fin}}_r \Big|\sum_{k=r}^{\infty} a_{n_0 k} x_k\Big| \leqq ||\varphi|| \cdot \overline{\text{fin}}_{n,r} \Big|\sum_{k=r}^{\infty} a_{nk} x_k\Big|.$$

Der Beweis erfolgt einfach durch partielle Summation. Man vgl. auch 5. 1.

5. 5. *Für jedes einzelne $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$ ist*

$$\Big|\sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k\Big| \leqq M \quad (n, p, r = 0, 1, \ldots, p \leqq r).$$

Daraus erhält man mit $p = r$

$$x_k = O\left(\frac{1}{\overline{\text{fin}}_n |a_{nk}|}\right).$$

Ist A Sp-Matrix, so kann diese O-Bedingung durch keine schärfere ersetzt werden, wie sich aus 3. 6 ergibt (man vgl. dabei 7. 6).

5. 6. *Ist A eine Zn-Sp-Matrix und x_k eine beschränkte Folge aus $\mathfrak{A}$, so gehört $\{x_k\}$ zu $\mathfrak{A}_1$.*

6. Der Unterraum $\mathfrak{A}_2$.

6. 1. *Ist $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_2$, so gehören alle Folgen $\{x_k s_k\}$, wo $\{s_k\}$ einer gewissen (von A und $\{x_k\}$ abhängigen) Bedingung $|Q|$ genügt, zu $\mathfrak{A}$ aber nicht notwendig zu $\mathfrak{A}_1$).*

Dies folgt aus 3. 2.

6. 2. *Gibt es in $\mathfrak{A}_1$ eine beschränkt-divergente Folge x_k, so enthält $\mathfrak{A}$ eine unbeschränkte Folge y_k. Bei vorgegebener Folge $\delta_k \nearrow \infty$ kann man dabei noch*

$$\Delta y_k = O(\delta_k \Delta x_k) \tag{1}$$

verlangen.

Beweis. Es ist

$$|x_k s_k - x_{k-1} s_{k-1}| \leqq |\Delta x_k||s_k| + |\Delta s_k||x_{k-1}|. \tag{2}$$

Wegen $\sum |\Delta x_k| = \infty$ gibt es eine Folge s_k mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Delta s_k \leqq |\Delta x_k|, \quad \sum \Delta s_k = \infty,$$

die überdies der in 6. 1 genannten Bedingung $|Q|$ genügt. Wir können die s_k dabei so langsam wachsen lassen, daß auch $s_k = O(\delta_k)$ gilt. In der Form $y_k = x_k s_k$ erhalten wir die gewünschte Folge (vgl. 6. 1).

Übrigens können wir im allgemeinen nicht (1) durch die schärfere Bedingung $\Delta y_k = O(\Delta x_k)$ ersetzen.

6. 3. *Ist x_k eine Folge aus $\mathfrak{A}_1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abbrechende Folge y_k, so daß*

$$|x_k^A - y_k^A| < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

gilt.

Beweis. Sei $g_{nk} = a_{nk} x_k$. Wir bestimmen nach 3. 2. II zu G eine Schwankungsbedingung $|Q|$ und definieren H wie dort. Für die $|Q|$ genügenden $\{s_k\}$ ist $u_n^H = s_n^G$ (mit $u_n = \Delta s_n$). H erfüllt die Bedingungen von Hilfssatz 1 aus 3. 2. Aus der dortigen Abschätzung (1) sehen wir, daß es eine $|Q|$ genügende Folge s_k mit den folgenden Eigenschaften gibt:

$$0 \leqq s_k \nearrow 1, \quad s_k = 1 \text{ für fast alle } k;$$

$$|s_k^G| < \varepsilon.$$

(Wir wählen die s_k so, daß alle σ_i genügend klein sind.) Nun setzen wir einfach $y_k = x_k(1 - s_k)$.

Diese „Approximation durch abbrechende Folgen" hat Bedeutung für Aussagen, die die Verträglichkeit von Matrixverfahren betreffen. Man vgl. dazu Darevsky [3] und Zeller [12, § 6; 13, § 2].

6. 4. Wir definieren G wieder durch $g_{nk} = a_{nk} x_k$. Sei $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$. Dann ist möglicherweise $\sum_k \lim_n g_{nk}$ eine beschränkt-divergente Reihe. Konvergiert aber die Reihe (was z. B. unter den Voraussetzungen von 5. 6 eintritt), so existiert χ_G.

Ist überdies $\chi_A \neq 0$, so erhalten wir in der Form $\{x_k - a\}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_1$, wenn wir $a = \dfrac{\chi_G}{\chi_A}$ setzen.

7. Der Unterraum $\mathfrak{A}_3$.

7.1. *Ähnlich wie in* 6.1 *erhalten wir Faktorfolgen unter Verwendung der Bedingung* $|Q^*|$.

7.2. *Ist* x_k *eine Folge aus* $\mathfrak{A}_3$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine abbrechende Folge* y_k, *so daß*

$$\overline{\text{fin}}_{n,\,r} \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{nk}(x_k - y_k) \right| < \varepsilon$$

ist.

Dies ist eine Verschärfung des Approximationssatzes in 6.3. Wir setzen einfach bei genügend großem R

$$y_k = \begin{cases} x_k & k \leqq R \\ 0 & k > R. \end{cases}$$

7.3. *Die Sp-Matrix* B *sei von der Form* $b_{mk} = \varphi_k^{(m)} a_{n_m k}$ *mit*

$$\sum_k |\varphi_k^{(m)} - \varphi_{k-1}^{(m)}| = \|\varphi^{(m)}\| \leqq M \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Dann limitiert B *jede Folge aus* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_3$, *wobei sogar* $\{x_k\} \in \mathfrak{B}_3$ *gilt.*

Wir entnehmen aus 5.4, daß

$$\left| \sum_k b_{mk} x_k \right| \leqq M \, \overline{\text{fin}}_{n,\,r} \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Mit 7.2 erhält man nun leicht die Behauptung. Die hier verwendete — oftmals nützliche — Methode, aus $x_m^B = O(1)$ auf $x_m^B = o(1)$ zu schließen, ist z. B. aus den Banachschen Sätzen über Operationenfolgen bekannt.

7.4. *Für jedes* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_3$ *gilt nach Definition*

$$\overline{\text{fin}}_n \left| \sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k \right| \to 0 \qquad (p, r \to \infty). \tag{1}$$

Daraus erhält man mit $p = r$

$$x_k = o\left(\frac{1}{\text{fin}_n |a_{nk}|} \right).$$

Für Sp-Matrizen A kann diese o-Bedingung durch keine schärfere ersetzt werden, wie sich aus 3.6 ergibt (man verwende dabei 7.6).

7.5. Formel (1) ist auch wichtig für Umkehrsätze. Für jedes λ aus einem Intervall $0 < \lambda < \varrho$ sei eine Indexfolge $q_i^{(\lambda)}$ bestimmt, so daß für die betrachtete Matrix A

$$\overline{\text{fin}}_n \sum_i^{\lambda} a_{nk} \geqq \varepsilon(\lambda) > 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Dabei bedeutet $\sum_i^{\lambda}$ die Summe über k von $q_i^{(\lambda)} + 1$ bis $q_{i+1}^{(\lambda)}$, und — weiter unten — Max_i^{λ} das Maximum über $q_i^{(\lambda)} < k, l \leqq q_{i+1}^{(\lambda)}$. Eine geeignete Bestimmung der $q_i^{(\lambda)}$ ist jedenfalls möglich, wenn A permanent ist. Wir erhalten einen *Umkehrsatz*:

Es sei $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_s$, $a_{nk} \geqq 0$ *und* (2) *erfüllt. Aus*

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\lim_i} \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| = 0 \tag{3}$$

folgt dann $\lim x_p = 0$.

Beweis. Sei (bei festem λ) $q_i^{(\lambda)} < p \leqq q_{i+1}^{(\lambda)}$. Dann ist

$$-x_p \sum_i^\lambda a_{nk} = \sum_i^\lambda a_{nk}(x_k - x_p) - \sum_i^\lambda a_{nk} x_k,$$

also

$$|x_p| \sum_i^\lambda a_{nk} \leqq \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| \sum_i^\lambda a_{nk} + \left|\sum_i^\lambda a_{nk} x_k\right|.$$

Wir wählen $n = n(\lambda, i)$, so daß $\sum_i^\lambda a_{nk} \geqq \frac{\varepsilon(\lambda)}{2}$ ist. Dann gilt

$$|x_p| \leqq \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| + \frac{2}{\varepsilon(\lambda)} \left|\sum_i^\lambda a_{nk} x_k\right| = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Wir halten λ fest und lassen p und damit i gegen ∞ gehen. Dann verschwindet II wegen (1) und es ist

$$\overline{\lim_p} |x_p| \leqq \overline{\lim_i} \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| \qquad (\lambda > 0).$$

Aus (3) liest man die Behauptung ab.

Wir verwendeten die Landausche Methode für den $O - C_1$-Umkehrsatz. (Diesen erhält man mit $q_i^{(\lambda)} = [(\lambda + 1)^i]$, s. a. § 8.) Ähnlich kann man weitere Umkehrsätze, z. B. mit einseitigen Umkehrbedingungen oder unter Verwendung von Bedingungen der Form $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ aufstellen. In letzterem Fall ist 8. 3 von Bedeutung. Manchmal ist es günstig, für die $q_i^{(\lambda)}$ auch nichtganzzahlige Werte zuzulassen. Wir schreiben dann die Matrixtransformation in der Form

$$\int_0^\infty a_n(t)\, x(t)\, dt$$

mit $x(t) = x_k$, $a_n(t) = a_{nk}$ $(k \leqq t < k + 1)$ und gehen analog wie oben vor.

7. 6. *Jede nach* 3. 6 *erhaltene A-limitierbare Folge* t_k *gehört zu* $\mathfrak{A}_s$ (weil die Matrix $\{a_{nk} t_k\}$ den Bedingungen Sp und Zn_0 genügt).

8. Verfahren mit ausgezeichnetem Wirkfeld.

8. 1. Es ist nun von Bedeutung, daß es geläufige permanente Matrizen A mit $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_s$ gibt (ein Verfahren mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_s$ ist sicher nicht permanent). Bei diesen Matrizen gelten die in §§ 5—7 aufgestellten Sätze für alle zu Null limitierten Folgen. Z. B. ist $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_s$ für $A = C_1$ (arithmetische Mittel), wie man aus

$$\left|\frac{s_{r+1} + \cdots + s_n}{n+1}\right| = \left|-\frac{s_0 + \cdots + s_r}{n+1} + \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}\right|$$

$$\leqq \left|\frac{s_0 + \cdots + s_r}{r+1}\right| + \left|\frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}\right| \qquad (r \leqq n)$$

erkennt. 7.5 gestattet nun u. a. den Beweis des $O - C_1$-Umkehrsatzes, während 7.3 Vergleichssätze bezüglich des C_1-Verfahrens liefert. Bei anderen Matrizen A findet man relativ leicht die Beziehung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt aber auch schon $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ (s. ZELLER [13, §§ 3 und 4]). Dies beweisen wir nun auf neuem Wege.

8.2. *Die Matrix A sei so beschaffen, daß $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$ gilt. Dann ist sogar $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$.*

Wir führen die gegenteilige Annahme zum Widerspruch. Sei x_k eine Folge, die zu $\mathfrak{A}_2$, aber nicht zu $\mathfrak{A}_3$ gehört. Dann gibt es natürliche Zahlen $p_0 < r_0 < p_1 < r_1 < \cdots$, so daß

$$\overline{\text{fin}}_n \Big| \sum_{k=p_i}^{r_i} a_{nk} x_k \Big| \geqq \varepsilon > 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

ist. Mit Hilfe von 6.1 erhalten wir eine Faktorfolge $s_k \nearrow \infty$, die in unendlich vielen der Intervalle $\langle p_i, r_i \rangle$ konstant ist. Für die A-limitierbare Folge $y_k = x_k s_k$ ist dann

$$\overline{\lim}_i \overline{\text{fin}}_n \Big| \sum_{k=p_i}^{r_i} a_{nk} y_k \Big| = \infty,$$

d. h. $\{y_k\} \notin \mathfrak{A}_2$, womit der gewünschte Widerspruch erzielt ist.

8.3. In einem Spezialfall erhalten wir ein weitergehendes Ergebnis: *A sei eine zeilenfinite Sp_0-Matrix, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$, $\overline{\text{fin}}_n |a_{nk}| \neq 0$. Dann gibt es zu jeder Folge $\varepsilon_k \to 0$ eine Folge $\delta_k \to 0$, so daß aus $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ folgt*

$$\overline{\underset{n \geqq 0,\, r \geqq p}{\text{fin}}} \Big| \sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k \Big| = o(\delta_p).$$

Beweis. Wir betrachten eine feste Folge $\varepsilon_k \to 0$, wobei wir $\varepsilon_k \neq 0$ annehmen dürfen, und bestimmen irgendwie eine Folge $\eta_k \nearrow \infty$. Wegen Sp_0 können wir nun eine Indexfolge p_n so wählen, daß

$$\sum_{k=0}^{p_n - 1} (|a_{nk}\, \eta_k| / \overline{\text{fin}}_m |a_{mk}|) = o(\varepsilon_n) \tag{1}$$

ist. Für die Indexfolge $r_n \geqq p_n$ gelte $a_{nk} = 0$ $(k > r_n)$. Nun sei $x_k^A = o(\varepsilon_k)$. Dann gilt — man beachte 7.4 und (1) —

$$\sum_{k=p_n}^{r_n} a_{nk} x_k = o(\varepsilon_n).$$

Wir setzen $a_{nk} x_k = g_{nk}$. G ist wegen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ eine Zr_0-Matrix. Aus

$$\sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} s_k = s_{p_n} \sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} + u_{p_n+1} \cdot \sum_{k=p_n+1}^{r_n} g_{nk} + \cdots + u_{r_n} g_{nr_n}$$

und (1) sehen wir, daß G alle Folgen s_k limitiert, die die Eigenschaften

$$s_k = O(\eta_k), \quad s_{p_n} = O(1/\varepsilon_n), \quad \sum_{l=p_n+1}^{r_n} |u_l| = O(1)$$

besitzen (vgl. 3.3). Wie in 3.4 erkennen wir, daß G alle Folgen s_k limitiert, die einer gewissen Bedingung $|Q^*|$ (siehe 3.3) genügen. Und zwar erhalten wir für jede Folge mit $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ dieselbe Bedingung $|Q^*|$. ω_k sei die Anzahlfunktion der q_i aus $|Q^*|$. Dann ist die Behauptung richtig mit $\delta_k = \frac{1}{\omega_k}$.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge x_k mit $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ und zwei Indexfolgen $p(j) \leqq r(j)$, so daß

$$\overline{\text{fin}}_n \Big| \sum_{k=p(j)}^{r(j)} a_{nk} x_k \Big| \geqq \delta_{p(j)}$$

ist.

Durch Auswahl einer Teilfolge der $p(k)$ können wir erreichen, daß jeweils mindestens $\frac{1}{2}\omega_{p(k)}$ der links von $p(k)$ gelegenen Intervalle $\langle q_i, q_{i+1}\rangle$ keinen Punkt mit $\bigcup \langle p(j), r(j)\rangle$ gemeinsam haben. Wir konstruieren eine Folge s_k, indem wir in jedem der letztgenannten q-Intervalle ein $u_l = 1$, sonst $u_l = 0$ setzen. Diese Folge s_k ist konstant in den Intervallen $\langle p(j), r(j)\rangle$, genügt $|Q^*|$ und der Ungleichung $s_{p(j)} \geqq \frac{1}{2}\omega_{p(j)}$. A limitiert die Folge $x_k s_k$ zum Wert Null (vgl. 3.3).

Es gilt

$$\overline{\text{fin}}_n \Big| \sum_{k=p(j)}^{r(j)} a_{nk} x_k s_k \Big| \geqq \delta_{p(j)} \tfrac{1}{2} \omega_{p(j)} \geqq \tfrac{1}{2}$$

im Widerspruch zu $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1$. —

Mit einer ähnlichen Methode kann man 8.2 für zeilenfinite Matrizen beweisen.

9. Beschränkte Folgen im Wirkfeld.

9.1. Als leichte Folgerung aus §§ 5—7 erhalten wir:

Limitiert eine konvergenztreue Matrix A eine beschränkt-divergente Folge x_k, so auch eine unbeschränkte Folge y_k. Ist $\delta_k \nearrow \infty$ vorgegeben, so kann man dabei sogar

$$\Delta y_k = o(\delta_k \Delta x_k) \tag{1}$$

verlangen.

Beim Beweis unterscheiden wir zwei Fälle. 1. $\chi_A = 0$. Wir erhalten mittels 3.2 oder 3.4 die gewünschte Folge y_k. 2. $\chi_A \neq 0$. Wir erhalten das Ergebnis aus 6.4 und 6.2.

Der Satz wurde — ohne den Zusatz (1) — ohne Beweis veröffentlicht von Mazur und Orlicz [8, Th. III] und in Spezialfällen bewiesen von Hill [6], Darevskij [14] und Wilansky [10]. Mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln bewies Verfasser diesen und den folgenden Satz in [12, § 7].

9.2. Eine Bedingung $\mathfrak{B}$ nennen wir eine Beschränktheitsbedingung (Konvergenzbedingung) — abgekürzt BB bzw. KB — für eine

Matrix A, wenn jede $\mathfrak{B}$ genügende Folge $\{x_k\} \in \mathfrak{A}$ beschränkt (konvergent) ist. Mit diesen Bezeichnungen erhält man unmittelbar aus 9. 1:

Ist für eine konvergenztreue Matrix A die Bedingung $\Delta x_k = o(c_k)$ *eine BB, so sogar eine KB.*

9. 3. *Limitiert die konvergenztreue Matrix A eine beschränkt-divergente Folge* x_k, *so gibt es überabzählbar viele beschränkte Folgen* $y_k^{(\xi)}$, *die von A limitiert werden und*

$$\overline{\lim}_k |y_k^{(\xi)} - y_k^{(\eta)}| \geqq 1 \quad (\xi \neq \eta), \tag{2}$$

$$\Delta y_k^{(\xi)} = O(\Delta x_k) \tag{3}$$

genügen.

Man beweist dies ganz ähnlich wie 9. 1. Die Durchführung überlassen wir dem Leser. Man vgl. dazu AGNEW [1], der diesen Satz ohne den Zusatz (3) mit fast denselben Mitteln bewies. Ferner findet man den ersten Teil des Satzes ohne Beweis bei MAZUR und ORLICZ [8, Th. V].

10. Umkehrsätze.

10. 1. Mittels der Faktorfolgen — insbesondere aus 5. 2 und 6. 2 — erhält man Beziehungen zwischen gewissen Umkehrbedingungen, wie dies an einem Beispiel in 9. 2 gezeigt wurde. Ferner haben wir in 7. 5 Umkehrsätze hergeleitet.

10. 2. Mit den Ergebnissen aus § 3 können wir auch Kriterien für Nichtlimitierbarkeit und damit Konvergenzbedingungen erhalten. A und B seien konvergenztreue Matrizen, B limitiere keine divergente Folge (woraus wegen 3. 4 $\chi_B \neq 0$ folgt), es sei $\chi_A \neq 0$. (Für B können wir z. B. die Einheitsmatrix I nehmen.) Wir setzen

$$G = A - \frac{\chi_A}{\chi_B} B.$$

Dann ist $\chi_G = 0$ und G genügt den in 3. 2 und 3. 4 gemachten Voraussetzungen. Wir ermitteln mit 3. 2 bzw. 3. 4 für G Limitierbarkeitskriterien der Form |Q| bzw. (Q). A limitiert keine divergente Folge s_k, die G-limitierbar ist. *Wir haben damit Umkehrbedingungen der Form* |Q| *bzw.* (Q) *für A erhalten.*

Ist hingegen A eine konvergenztreue Matrix mit $\chi_A = 0$, so existiert für A ein Limitierbarkeitskriterium der Form |Q|. Zu jeder weiteren |Q|-Bedingung gibt es — man vgl. den Beweis zu 3. 4, Teil II — divergente Folgen, die beiden |Q|-Bedingungen genügen. Somit ist in diesem Falle keine Umkehrbedingung der Form |Q| und erst recht keine der Form (Q) vorhanden.

10. 3. Der folgende Satz wurde von ERDÖS und PIRANIAN [4] für permanente Matrizen A bewiesen:

A sei eine permanente Matrix oder genüge allgemeiner den Bedingungen Zr *und* $\chi_A \neq 0$. *Dann gibt es eine Folge* s_k, *für die alle Summen* s_k^A *existieren und* $\lim_k |s_k^A| = \infty$ *ist.*

Zum Beweise betrachten wir die Matrix $G = A - \chi_A I$ (I = Einheitsmatrix). Diese limitiert nach 3. 2 eine Folge $s_k \nearrow \infty$. Aus

$$s_k^A = s_k^G + \chi_A \cdot s_k$$

liest man die Behauptung ab.

11. Ein Satz über Faktorfolgen.

11. 1. Der folgende Satz wurde in einer etwas schwächeren Form von Mazur und Orlicz [8, Th. 4] veröffentlicht.

A sei eine konvergenztreue Matrix mit $\overline{\text{fin}}_n |a_{nk}| = \alpha_k \neq 0$. *Genau dann limitiert A mit zwei A-limitierbaren Folgen* x_k *und* y_k *stets auch die Folge* $x_k y_k$, *wenn A keine divergenten Folgen limitiert.*

Beweis. I. Limitiert A keine divergenten Folgen, so besteht das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ aus allen konvergenten Folgen. Daraus ergibt sich die Behauptung bezüglich $x_k y_k$.

II. Aus $\{x_k\} \in \mathfrak{A}$, $\{y_k\} \in \mathfrak{A}$ folge $\{x_k y_k\} \in \mathfrak{A}$. Nun gehört jede konvergente Folge y_k zu $\mathfrak{A}$. Für $\{x_k\} \in \mathfrak{A}$ muß daher die Matrix $\{a_{nk} x_k\}$ der Bedingung Zn (vgl. die Bemerkung über konvergenztreue Matrizen in § 2), also erst recht der Bedingung $\overline{\text{fin}}_k \overline{\text{fin}}_n |a_{nk} x_k| < \infty$ genügen. Wir führen nun zwei Annahmen zum Widerspruch, indem wir eine A-limitierbare Folge w_k mit $\overline{\lim} |w_k| \alpha_k = \infty$ konstruieren.

1. Es sei $\overline{\lim} \alpha_k > 0$, A limitiere eine divergente Folge. Dann limitiert A nach 9. 1 auch eine unbeschränkte Folge w_k. Offenbar ist $\overline{\lim} |w_k| \alpha_k = \infty$.

2. Es sei $\overline{\lim} \alpha_k = 0$. Aus 3. 6 entnehmen wir unter Verwendung bekannter Sätze über absolut konvergente Reihen, daß A eine Folge t_k limitiert, für die $\overline{\lim} |t_k^2| \alpha_k = \infty$ ist. A limitiert dann auch die Folge $w_k = t_k t_k$, die somit die gewünschte Eigenschaft hat.

Es bleibt also nur die Annahme, daß $\overline{\lim} \alpha_k > 0$ ist und A keine divergenten Folgen limitiert.

12. Ausblick.

12. 1. Die Matrizen $G^{(p)}$ ($p = 0, 1, \ldots$) mögen den Bedingungen Zr und $\chi = 0$ genügen. Nach 3. 2 bestimmen wir zu jedem $G^{(p)}$ eine Limitierbarkeitsbedingung $|Q^{(p)}|$. Wir können nun leicht eine Bedingung $|Q|$ angeben, die nicht schwächer als jede Bedingung $|Q^{(p)}|$ ist — wir wählen die q_j etwa so, daß in jedem Intervall $\langle q_i^{(p)}, q_{i+1}^{(p)} \rangle$ höchstens p der q_j liegen — und erhalten ein allen $G^{(p)}$ gemeinsames Limitierbarkeitskriterium $|Q|$, das somit Folgen aus dem Durchschnitt der Wirkfelder der $G^{(p)}$ liefert. Damit lassen sich auch die auf 3. 2

aufbauenden Folgerungen, etwa 9. 1, erweitern (man vgl. MAZUR und ORLICZ [8, Th. 3]).

Entsprechendes gilt für die Bedingungen (Q) usw.

12. 2. Die Ergebnisse der Arbeit lassen sich mit geringen Änderungen auf Integraltransformationen übertragen.

Literaturverzeichnis.

AGNEW, R. P.

[1] Convergence fields of methods of summability. Annals of Math. **46**, 93—101 (1945).

[2] A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 128—132 (1946).

DAREVSKIJ, V.

[3] On Toeplitz's methods. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. math. **11**, 3—32 (1947). (Russisch. Englische Zusammenfassung.)

ERDŐS, P. und PIRANIAN, G.

[4] A note on transforms of unbounded sequences. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 787—790 (1947).

HAHN, H.

[5] Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. f. Math. **32**, 3—88 (1922).

HILL, J. D.

[6] Some properties of summability. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 227 bis 230 (1944).

LORENTZ, G.

[7] Über lineare Summierungsverfahren. Recueil math. Moscou **39**, III, 44—51 (1932).

MAZUR, S. und ORLICZ, W.

[8] Sur les méthodes linéaires de sommation. C. R. **196**, 32—34 (1933).

SCHUR, I.

[9] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. für Math. **151**, 79—111 (1920).

WILANSKY, A.

[10] A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 914—916 (1949).

WINN, C. E.

[11] Sur la convergence d'une suite dérivée d'une autre suite à variation bornée. C. R. **194**, 1425—1427 (1932).

ZELLER, K.

[12] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951).

[13] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951).

DAREVSKIJ, V.

[14] On intrinsically perfect methods of summation. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. math. **10**, 97—104 (1946). (Russisch. Englische Zusammenfassung.)

(Eingegangen am 7. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 152—178 (1952).

Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

W. Jurkat (Tübingen) und A. Peyerimhoff (Gießen).

In einer kürzlich erschienenen Arbeit untersuchten wir Matrixtransformationen, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt[1]). Dort wurden Fragen über die Größenordnung limitierbarer Folgen und über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren behandelt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir verschiedene Anwendungen auf Vergleichssätze besprechen. Wir verwenden dabei eine Fortbildung gewisser funktionalanalytischer Überlegungen, welche Herr Mazur und einige andere Autoren beim Beweis von Verträglichkeitssätzen anwandten[2]). Diese Überlegungen erlauben es uns, unter gewissen Voraussetzungen Schlüsse von O auf o durchzuführen, und diese Voraussetzungen sind erfüllt, wenn der Mittelwertsatz gilt. Der Beweis eines Vergleichssatzes verläuft dann in zwei Schritten: zunächst ergibt sich durch unmittelbare Anwendung des Mittelwertsatzes ein etwas schwächerer Vergleichssatz und daraus durch Anwendung des $O \to o$-Schlusses der gewünschte Satz. Wir beweisen die Vergleichssätze in einer Form, welche auch unmittelbar die Verträglichkeit erkennen läßt.

Bei der genauen Durchführung dieser Überlegungen zeigt es sich, daß wir zum Beweis möglichst allgemeiner Vergleichssätze noch einen weiteren Mittelwertsatz brauchen. Dieser wird in § 1 eingeführt, und es werden hinreichende Bedingungen für seine Gültigkeit angegeben. In § 2 formulieren und beweisen wir die verwendeten $O \to o$-Sätze. Der § 3 bringt eine direkte Anwendung dieses $O \to o$-Prinzips auf Mittelwertsätze. Wir haben bereits in unserer letzten Arbeit Spezialfälle des hier bewiesenen Ergebnisses zum Beweis von Aussagen über die Größenordnung limitierbarer Folgen verwendet. In § 4 beweisen wir allgemeine Vergleichssätze. Die §§ 5—7 behandeln Anwendungen, und zwar in § 5 das „first theorem of consistency“ und das „second theorem of consistency“ für Rieszsche Mittel, in § 6 den Vergleich von Nörlund-Verfahren, bewichteten arithmetischen Mitteln und die Beziehungen zwischen diesen Verfahren, in § 7 endlich den bekannten Äquivalenzsatz von Herrn M. Riesz.

[1]) Jurkat-Peyerimhoff [11].

[2]) Vgl. etwa Mazur [13], Banach [1], Zeller [16].

Aus einem der Vergleichssätze des § 4 ergibt sich ein neuer Beweis für die kürzlich von uns bewiesene Verallgemeinerung des bekannten Satzes von HARDY-BOHR. Durch ähnliche Überlegungen kann man allgemeine Sätze über Summierbarkeitsfaktoren gewinnen, welche z. B. den bekannten Satz von I. SCHUR enthalten. Die Vergleichssätze des § 4 ermöglichen es ferner, einen direkten Beweis für den Äquivalenzsatz von KNOPP-SCHNEE zu führen. Auf diese Dinge wollen wir später noch zurückkommen. Endlich sei erwähnt, daß die Ergebnisse zum großen Teil auch bei Integraltransformationen ihre Gültigkeit behalten.

1. Eine Ergänzung zu den früheren Mittelwertsätzen.

1. 1. Wir betrachten reelle Matrixtransformationen der Form

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu . \tag{1}$$

Wir sagen, daß die Transformation $A = (a_{n\nu})$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, wenn eine Abschätzung der Form

$$\mathfrak{M}: \quad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

gilt[3]). Sachlich ist es völlig gleichbedeutend, wenn wir die rechte Seite von $\mathfrak{M}$ durch $K \cdot \operatorname{Max}_{0 \leqq \mu \leqq n} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu \right|$ ersetzen. Wir ziehen indessen die obige Schreibweise vor.

Hinreichende Bedingungen dafür, daß A den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, entnimmt man dem

Lemma 1. *Genügt die Matrix* $(a_{n\nu})$ *den Bedingungen*[4])

$$(\mathrm{M}_1) \qquad a_{n\nu} \neq 0, \quad 0 \leqq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n \leqq m)$$

und

$$(\mathrm{M}_2) \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq n \leqq m),$$

dann gilt die Ungleichung

$$(2) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \leqq K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m),$$

so daß also $\mathfrak{M}$ *erfüllt ist.*

Der Beweis beruht auf einer mehrmaligen Anwendung des ABELschen Lemmas[3]).

[3]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [11].

[4]) Das Zeichen „$\nearrow$“ („$\searrow$“) bedeutet: wächst (fällt) monoton im weiteren Sinn.

In dieser Arbeit benötigen wir neben $\mathfrak{M}$ noch einen weiteren Mittelwertsatz für normale Matrixtransformationen[5]), nämlich

$$\mathfrak{M}^*: \quad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K^* \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n'} |a_{n'\nu}|} \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m).$$

Die Ungleichung $\mathfrak{M}^*$ ist ebenfalls richtig, wenn (M_1) und (M_2) erfüllt sind. Zum Beweis dieser Behauptung werden wir zunächst das Abelsche Lemma erweitern und daraus $\mathfrak{M}^*$ ableiten.

Lemma 2. *Genügen die Zahlen η_ν und b_ν den Bedingungen*

$$\eta_\nu > 0, \quad \eta_\nu \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu > 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

dann gilt für beliebige a_ν mit passendem n' die Ungleichung

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} b_\nu\right|} \qquad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{5}$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung

$$A_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu, \quad B_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu, \quad \Delta\eta_\nu = \eta_\nu - \eta_{\nu+1} \ (0 \leqq \nu \leqq n-1), \quad \Delta\eta_n = \eta_n.$$

Durch Anwendung partieller Summation folgt

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \Delta\eta_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu}{B_\nu} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|} \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \nu \leqq n} \frac{|A_\nu|}{|B_\nu|}.$$

(Wegen $\Delta\eta_n > 0$, $B_n > 0$ sind die im Nenner auftretenden Summen von Null verschieden.)

Zusatz. Ist

$$\eta_\nu > 0, \quad \eta_\nu \nearrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{3'}$$

$$\sum_{\nu=k}^{n} b_\nu > 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4'}$$

so gilt entsprechend

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=n'}^{n} a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=n'}^{n} b_\nu\right|} \qquad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{5'}$$

[5]) Diese werden durch Dreiecksmatrizen A mit $a_{nn} \neq 0$ vermittelt.

Das Wesentliche bei Lemma 2 ist, daß im Zähler und Nenner das gleiche n' genommen werden darf. Man beachte die Analogie zum zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Setzt man $b_0 = 1$, $b_\nu = 0$ $(\nu > 0)$ bzw. $b_\nu = 0$ $(\nu < n)$, $b_n = 1$, dann geht (5) bzw. (5′) in das gewöhnliche Abelsche Lemma über.

Satz 1. *Genügt die Matrix* $(a_{n\nu})$ *den Bedingungen* (M_1) *und* (M_2), *dann ist für die Transformation* A *der Mittelwertsatz* $\mathfrak{M}^*$ *(mit* $K^* = 1$*) erfüllt.*

Der Beweis kann ganz analog zu unserem früheren Beweis von Lemma 1 geführt werden: Wegen (M_1) und (M_2) gilt nach Lemma 2 die Ungleichung

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} a_{n\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} |a_{n\nu}|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n_1} a_{n\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n_1} |a_{n\nu}|} \quad (0 \leqq n_1 \leqq n \leqq m).$$

Diese Schlußweise iteriert, führt auf die Ungleichungen

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} a_{n_k \nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} |a_{n_k \nu}|} \quad (n \geqq n_1 \geqq \ldots \geqq n_k \geqq n_{k+1} \geqq 0). \tag{6}$$

Für einen Index k gilt schließlich $n_k = n_{k+1}$ und dann ist (6) (mit $n' = n_k$) gleichbedeutend mit $\mathfrak{M}^*$.

1. 2. Wir schließen einige Bemerkungen über die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ und ihre Beziehungen zueinander an. Dabei wollen wir folgende Bezeichnungen benutzen: Aus einer Matrix $A = (a_{n\nu})$ und einer Zahlenfolge $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ entsteht die Matrix αA durch die Vorschrift

$$\alpha A = (\alpha_n a_{n\nu}) \tag{7}$$

und die Matrix $A\alpha$ durch die Vorschrift

$$A\alpha = (a_{n\nu} \alpha_\nu). \tag{8}$$

(Dadurch, daß wir α vor bzw. hinter die Matrix A schreiben, wird angedeutet, daß der Index von α mit dem vorderen bzw. hinteren Index von $a_{n\nu}$ übereinstimmt.)

Zunächst erkennt man unmittelbar: Wenn $A = (a_{n\nu})$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, dann gilt dies auch für $\frac{1}{\eta} A = \left(\frac{a_{n\nu}}{\eta_n}\right)$, wo $\{\eta_n\}$ eine positive und monoton wachsende Zahlenfolge ist. Viele wichtige Matrixverfahren können als Mittelbildungen aufgefaßt werden (etwa die bewichteten arithmetischen Mittel). Wenn wir den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ für den „Zähler" dieser Mittel bewiesen haben, dann gilt $\mathfrak{M}$ i. a. auch für das Verfahren selbst, denn wir können dann für η_n die Folge

der „Gesamtgewichte“ wählen. (Vgl. die bei JURKAT-PEYERIMHOFF [11] angeführten Mittelwertsätze.) Umgekehrt kann es natürlich vorkommen, daß $\mathfrak{M}$ auch noch für ηA gilt. Dies tritt z. B. ein, wenn man bei der obigen Mittelbildung wieder zum Zähler übergeht, also mit dem Gesamtgewicht multipliziert. Ein anderes Beispiel entnehmen wir Lemma 1: unter den Voraussetzungen (M_1) und (M_2) erfüllt auch die Matrix $\alpha A = \left(\frac{a_{m\nu}}{a_{m0}}\right)$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$. Hier ist $\alpha_m = \frac{1}{a_{m0}}$ sicher unbeschränkt, wenn A permanent ist.

Betrachten wir die Matrizen αA, so entsteht also aus $\mathfrak{M}$ eine ganze Skala von Mittelwertsätzen, die teils schwächer, teils stärker als $\mathfrak{M}$ sind. Beim Mittelwertsatz $\mathfrak{M}^*$ liegen die Dinge anders, da dieser homogen in den Elementen der Matrix ist: Die Matrizen A und αA (mit $\alpha_\nu \neq 0$) erfüllen gleichzeitig $\mathfrak{M}^*$.

Wenn man daher $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ vergleichen will, ist es sinngemäß, die (normale) Matrix A zu normieren. Wir nehmen etwa an, daß die Zeilennormen die Größenordnung 1 besitzen, daß also

$$0 < \varepsilon \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| \leqq K$$

ist. Dies ist für alle permanenten Matrizen der Fall. Man erkennt sofort, daß dann $\mathfrak{M}^*$ eine Verschärfung von $\mathfrak{M}$ bedeutet. (Ohne die angegebene Normierung hätte man nur schließen können, daß aus $\mathfrak{M}^*$ die Gültigkeit von $\mathfrak{M}$ für $\left(\frac{a_{n\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}|}\right)$ folgt.) Umgekehrt kann man in manchen Fällen aus $\mathfrak{M}$ für αA $\left(\text{mit } \alpha_m = \frac{1}{a_{m0}}\right)$ wieder $\mathfrak{M}^*$ für A folgern. Dies ist z. B. bei den unstetigen RIESZschen Mitteln $R_\lambda^\varkappa$ $(0 < \varkappa \leqq 1)$ möglich.

Es liegt nahe, die beiden Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ formal zusammenzufassen zu dem allgemeinen Mittelwertsatz

$$\mathfrak{M}\,g\text{:} \qquad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K \cdot g_{mn} \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right|}{g_{n'n'}} \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

mit $0 \leqq g_{mn} \leqq g_{mm}$, $g_{mm} \neq 0$ $(0 \leqq n \leqq m)$.

Die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ entsprechen der speziellen Wahl

$$g_{mn} = 1 \quad \text{bzw.} \quad g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \quad (A \text{ normal}).$$

Aus $\mathfrak{M}\,g$ folgt, daß die Matrix αA mit $\alpha_m = \frac{1}{g_{mm}}$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt. Für $g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|$ ist dieser Zusammenhang schon oben genannt.

2. Allgemeine $O \to o$-Sätze.

2. 1. In diesem Paragraphen betrachten wir auch nicht zeilenfinite Matrixtransformationen

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu . \tag{9}$$

Das Wirkfeld $o(A)$ der Transformation $A = (a_{n\nu})$ besteht aus allen Folgen $\{s_\nu\}$, für die $A_n(s)$ für alle n existiert und

$$A_n(s) = o(1) \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

ist. Wir schreiben kurz

$$s \in o(A). \tag{11}$$

Das Wirkfeld $O(A)$ besteht aus allen Folgen s, für die $A_n(s)$ für alle n existiert und

$$A_n(s) = O(1) \qquad (n \to \infty) \tag{12}$$

ist. Wir schreiben kurz

$$s \in O(A). \tag{13}$$

Die Matrix $(a_{n\nu})$ erfüllt die Spaltenbedingung Sp_0, wenn gilt

Sp_0: $\qquad a_{n\nu} \to 0$ für $n \to \infty$, ν fest.

Bei den folgenden Untersuchungen werden wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß die Wirkfelder vieler bekannter Matrixtransformationen eine besonders übersichtliche Struktur besitzen, daß nämlich die abbrechenden Folgen darin überall dicht liegen. Transformationen mit dieser Eigenschaft nennen wir perfekt. Genauer definieren wir:

Eine normale Transformation $A = (a_{n\nu})$ heißt perfekt, wenn sie die Bedingung Sp_0 erfüllt, und wenn es zu jeder Folge $s \in o(A)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abbrechende Folge $g = \{g_\nu\}$ ($g_\nu = 0$ für $\nu > \nu_0$) gibt, so daß für die transformierten Folgen $A_n(s)$ und $A_n(g)$ gilt:

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \, |A_n(s) - A_n(g)| < \varepsilon. \tag{14}$$

(*Wegen Sp_0 liegt g in $o(A)$.*)

Zur Feststellung der Perfektheit besitzen wir das folgende Kriterium:

Lemma 3. *Eine Transformation $A = (a_{n\nu})$, die normal ist und Sp_0 erfüllt, ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \tag{15}$$

und

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n a_{n\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{16}$$

stets

$$\alpha_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{17}$$

nach sich ziehen.

Der Begriff der Perfektheit wurde erstmalig von Mazur [13] verwendet. Mazur bewies in dieser Arbeit die Perfektheit der Cesàroschen und der Euler-Knoppschen Verfahren. Bei Mazur und Banach [1] wird die Bedingung von Lemma 3 zur Definition der Perfektheit verwendet. Die hier angegebene Definition findet sich bei Hill [8] und Peyerimhoff [14][6]).

Perfektheitsaussagen für einige Klassen von Verfahren erhält man aus den folgenden Lemmas:

Lemma 4. *Jede normale Transformation, welche* Sp_0 *und* $\mathfrak{M}$ *erfüllt, ist perfekt.*

(Peyerimhoff [14].)

Lemma 5. *Jede normale permanente Transformation, welche* Sp_0 *erfüllt, ist perfekt, wenn die Spalten ihrer Inversen beschränkt sind.*

(Peyerimhoff [14].)

Der Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ ist erfüllt bei den unstetigen Rieszschen Mitteln $R_\lambda^\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ (vgl. Jurkat [10]), bei den bewichteten arithmetischen Mitteln, ferner bei den Nörlund-Verfahren $N(p_n)$ mit[7])

$$0 < p_n \searrow, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow, \tag{18}$$

(insbesondere bei den Cesàroschen Verfahren C_k mit $0 \leqq k \leqq 1$). Nach Lemma 4 sind also diese Verfahren (wenn sie Sp_0 erfüllen) perfekt[8]). Aus dem Lemma 5 folgt, daß konvergenzgleiche normale Verfahren und die Cesàroschen Verfahren beliebiger Ordnung perfekt sind.

Beim Beweis des folgenden Satzes 2 benötigen wir ein im wesentlichen mit dem Satz von Toeplitz übereinstimmendes Lemma:

Lemma 6. 1°. *Die Bedingung*

$$\mathrm{Zn}: \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqq K \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

---

[6]) In diesen Arbeiten wird das Kriterium allerdings unter der Voraussetzung, daß A permanent ist, bewiesen. Für Matrizen, die nur Sp_0 erfüllen, verläuft der Beweis ganz entsprechend.

[7]) Vgl. Jurkat-Peyerimhoff [11]. Dort wurde gezeigt, daß die Bedingungen

$$p_n > 0, \quad \frac{p_{n+\mu}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow, \quad \frac{p_{n+\mu}}{p_n} \leqq K \qquad (\mu \geqq 0) \tag{18'}$$

für $\mathfrak{M}$ hinreichend sind. Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingungen (18) und (18') gleichwertig sind.

[8]) Die „Zähler" dieser Verfahren erfüllen ebenfalls $\mathfrak{M}$ und sind deshalb, als neue Verfahren aufgefaßt, ebenfalls perfekt, soweit sie Sp_0 erfüllen.

ist notwendig und hinreichend dafür, daß $A_n(s)$ für jede Nullfolge s existiert und beschränkt bleibt. Das gleiche gilt, wenn man die beschränkten Folgen s betrachtet.

2°. *Die Bedingungen* Zn *und*

Sp: $$a_{n\nu} \to a_\nu \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest},$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $A_n(s)$ für jede Nullfolge s existiert und konvergiert. Es ist dann

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu s_\nu . \tag{19}$$

2. 2. Satz 2. *$A = (a_{n\nu})$ sei eine beliebige Transformation. $B = (b_{n\nu})$ sei normal, und es sei*[9])

$$o(B) \leqq O(A). \tag{20}$$

G sei eine Teilmenge der Wirkfelder $o(B)$ und $o(A)$, also

$$G \leqq o(B), \quad G \leqq o(A). \tag{21}$$

Dann liegt jedes Element $s \in o(B)$, zu dem es Elemente g^r $(r = 0, 1, \ldots)$ aus G gibt mit

$$\overline{\operatorname{fin}}_n |B_n(s) - B_n(g^r)| = o(1) \quad \text{für} \quad r \to \infty, \tag{22}$$

in $o(A)$.

Beweis. Aus (20) folgt, daß $A_n(s)$ für jedes $s \in o(B)$ und $n = 0, 1, \ldots$ existiert. Mit Hilfe der inversen Transformation

$$s_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s)$$

ergibt sich

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s) + o(1)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k} B_\mu(s) \sum_{\nu=\mu}^{k} a_{n\nu} b'_{\nu\mu} + o(1).$$

Auf der rechten Seite steht (bei festem n, für $k \to \infty$) eine konvergenztreue Transformation der Nullfolge $\{B_\mu(s)\}$. Aus Lemma 6 folgt wegen Sp, daß

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu} b'_{\nu\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots) \tag{23}$$

konvergiert, und wegen (19) gilt dann

$$A_n(s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu(s) \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu} b'_{\nu\mu} . \tag{24}$$

[9]) Beziehungen zwischen Mengen bezeichnen wir mit „$\leqq$“ (Teilmenge), „$<$“ echte Teilmenge) und „$=$“ (Gleichheit).

Daraus folgt wegen (20) nach Lemma 6 die Ungleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu}\, b'_{\nu\mu} \right| \leqq K \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{25}$$

und daher

$$\overline{\operatorname{fin}}_n\, |A_n(s)| \leqq K\, \overline{\operatorname{fin}}_n\, |B_n(s)|. \tag{26}$$

Für ein passendes r gilt schließlich wegen (22) und (26) die Ungleichung

$$\begin{aligned} |A_n(s)| &\leqq |A_n(s - g^r)| + |A_n(g^r)| \leqq K\, \overline{\operatorname{fin}}\, |B_n(s - g^r)| + |A_n(g^r)| \\ &\leqq K\varepsilon + |A_n(g^r)|. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (21), da $A_n(g^r) \to 0$ für $n \to \infty$ [10]).

Eine unmittelbare Folge des Satzes 2 ist

Satz 3. *$A = (a_{n\nu})$ sei eine beliebige Transformation, welche die Bedingung* Sp_0 *erfüllt. $B = (b_{n\nu})$ sei normal und perfekt, und es sei*

$$o(B) \leqq O(A). \tag{28}$$

Dann gilt auch

$$o(B) \leqq o(A). \tag{29}$$

Beweis. Die Bedingung (22) ist wegen der Perfektheit von B für jedes $s \in o(B)$ erfüllt, wenn G aus den abbrechenden Folgen besteht. Diese Folgen liegen in $o(A)$, da A die Bedingung Sp_0 erfüllt, so daß auch (21) gilt. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.

Zusatz. Wenn A und B permanent sind, ist $A \geqq B$ [11]) und A ist mit B verträglich. Hierin ist ein bekannter Satz von Mazur über Verträglichkeit enthalten, bei dem aus der Perfektheit von B auf die Verträglichkeit geschlossen wird [12]). Das wesentliche Ergebnis von Satz 3 liegt aber weniger im Beweis der Verträglichkeit, als darin, daß wir aus der O-Abschätzung (28) die entsprechende o-Abschätzung (29) gewinnen konnten. Gerade dieses $O \to o$-Prinzip wird für die späteren Anwendungen bedeutungsvoll werden.

Wir können Satz 3 in etwas speziellerer Form auch so formulieren: *Eine normale Transformation $C = (c_{n\nu})$ ist nulltreu, wenn sie die Bedingung* Zn *erfüllt, und wenn C durch zwei normale Transformationen A und B in der Form $C = AB^{-1}$ dargestellt werden kann, wobei A die Bedingung* Sp_0 *erfüllt und B perfekt ist.* (Wenn B die Einheitsmatrix ist, erhalten wir hierdurch gerade den Toeplitzschen Satz für nulltreue Matrizen.)

---

[10]) Vgl. hierzu Banach [1], Kap. 5, th. 3.

[11]) $A \geqq B$ bedeutet, daß jede B-limitierbare Folge auch A-limitierbar ist. Wenn es überdies A-limitierbare Folgen gibt, die nicht B-limitierbar sind, verwenden wir die Bezeichnung $A > B$. Sind A und B äquivalent, dann schreiben wir $A \approx B$.

[12]) Vgl. Mazur [13], Banach [1] (Kap. 5, th. 12) und Zeller [16].

Die Sätze 2 und 3 behalten ihre Gültigkeit, wenn A eine Matrixtransformation $A = (a_{tv})$ mit stetigem erstem Parameter ist. Wir nehmen etwa an, daß t alle Werte einer Zahlenmenge T durchlaufen soll und daß das Konvergenzverhalten der Transformierten $A_t(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{t\nu} s_\nu$ bei Annäherung von t an einen Häufungspunkt τ von T untersucht wird. $A_t(s)$ konvergiert bekanntlich genau dann für $t \to \tau$, wenn dies für jede Folge $\{t_n\}$ $(t_n \in T)$, die für $n \to \infty$ gegen τ strebt, der Fall ist. Wir dürfen uns also auf die durch $(a_{t_n\nu})$ dargestellten Matrixtransformationen beschränken, und auf diese können wir die Sätze 2 und 3 anwenden und erhalten dann aus den angegebenen Voraussetzungen die Konvergenz von $A_{t_n}(s)$ für jede Folge $t_n \to \tau$, und damit auch die Konvergenz von $A_t(s)$ für $t \to \tau$.

Entsprechendes gilt in späteren Fällen.

3. $O \to o$-Schlüsse bei Mittelwertsätzen.

Wir wollen zunächst normale Transformationen betrachten, welche $\mathfrak{M}$ und Sp_0 erfüllen. Für jedes $s \in o(A)$ folgt aus $\mathfrak{M}$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = O(1) \quad \text{für } m \to \infty \text{ (gleichmäßig in } n). \tag{30}$$

Wenn A die für $\mathfrak{M}$ hinreichenden Bedingungen (M_1) und (M_2) erfüllt, dann folgt aus (2), daß (30) verschärft werden kann[13]:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = o(1) \quad \text{für } m \to \infty \text{ (gleichmäßig in } n). \tag{31}$$

Herr Zeller[14] hat bemerkt, daß (31) bereits richtig ist, wenn A nur $\mathfrak{M}$ erfüllt. Die Beziehung (31) ist eine wichtige Verschärfung des Mittelwertsatzes $\mathfrak{M}$. Wir haben früher gezeigt, daß sich aus (31) unmittelbar Aussagen über die Größenordnung limitierbarer Folgen ergeben[13].

Auch im Hinblick auf die Perfektheit ist (31) von Bedeutung. Wir wissen zwar, daß aus $\mathfrak{M}$ die Perfektheit von A folgt, aber wir können über die bei der Approximation (14) zu verwendenden abbrechenden Folgen g nichts aussagen. Aus (31) folgt nun, daß (14) erfüllt ist, wenn wir für g die Folgen einsetzen, die aus $s = \{s_\nu\}$ dadurch entstehen, daß wir von einer hinreichend späten Stelle an die Elemente s_ν durch Null ersetzen[14].

Der Schluß von (30) auf (31) ist weiter für Vergleichssätze (§ 4) von Bedeutung. Um unnötige Einschränkungen zu vermeiden, werden wir dort aber die $O \to o$-Sätze von § 2 heranziehen, die es uns auch erlauben, die Beziehung (31) aus (30) abzuleiten. Allgemeiner können wir sogar genaue Bedingungen angeben, wann Mittelwertsätze vom Typ $\mathfrak{M}g$ (§ 1) eine ähnliche Verschärfung zulassen.

---

[13] Jurkat-Peyerimhoff [11].

[14] Zeller [17].

Satz 4. Voraussetzung: *Die Transformation* $A = (a_{nv})$ *sei normal und erfülle einen Mittelwertsatz vom Typ*

$$\mathfrak{M}g: \quad \left|\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v\right| \leqq K \cdot g_{mn} \frac{\left|\sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v\right|}{g_{n'n'}} \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

$$\text{mit } 0 \leqq g_{mn} \leqq g_{mm}, \; g_{mm} \neq 0 \qquad (0 \leqq n \leqq m).$$

Es sei $n(m) \leqq m$ *eine feste Funktion mit* $n(m) \to \infty$ *für* $m \to \infty$, *ferner gelte*

$$a_{nk} = o(g_{nn}) \qquad (n \to \infty, \; k \text{ fest}) \tag{32}$$

und

$$g_{mn} \neq 0 \qquad (n = n(m)). \tag{33}$$

Behauptung: *Notwendig und hinreichend dafür, daß aus*

$$A_n(s) = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} s_v = o(g_{nn}) \tag{34}$$

stets

$$\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v = o(g_{mn}) \qquad (m \to \infty, \; n = n(m)) \tag{35}$$

folgt, ist

$$a_{mk} = o(g_{mn}) \quad (m \to \infty, \; n = n(m), \; k \text{ fest}). \tag{36}$$

Beweis. Die Notwendigkeit von (36) ergibt sich, wenn man in (35) für s die speziellen Folgen $s^k = \{\delta_{kv}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ einsetzt [15]). Um zu zeigen, daß (36) hinreicht, betrachten wir die Matrizen $\tilde{A} = \left(\frac{a_{nv}}{g_{nn}}\right)$ und $A^* = (a^*_{mk})$, wobei $a^*_{mk} = \frac{a_{mk}}{g_{mn}}$ für $k \leqq n = n(m)$ und sonst gleich 0 gesetzt ist. Die Behauptung (35) geht dann über in

$$o(\tilde{A}) \leqq o(A^*). \tag{37}$$

Zum Beweis von (37) wenden wir den Satz 3 an. Die Matrizen $\tilde{A}$ und A^* erfüllen wegen (32) und (36) die Bedingung Sp_0. $\tilde{A}$ erfüllt den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ (vgl. § 1) und ist deshalb nach Lemma 4 perfekt. Wir müssen also nur noch den Nachweis erbringen, daß $o(\tilde{A}) \leqq O(A^*)$ ist, und diese Beziehung folgt sofort aus $\mathfrak{M}g$.

Zusatz. Wenn (36) und (33) für alle Funktionen $n = n(m)$ mit $n(m) \to \infty$ für $m \to \infty$ gilt, dann gilt (35) gleichmäßig für diese Funktionen.

Im Spezialfall $g_{mn} = 1$ geht $\mathfrak{M}g$ über in $\mathfrak{M}$, und wir erhalten durch Satz 4 gerade die zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Beziehung zwischen (30) und (31).

[15]) $\delta_{kv} = 1$ für $v = k$ und sonst 0.

Wählen wir $g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|$, dann erhalten wir die entsprechende o-Beziehung für $\mathfrak{M}^*$, aber die Voraussetzungen (32) und (36) sind hier nicht von selbst erfüllt[16]). Wir wollen etwa annehmen, daß $a_{n\nu} \neq 0$ und $|a_{n\nu}| \nearrow$ für $\nu \nearrow$ gilt ($\nu \leqq n$). Aus der Abschätzung

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \geqq (n(m) - k)\,|a_{mk}| \qquad (\text{für } n > k)$$

folgt dann (32) und (36).

4. Allgemeine Vergleichssätze.

4. 1. Wir wollen in diesem Paragraphen als Anwendung von Satz 3 einige Vergleichssätze vom Typ

$$O(B) \leqq O(A) \tag{38}$$

bzw.

$$o(B) \leqq o(A) \tag{39}$$

beweisen. Die Beziehung (39) ist i. a. richtig, wenn B perfekt ist und wenn $o(B) \leqq O(A)$ ist (vgl. Satz 3). Die zuletzt genannte Bedingung folgt aber aus $O(B) \leqq O(A)$.

Im folgenden werden wir stets voraussetzen, daß die Matrix B einen der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ erfüllt. Dadurch erreichen wir zweierlei: einmal ist die Perfektheitsvoraussetzung für B i. a. von selbst erfüllt und zum anderen lassen sich besonders übersichtliche Bedingungen für $O(B) \leqq O(A)$ angeben.

Jeder Vergleichssatz der Form (39) schließt von der Konvergenz der Folge $\{B_n(s)\}$ auf die Konvergenz von $\{A_n(s)\}$. Eine Verallgemeinerung dieses Zusammenhanges erhalten wir, wenn wir aus der Konvergenz von $B_n(s)$ mit einer gewissen „Geschwindigkeit" eine entsprechende Aussage über $A_n(s)$ ableiten können. Im einfachsten Fall soll dies bedeuten: Aus

$$B_n(s) = o(\eta_n), \quad o < \eta_n \nearrow \qquad (n \to \infty) \tag{40}$$

folgt stets

$$A_n(s) = o(\eta_n) \qquad (n \to \infty). \tag{41}$$

Wir schreiben kurz

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n]. \tag{42}$$

---

[16]) Es gibt permanente Matrizen, welche sogar (M_1) und (M_2) erfüllen, ohne daß (36) gilt.

Jeden Vergleichssatz vom Typ (42) können wir aber als gewöhnlichen Vergleichssatz (ohne Geschwindigkeit) auffassen, denn (42) ist gleichbedeutend mit

$$o\left(\frac{1}{\eta} B\right) \leqq o\left(\frac{1}{\eta} A\right). \tag{43}$$

Aus jedem Vergleichssatz (39) folgt also eine ganze Skala von Vergleichssätzen (42), wenn die Matrizen $\frac{1}{\eta} A$ und $\frac{1}{\eta} B$ die für die Gültigkeit von (39) nötigen Voraussetzungen erfüllen. Dies wird im folgenden stets der Fall sein, so daß also mit A und B auch stets $\frac{1}{\eta} A$ und $\frac{1}{\eta} B$ die angegebenen Voraussetzungen erfüllen. Insbesondere sei bemerkt, daß $\frac{1}{\eta} A$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ erfüllt, wenn dies von A gilt (§ 1). Dasselbe gilt für die Bedingung Sp_0.

Zu den Vergleichssätzen (38) gibt es eine ganz entsprechende Verallgemeinerung der Form

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n] \tag{44}$$

und diese kann in derselben Weise auf $O\left(\frac{1}{\eta} B\right) \leqq O\left(\frac{1}{\eta} A\right)$ zurückgeführt werden.

Satz 5. *Die Transformationen A und B seien dreieckig. B erfülle $\mathfrak{M}$ und es sei $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$. Dann folgt aus*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| = O(1) \text{ für } n \to \infty \quad \left(\Delta_\nu \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \text{ für } \nu = n \right) \tag{45}$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n]. \tag{46}$$

Erfüllen A und B überdies noch die Bedingung Sp_0, dann gilt

$$o(B) \leqq o(B) \quad [\eta_n]. \tag{47}$$

Beweis. Die Beziehung (46) folgt durch partielle Summation und Anwendung von $\mathfrak{M}$ aus (45):

Für $s \in O(B)$ ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} b_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu \right|$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| = O(1).$$

Wenn A und B die Bedingung Sp_0 erfüllen, dann sind die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt, da B nach Lemma 4 perfekt ist. Aus jenem Satz folgt dann die Behauptung (47) unmittelbar.

Zusatz. Die Bedingung (45) ist erfüllt, wenn der Quotient $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$ monoton in ν und beschränkt ist. Bei der Untersuchung spezieller Verfahren ist es oft sehr viel einfacher, die Monotonie von einer Stelle an als von Anfang an nachzuweisen. Im Hinblick auf diese Tatsache ist es von Bedeutung, daß (45) bereits richtig ist, wenn gilt:

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \text{ monoton in } \nu \text{ für } \nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0 \tag{48}$$

(ν_0 und n_0 unabhängig von n)

und

$$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n). \tag{49}$$

(Es versteht sich von selbst, daß es völlig ausreicht, wenn (48) und (49) nur für alle großen n erfüllt sind. Wir werden dies nicht jedesmal betonen.)

Bemerkung zu Satz 5. Setzt man $A = B\varepsilon = (b_{n\nu}\varepsilon_\nu)$, dann geht (45) nach kurzer Umformung über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta\varepsilon_\nu| = O(1), \tag{50}$$

und (47) in

$$o(B) \leqq o(B\varepsilon) \quad [\eta_n]. \tag{51}$$

(Die Beziehung (51) bleibt richtig, wenn die Bedingung $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$ nicht erfüllt, B aber normal ist, wie man durch eine kleine Abänderung des obigen Beweises erkennt.)

Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich unser Beweis für eine Verallgemeinerung des Hardy-Bohrschen Satzes vereinfachen [17]).

Satz 6. *Die Transformationen A und B seien dreieckig. B erfülle $\mathfrak{M}^*$, und es sei $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$. Ferner sei*

$$\sum_{\nu=0}^{m} |b_{m\nu}| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|\right) \qquad (0 \leqq n \leqq m) \tag{52}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|\right). \tag{53}$$

Dann folgt aus

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} \left|\Delta_\nu\left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O\left(\frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}}\right) + O(1) \qquad (0 \leqq \mu \leqq n) \tag{54}$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n]. \tag{55}$$

Erfüllen A und B überdies noch die Bedingung Sp_0, *dann gilt*

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n]. \tag{56}$$

---

[17]) Jurkat-Peyerimhoff [11], Satz 9 und 11.

Beweis. Die Beziehung (55) folgt aus den Voraussetzungen durch Anwendung von $\mathfrak{M}^*$ auf Grund der folgenden Abschätzungen:

Für $s \in O(B)$ ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} b_{n\nu} s_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu\left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu\right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left|\Delta_\nu\left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| \cdot O(1) \frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} |b_{n\mu}|}{\sum_{\varrho=0}^{n'} |b_{n'\varrho}|} = \frac{O(1)}{\sum_{\varrho=0}^{n} |b_{n\varrho}|} \sum_{\mu=0}^{n} |b_{n\mu}| \sum_{\nu=\mu}^{n} \left|\Delta_\nu\left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right|$$

$$= \frac{O(1)}{\sum_{\varrho=0}^{n} |b_{n\varrho}|} \left(\sum_{\mu=0}^{n} |a_{n\mu}| + \sum_{\mu=0}^{n} |b_{n\mu}|\right) = O(1).$$

Zum Beweis von (56) bemerken wir zunächst, daß B wegen (52) den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt; wenn also A und B die Bedingung Sp_0 erfüllen, dann sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, da B wegen $\mathfrak{M}$ perfekt ist. Aus jenem Satz folgt dann unmittelbar die Behauptung (56).

Zusatz. Die Bedingungen (52) und (53) sind erfüllt, wenn A und B permanent sind.

Die Bedingung (54) ist erfüllt, wenn (45) erfüllt ist; insbesondere folgt (54) aus (48) und (49). Ferner ist (54) erfüllt, wenn (für alle großen n) gilt:

(57) $$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0)$$

(ν_0 und n_0 unabhängig von n),

(58) $$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (n - n_0 < \nu \leqq n),$$

(59) $$\frac{a_{n\,\nu+1}}{b_{n\,\nu+1}} \leqq M \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \qquad (0 \leqq \nu < \nu_0).$$

(Für $\nu_0 = 0$ fällt (59) und für $n_0 = 0$ fällt (58) weg.)

Diese Bedingungen unterscheiden sich insofern von (48) und (49), als von $\frac{a_{n0}}{b_{n0}}$ nicht Beschränktheit verlangt wird, vielmehr darf dieser Quotient mit wachsendem n groß werden. Bei Anwendungen liegt dieser Fall öfters vor, und das gab uns den Anlaß zur Aufstellung des Mittelwertsatzes $\mathfrak{M}^*$.

Mit den folgenden Bemerkungen wollen wir einige Erweiterungen der Sätze 5 und 6 andeuten.

Wenn wir in den Sätzen 5 und 6 die Bedingung Sp_0 ersetzen durch

$$a_{n\nu} = o(\mu_n),\ b_{n\nu} = o(\mu_n) \qquad (n \to \infty),$$

wo μ_n monoton wächst und unbeschränkt ist ($\mu_n > 0$), dann können wir (47) und (56) nur für solche Folgen η_n beweisen, die stärker als μ_n wachsen, für die also $\mu_n = O(\eta_n)$ gilt.

Erfüllen zwei Matrizen A und B die Voraussetzungen von Satz 6 bis auf (52) und (53), dann kann man stets zu Matrizen $\frac{1}{\beta}B$ und $\frac{1}{\alpha}A$ übergehen, die alle Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllen. $\left(\text{Man setze z. B. } \beta_n = \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|, \alpha_n = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}|.\right)$ So erhalten wir den Vergleichssatz

$$o\left(\frac{1}{\beta}B\right) \leqq o\left(\frac{1}{\alpha}A\right) \quad [\eta_n],$$

d. h. aus $B_n(s) = o(\beta_n \eta_n)$ folgt stets $A_n(s) = o(\alpha_n \eta_n)$. Die „Geschwindigkeiten" sind hier verschieden.

Schließlich kann man noch daran denken, sich von der Einschränkung, daß A dreieckig sein soll, zu befreien. Dabei erhält man allerdings kompliziertere Bedingungen. Zunächst muß verlangt werden, daß $A_n(s)$ für jedes $s \in O(B)$ existiert. Dann kann man durch partielle Summation die folgende Umformung ausführen

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_{n\nu}}{b_{m\nu}} b_{m\nu} s_\nu + O(1) = \sum_{\nu=0}^{m} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{m\nu}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{m\mu} s_\mu + O(1),$$

wobei m in Abhängigkeit von n so gewählt sei, daß die Abschätzung für $n \to \infty$ richtig ist. Auf die rechte Seite kann man einen der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}^*$ anwenden. Man muß nun verlangen, daß die auf diese Weise erhaltene Bedingung für alle derartigen Funktionen $m(n)$ gilt (diese hängen noch von s ab).

4.2. Das folgende Lemma erlaubt uns in vielen Fällen die Feststellung, ob eine Beziehung $o(B) \leqq o(A)$ zu $o(B) < o(A)$ verschärft werden kann.

Lemma 7. *Die Transformationen A und B seien dreieckig und A sei normal. Dann folgt aus*

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n] \tag{60}$$

und

$$b_{nn} \neq O(a_{nn}) \tag{61}$$

die Beziehung

$$o(B) < o(A) \quad [\eta_n]. \tag{62}$$

In (60) *und* (62) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Wäre (62) nicht richtig, dann müßte nach Lemma 6 die Folge der Diagonalglieder der Transformation BA^{-1} beschränkt bleiben. Dies widerspricht (61), denn diese Diagonalglieder sind $\frac{b_{nn}}{a_{nn}}$. Die Behauptung über O folgt ebenso.

Zusatz. Die Bedingung (61) ist sicherlich erfüllt, wenn B normal ist und $\frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to 0$ für $n \to \infty$.

Aus den Sätzen 5 und 6 können Äquivalenzsätze abgeleitet werden. Wenn nämlich der Quotient $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$ die Bedingungen (48), (49) bzw. (57), (58), (59) erfüllt, dann ist i. a. $o(B) \leqq o(A)$. Ebenso kann man hin-

reichende Bedingungen für $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$ angeben, welche die Richtigkeit von $o(B) \geqq o(A)$ nach sich ziehen (indem man in den genannten Bedingungen (48), ..., (59) $a_{n\nu}$ mit $b_{n\nu}$ vertauscht). Auf diese Weise erhält man die folgenden Äquivalenzsätze (mit vereinfachten Voraussetzungen).

Satz 7. *Erfüllen die dreieckigen Transformationen A und B den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ und die Bedingung* Sp_0 *und ist* $a_{n\nu} \neq 0$, $b_{n\nu} \neq 0$ $(\nu \leqq n)$, *dann folgt aus*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n) \tag{63}$$

und

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \text{ monoton in } \nu \qquad (\nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0) \tag{64}$$

die Beziehung

$$o(B) = o(A) \quad [\eta_n]. \tag{65}$$

In (65) *darf o durch O ersetzt werden.*

Satz 8. *Die dreieckigen Transformationen A und B seien permanent, und es sei $a_{n\nu} \neq 0$, $b_{n\nu} \neq 0$ $(\nu \leqq n)$. Dann sind die Beziehungen*

$$o(B) = o(A) \quad [\eta_n] \text{ und } O(B) = O(A) \quad [\eta_n] \tag{66}$$

sicher richtig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1°. *A erfüllt $\mathfrak{M}$ und B erfüllt $\mathfrak{M}^*$, und es ist*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \qquad (0 \leqq \nu \leqq n), \tag{67}$$

$$\frac{a_{n\nu+1}}{b_{n\nu+1}} \leqq K \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \qquad (0 \leqq \nu < \nu_0), \tag{68}$$

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0), \tag{69}$$

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (n - n_0 < \nu \leqq n); \tag{70}$$

2°. *A erfüllt $\mathfrak{M}^*$ und B erfüllt $\mathfrak{M}$, und es ist*

$$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n), \tag{71}$$

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \frac{a_{n\nu+1}}{b_{n\nu+1}} \qquad (0 \leqq \nu < \nu_0), \tag{72}$$

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \nearrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0), \tag{73}$$

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \geqq \varepsilon > 0 \qquad (n - n_0 < \nu \leqq n). \tag{74}$$

(Für $\nu_0 = 0$ fällt (68) *bzw.* (72) *und für $n_0 = 0$ fällt* (70) *bzw.* (74) *weg.)*

Bemerkung. Die Voraussetzungen 1° und 2° sind bezüglich der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ unsymmetrisch. Sie sind aber jedenfalls erfüllt, wenn A und B die Bedingungen (M_1) und (M_2) erfüllen.

Zum Schluß wollen wir die Vergleichssätze ihrem Typus nach zusammenstellen:

$$o(B) \subset o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) = o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \geqq \varepsilon > 0 \text{ und } \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) = o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \leqq K \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \nearrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) \supset o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to \infty \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \nearrow \text{ für } \nu \nearrow.$$

(Beim ersten und letzten dieser Sätze wurde das Lemma 7 angewandt.) In diesen Sätzen darf o durch O ersetzt werden.

5. Vergleichssätze für Rieszsche Mittel.

5.1. Im folgenden wollen wir mit Hilfe der Sätze des § 4 für die Rieszschen Mittel einige Vergleichssätze beweisen, in denen zwei wichtige Vergleichssätze, das „first theorem of consistency" und das „second theorem of consistency" enthalten sind[18]).

Eine Folge $\{s_\nu\}$ heißt limitierbar durch das Verfahren $R^\varkappa(\lambda)$ der „stetigen" Rieszschen Mittel, wenn gilt[19]):

$$\sigma^\varkappa(\omega) = \frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_\nu < \omega} \Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa s_\nu \to s \quad \text{für } \omega \to \infty \qquad (\varkappa > 0), \tag{75}$$

wo

$$0 \leqq \lambda_n \to \infty, \ \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0 \qquad (n \geqq 0) \tag{76}$$

ist. (Für das größte ν in der Summe (75) ist natürlich

$$\Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa = (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa$$

zu schreiben.)

Wenn ω in (75) nur die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ annehmen soll, dann erhalten wir die „unstetigen" Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$. Infolge der Äquivalenz[20]) $R_\lambda^\varkappa \approx R^\varkappa(\lambda)$ für $0 < \varkappa \leqq 1$ dürfen wir uns auf die Untersuchung der unstetigen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ beschränken, da wir im folgenden nur Indizes $\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ zulassen wollen. Jedes Verfahren $R_\lambda^\varkappa$ ist ein permanentes und normales Matrixverfahren, dessen Elemente links der Diagonale von Null verschieden sind. Für Indizes $\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ erfüllt $R_\lambda^\varkappa$ die Bedingungen (M_1) und (M_2) und deshalb auch die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$.

---

[18]) Vgl. Hardy-Riesz [6].

[19]) Jurkat-Peyerimhoff [11].

[20]) Jurkat [10].

Mit $\Phi(x)$ bezeichnen wir eine für $0 \leqq x < \infty$ erklärte Funktion mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Phi(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \tag{77}$$

und

$$\Phi'(x) > 0, \quad \Phi''(x) \text{ existiert.} \tag{78}$$

Wenn die Folge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (76) erfüllt, dann erfüllt auch $\mu_n = \Phi(\lambda_n)$ diese Bedingung, wir können also das Verfahren $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)} = R^{\varkappa}_{\mu}$ bilden. Man kann nun die Frage nach Vergleichssätzen für die Verfahren $R^{\varkappa}_{\lambda}$ und $R^{\varkappa'}_{\Phi(\lambda)}$ aufwerfen. Die Anwendung der Sätze des § 4 auf den Vergleich dieser Verfahren setzt eine Untersuchung des Quotienten je zweier entsprechender Matrixelemente voraus, d. h. wenn wir $R^{\varkappa}_{\lambda} = B$ und $R^{\varkappa'}_{\Phi(\lambda)} = A$ setzen, die Untersuchung von $r_{n\nu} = \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$. Für $r_{n\nu}$ finden wir hier den Ausdruck

$$r_{n\nu} = \frac{\lambda_{n+1}^{\varkappa}}{\Phi(\lambda_{n+1})^{\varkappa'}} \frac{\Delta_{\nu}(\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_{\nu}))^{\varkappa'}}{\Delta_{\nu}(\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu})^{\varkappa}} \qquad (0 \leqq \nu \leqq n). \tag{79}$$

Das „first theorem of consistency" gibt Aufschluß über das Verhalten, wenn $\Phi(x) = x$ gesetzt wird[21]).

Satz 9. *Für* $0 < \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ *ist*

$$o(R^{\varkappa}_{\lambda}) \leqq o(R^{\varkappa'}_{\lambda}) \quad [\eta_n]. \tag{80}$$

In (80) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist für $\nu \leqq n$

$$r_{n\nu} = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\varkappa - \varkappa'}} \frac{\varkappa'}{\varkappa} \frac{(\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa' - 1}}{(\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa - 1}} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\varkappa - \varkappa'}} (\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa' - \varkappa} \quad (\lambda_{\nu} < \tau_{\nu} < \lambda_{\nu+1}). \tag{81}$$

Daraus folgt, daß $r_{n\nu} \searrow$ für $\nu \nearrow$. Nach Satz 6 (Zusatz) ist dann (80) erfüllt.

Bemerkung. Ist $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} = o(1)$ $(n \to \infty)$ und $0 < \varkappa < \varkappa' \leqq 1$, dann gilt

$$r_{nn} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa' - \varkappa} = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

also nach Lemma 7 schärfer $o(R^{\varkappa}_{\lambda}) < o(R^{\varkappa'}_{\lambda})$ $[\eta_n]$. Ist dagegen

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} \geqq \varepsilon > 0,$$

dann gilt nach Satz 8 für $0 < \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ die Äquivalenz[22])

$$o(R^{\varkappa}_{\lambda}) = o(R^{\varkappa'}_{\lambda}) \quad [\eta_n].$$

---

[21]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 16.

[22]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 36.

5.2. Beim „second theorem of consistency" wird $x' = x$ gesetzt[23]). Wir suchen zunächst Bedingungen für $\Phi(x)$, welche die Monotonie von $r_{n\nu}$ nach sich ziehen.

Lemma 8. *Erfüllt die Funktion $\Phi(x)$ die Bedingungen*

$$\Phi''(x) \geqq 0 \ (bzw. \leqq 0) \ für \ x \geqq 0 \tag{82}$$

und

$$\left| \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \right| \searrow \ für \ x \nearrow, \tag{83}$$

dann ist

$$r_{n\nu} \nearrow \ (bzw. \searrow) \ für \ \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq n, \ x' = x). \tag{84}$$

Beweis. Es sei $r^*_{n\nu} = \left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}}\right)^x r_{n\nu}$. Die Bedingung (84) ist richtig, wenn wir die entsprechende Monotonie für $r^*_{n\nu}$ bewiesen haben. Aus dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß

$$r^*_{n\nu} = \left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\tau_\nu)}{\lambda_{n+1} - \tau_\nu}\right)^{x-1} \Phi'(\tau_\nu) \qquad (\lambda_\nu < \tau_\nu < \lambda_{\nu+1})$$

ist. Die Monotonie $r^*_{n\nu} \nearrow$ (bzw. $\searrow$) für $\nu \nearrow$ ist sicherlich erfüllt, wenn gilt

$$\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)}{\lambda_{n+1} - x}\right)^{x-1} \Phi'(x) \nearrow \ (\text{bzw. } \searrow) \ \text{für } x \nearrow \quad (0 \leqq x < \lambda_{n+1})$$

oder, wie man durch Bildung der logarithmischen Ableitung dieses Ausdruckes erkennt, wenn gilt

$$(1-x)\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)} - \frac{1}{\lambda_{n+1} - x}\right] + \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \geqq 0 \ (\text{bzw.} \leqq 0) \tag{85}$$
$$(0 \leqq x < \lambda_{n+1}).$$

Hier ist

$$\left[\ldots\right] = \frac{\Phi'(x)(\lambda_{n+1} - x) - [\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)]}{(\lambda_{n+1} - x)\ [\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)]} \qquad (0 \leqq x < \lambda_{n+1}),$$

und da Zähler und Nenner dieses Quotienten für $x = \lambda_{n+1}$ verschwinden, folgt durch erneute Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Darstellung

$$\left[\ldots\right] = \frac{-\Phi'(\xi) + \Phi''(\xi)\ (\lambda_{n+1} - \xi) + \Phi'(\xi)}{-[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\xi)] - \Phi'(\xi)\ (\lambda_{n+1} - \xi)} \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}).$$

Trägt man dies in (85) ein, dann kann man die Fälle $\geqq 0$ und $\leqq 0$ unter Beachtung von (82) zusammenfassen zu

$$\frac{|\Phi''(x)|}{\Phi'(x)} \geqq (1-x)\frac{|\Phi''(\xi)|\ (\lambda_{n+1} - \xi)}{[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\xi)] + \Phi'(\xi)\ (\lambda_{n+1} - \xi)} \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}).$$

Diese Ungleichung ist sicher richtig, da sogar gilt

$$\left| \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \right| \geqq \left| \frac{\Phi''(\xi)}{\Phi'(\xi)} \right| \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}),$$

und damit ist Lemma 8 bewiesen.

[23]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 17 und 19, Hardy [3], Hirst [9], Kuttner [12].

Aus dem Lemma 8 erhalten wir die folgenden beiden Vergleichssätze.

Satz 10. *Gilt*

$$\Phi''(x) \leqq 0 \qquad (x \geqq x_0) \tag{86}$$

und

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \text{ für } x \nearrow \qquad (x \geqq x_0), \tag{87}$$

dann ist für $0 < \varkappa \leqq 1$

$$o(R_\lambda^\varkappa) \leqq o(R_{\Phi(\lambda)}^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{88}$$

In (88) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 6 (Zusatz), denn aus (86) und (87) folgt nach Lemma 8, daß $r_{n\nu}$ mit wachsendem ν (für $\nu \geqq \nu_0$) monoton fällt; ferner besitzen $r_{n\nu}$ und $r_{n,\nu+1}$ für $n \to \infty$ und $\nu \leqq \nu_0$ dieselbe Größenordnung.

Satz 11. *Gilt*

$$\Phi''(x) \geqq 0 \qquad (x \geqq x_0), \tag{89}$$

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \text{ für } x \nearrow \qquad (x \geqq x_0) \tag{90}$$

und

$$x\,\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = O(1), \tag{91}$$

dann ist für $0 < \varkappa \leqq 1$

$$o(R_\lambda^\varkappa) = o(R_{\Phi(\lambda)}^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{92}$$

In (92) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 8 mit den Bedingungen unter 2° ($n_0 = 0$). Aus (89) und (90) folgt nach Lemma 8, daß die Bedingung (73) erfüllt ist. Da $r_{n\nu}$ und $r_{n,\nu+1}$ für $n \to \infty$ und $\nu \leqq \nu_0$ dieselbe Größenordnung besitzen, ist auch (72) erfüllt. Aus (91) folgt wegen (89) die Beziehung $|r_{nn}| \leqq K$; deshalb ist auch (71) erfüllt, q. e. d.

Zum Schluß wollen wir die Sätze 10 und 11 auf den Fall anwenden, daß $\Phi(x)$ eine „logarithmisch-exponentielle" Funktion, kurz L-Funktion im Sinne von HARDY[24]) ist.

Satz 12. (HARDY).

Ist $\Phi(x)$ *eine L-Funktion, welche die Bedingungen*

$$\Phi(x) \to +\infty \text{ für } x \to \infty \tag{93}$$

und

$$\Phi(x) = O(x^\Delta) \quad \text{für genügend großes } \Delta \tag{94}$$

[24]) HARDY [4], S. 17.

erfüllt, dann ist

$$o(R_\lambda^x) \leqq o(R_{\Phi(\lambda)}^x) \quad [\eta_n]. \tag{95}$$

In (95) *darf o durch O ersetzt werden*[25]).

Bemerkung. Aus Satz 12 folgen unmittelbar die bekannten Vergleichssätze[26])

$$o(R_\lambda^x) \geqq o(R_\varrho^{x_\lambda}) \quad [\eta_n],$$
$$o(R_{\lambda^\alpha}^x) = o(R_{\lambda^\beta}^x) \quad [\eta_n] \qquad (\alpha, \beta > 0).$$

In beiden Fällen darf o durch O ersetzt werden.

6. Vergleichssätze für Nörlund-Verfahren und bewichtete arithmetische Mittel.

Ein Nörlund-Verfahren $N(p_n)$ ordnet jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zu durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad (P_n = \sum_{\nu=0} p_\nu,\ p_\nu > 0). \tag{96}$$

Ein bewichtetes arithmetisches Mittel $M(p_n)$ ordnet jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zu durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad (P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ p_\nu > 0). \tag{97}$$

Bei den Verfahren $N(p_n)$ und $M(p_n)$ sind alle Glieder links der Hauptdiagonale von Null verschieden. Ferner erfüllt jedes derartige Verfahren $M(p_n)$ die Bedingungen (M_1) und (M_2), also auch die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$. Die Verfahren $N(p_n)$ dagegen erfüllen (M_1) und (M_2) nicht ohne Einschränkung über $\{p_n\}$, auf jeden Fall aber dann, wenn p_n die Bedingung

$$0 < p_n \searrow, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow \tag{18}$$

erfüllt.

Die folgenden Sätze 13 und 14 beziehen sich auf den Vergleich verschiedener Nörlund-Verfahren, die Sätze 15 und 16 behandeln bewichtete arithmetische Mittel.

---

[25]) Dieser Satz folgt in einfacher Weise aus den Sätzen 11 und 12, wenn man die Eigenschaften der L-Funktionen berücksichtigt. Die Ableitungen von L-Funktionen sind wieder L-Funktionen, deshalb sind die Bedingungen (86) bzw. (89) erfüllt. Die Beziehung (87) bzw. (90) wird dadurch bewiesen, daß die Annahme $\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \geqq \varepsilon > 0$ auf einen Widerspruch zu (93) oder (94) führt. Aus der Annahme, daß für große x die Beziehung $x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \geqq K\ (K > \Delta)$ gilt, folgt ein Widerspruch zur Voraussetzung (94), deshalb ist auch (91) erfüllt, q. e. d.

[26]) Hardy-Riesz [6], th. 17.

Satz 13. *Die Verfahren $N(p_n)$ und $N(q_n)$ seien permanent und $\{p_n\}$ erfülle die Bedingung* (18). *Dann folgt aus*[27])

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{q_n}{p_n}, \quad \frac{q_n}{p_n} \text{ monoton für } n \geqq n_0 \tag{98}$$

die Beziehung

$$o(N(p_n)) \leqq o(N(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{99}$$

In (99) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 5 (Zusatz) und Satz 6 (Zusatz)[28]).

Zusatz. Aus Lemma 7 folgt, daß (99) verschärft werden kann zu $o(N(p_n)) < o(N(q_n))$ $[\eta_n]$, wenn die Bedingung (98) durch $\frac{q_n}{p_n} \nearrow \infty$ ersetzt wird.

Satz 14. *Die Verfahren $N(p_n)$ und $N(q_n)$ seien permanent und $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ erfüllen* (18). *Dann folgt aus*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{q_n}{p_n} \leqq K, \quad \frac{q_n}{p_n} \text{ monoton für } n \geqq n_0 \tag{100}$$

die Beziehung

$$o(N(p_n)) = o(N(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{101}$$

In (101) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 7[28]).

Satz 15. *Die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ seien permanent. Dann folgt aus*[29])

$$\frac{q_n}{p_n} \searrow \text{ für } n \nearrow \qquad (n \geqq n_0) \tag{102}$$

die Beziehung

$$o(M(p_n)) \leqq o(M(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{103}$$

In (103) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 6 (Zusatz).

Zusatz. Aus Lemma 7 folgt, daß (103) verschärft werden kann zu $o(M(p_n)) < o(M(q_n))$ $[\eta_n]$, wenn außer (102) auch noch $\frac{q_n}{p_n} = o\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)$ ist.

---

[27]) Hardy [5], th. 23.

[28]) Beim Beweis ist zu beachten, daß $\frac{q_n}{p_n}$ monoton ist, also konvergent oder bestimmt divergent. Wegen $\frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{q_\nu}{p_\nu}$ ist auch $\frac{Q_n}{P_n}$ konvergent oder bestimmt divergent (mit demselben Grenzwert).

[29]) Hardy [5], th. 14, Garabedian-Randels [2].

Satz 16. *Die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ seien permanent. Dann folgt aus*

(104) $$\frac{q_n}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow \qquad (n \geqq n_0)$$

und

(105) $$\frac{q_n}{p_n} = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)$$

die Beziehung

(106) $$o(M(p_n)) = o(M(q_n)) \quad [\eta_n].$$

In (106) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 8.

Zusatz. Die Bedingung (105) ist z. B. erfüllt, wenn $\frac{q_n}{p_n} \leqq K$ ist. Dann konvergieren nämlich $\frac{q_n}{p_n}$ und $\frac{Q_n}{P_n}$ [28]).

Bemerkung. Für $p_n = 1$ erhält man aus den Sätzen 13 und 15 folgende Vergleichssätze für das Cesàrosche Verfahren C_1:

$o(N(q_n)) \geqq o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn q_n monoton und $q_n \geqq \varepsilon > 0$ [30]).

$o(N(q_n)) \leqq o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn q_n monoton und beschränkt ist und (18) erfüllt.

$o(N(q_n)) > o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn $q_n \nearrow +\infty$.

$o(M(q_n)) \geqq o(C_1)\,[\eta_n]$ (bzw. $\leqq$), wenn $q_n \searrow$ (bzw. $\nearrow$).

Auf Grund der Sätze 13 und 15 und der Bemerkung über das C_1-Verfahren können wir die Stärkeverhältnisse bei den Verfahren $M(p_n)$ und $N(q_n)$ ganz grob folgendermaßen beschreiben:

1°. $N(p_n)$ ist um so stärker, je stärker p_n wächst; das C_1-Verfahren „trennt" die Verfahren mit fallendem und wachsendem p_n.

2°. $M(p_n)$ ist um so stärker, je stärker p_n fällt. Das C_1-Verfahren „trennt" die Verfahren mit wachsendem und fallendem p_n.

Man gewinnt so den Eindruck, daß zwei Verfahren $M(p_n)$ und $N(p_n)$ nicht äquivalent sein können, es sei denn, daß sie mit C_1 äquivalent sind. Genaueres folgt aus

Satz 17. *$N(p_n)$ und $M(p_n)$ seien permanent, und es sei p_n monoton. Dann gibt es folgende Möglichkeiten*

1°. $M(p_n) \approx C_1 \approx N(p_n)$;

2°. $M(p_n) \leqq C_1 < N(p_n)$;

3°. $M(p_n) \geqq C_1$ *und nicht* $N(p_n) \geqq C_1$.

Gleichbedeutend mit 3° ist:
Es ist entweder $M(p_n) \geqq C_1 > N(p_n)$ [31]),
oder $M(p_n) \geqq C_1$ und C_1 mit $N(p_n)$ nicht vergleichbar.

---

[30]) Hardy [5], th. 20.

[31]) Dies ist stets richtig, wenn p_n die Bedingung (18) erfüllt.

Beweis. Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

$$0 < \varepsilon \leqq p_n \leqq K, \quad p_n \to \infty, \quad p_n \to 0.$$

Die Behauptung folgt aus der Bemerkung über den Vergleich mit dem C_1-Verfahren (und Anwendung von Satz 16 und Lemma 7).

Vergleichsrelationen zwischen $N(p_n)$ und $M(p_n)$ ziehen i. a. eine Relation zwischen diesen Verfahren und C_1 nach sich. Im einzelnen gilt nach Satz 17:

Zusatz. $N(p_n)$ und $M(p_n)$ seien permanent, und es sei p_n monoton.

Aus $M(p_n) \approx N(p_n)$ folgt $M(p_n) \approx C_1 \approx N(p_n)$[32];
aus $M(p_n) < N(p_n)$ folgt $M(p_n) \leqq C_1 < N(p_n)$;
aus $M(p_n) > N(p_n)$ folgt $M(p_n) \geqq C_1$ und nicht $N(p_n) \geqq C_1$.

7. Der Äquivalenzsatz von M. Riesz.

Die Cesàroschen Verfahren $C_\varkappa$ und die unstetigen Rieszschen Mittel $R_n^\varkappa$ können als Nörlund-Verfahren durch die Folgen $p_n = \binom{n+\varkappa-1}{n}$ und $q_n = (n+1)^\varkappa - n^\varkappa$ definiert werden. Beide Folgen erfüllen für $0 < \varkappa \leqq 1$ die Bedingung (18). (In diesem Paragraphen verstehen wir immer unter p_n und q_n die oben angeführten Ausdrücke.) Als Anwendung des Satzes 14 beweisen wir die Äquivalenz dieser beiden Verfahren.

Lemma 9. *Für $n \geqq n_0$ und $0 < \varkappa \leqq 1$ ist*

$$\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right) \frac{n^\varkappa - (n-1)^\varkappa}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa} \leqq 1. \tag{107}$$

Beweis. Schreibt man (107) in der Form

$$\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\varkappa\right) \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\varkappa - 1$$

und entwickelt $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\varkappa$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\varkappa$ bis auf $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, dann erkennt man nach kurzer Rechnung die Richtigkeit der Behauptung.

Satz 18. *Für $0 < \varkappa \leqq 1$ ist*

$$o(C_\varkappa) = o(R_n^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{108}$$

In (108) darf o durch O ersetzt werden.

Beweis. Wir zeigen, daß die Voraussetzungen (100) des Satzes 14 erfüllt sind. Der Quotient $\frac{p_n}{q_n}$ liegt zwischen zwei positiven Schranken, da p_n und q_n dieselbe Größenordnung besitzen. Die Monotonie dieses Quotienten folgt aus (107), da

$$\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \frac{p_n}{q_n} = \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right) \frac{n^\varkappa - (n-1)^\varkappa}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa}$$

ist, q. e. d.

[32]) Hierin ist ein Ergebnis der Herren Hayashi und Izumi [7] enthalten; sie hatten etwas kompliziertere Bedingungen gefunden.

Aus der Äquivalenz der Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ und $R^\varkappa(\lambda)$ (Jurkat [10], § 2) folgt dann für $0 < \varkappa \leqq 1$ der Äquivalenzsatz $R^\varkappa(n) \approx C_\varkappa$ von M. Riesz [33]).

Schlußbemerkungen.

Ein Blick auf die Beweise der Vergleichssätze des § 4 lehrt, daß die $O \to o$-Schlüsse des § 2 — vom Mittelwertsatz selbst abgesehen — das entscheidende Hilfsmittel bei der Aufstellung dieser Vergleichssätze darstellen. Man kann nun die Frage aufwerfen, ob diese $O \to o$-Sätze allgemeiner formuliert und unter geringeren Voraussetzungen bewiesen werden können. Dies ist in der Tat möglich. Wir haben die Sätze hier nur in der einfachsten Form ausgesprochen, z. B. wurde die in § 2 auftretende Matrix B stets als normal vorausgesetzt. Diese Voraussetzung können wir zunächst dahingehend abändern, daß B eine eineindeutige Abbildung auf den Raum der konvergenten Folgen vermitteln soll. Die Beweise lassen sich dann mit verhältnismäßig einfachen funktionalanalytischen Hilfsmitteln durchführen. Unter Verwendung der Sätze über F-Räume im Sinne von Banach [1] können wir aber auch diese Voraussetzungen fallen lassen. Auf diese Verallgemeinerungen werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

[33]) Riesz [15].

Literatur.

Banach, S.

[1] Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

Garabedian, H. L. – Randels, W. C.

[2] Theorems on Riesz means, Duke Math. J.. **4** (1938), 529–533.

Hardy, G. H.

[3] The second theorem of consistency for summable series, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **15** (1916), 72–88.

[4] Orders of infinity, Cambridge 1924.

[5] Divergent series, Oxford 1949.

Hardy, G. H. – Riesz, M.

[6] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.

Hayashi, G. – Izumi, S.

[7] Theorems on Nörlund's method of summation, II, Tôhoku Math. J., **47** (1940), 69–73.

Hill, J. D.

[8] On perfect methods of summability, Duke Math. J., **3** (1937), 702–714.

Hirst, K.

[9] On the second theorem of consistency in the theory of summation by typical means, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **33** (1932), 353–366.

JURKAT, W.

[10] Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr., **55** (1952), 8–12.

JURKAT, W. – PEYERIMHOFF, A.

[11] Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschr., **55** (1952), 92–108.

KUTTNER, B.

[12] Note on the „second theorem of consistency" for Riesz summability, J. Lond. Math. Soc., **26** (1951), 104–111.

MAZUR, S.

[13] Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren, Stud. Math., **2** (1930), 40–50.

PEYERIMHOFF, A.

[14] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr., **55** (1952), 23–54.

RIESZ, M.

[15] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Compt. rend., **152** (1911), 1651–1654.

ZELLER, K.

[16] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr., **53** (1951), 463–487.

[17] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Zeitschr., **55** (1952), 55–70.

(Eingegangen am 12. Dezember 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 179—205 (1952).

Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen.

Herrn KONRAD KNOPP zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

§ 1.
Einleitung.

In dieser Note wird ein Verfahren zur Limitierung von Funktionen definiert und untersucht, das dem TAYLORschen Verfahren zur Limitierung von Folgen analog ist [1]).

Im einfachsten Fall handelt es sich bei diesem letzteren Verfahren, bezeichnet als T_α-Verfahren (α die Ordnung des Verfahrens, $0 < \alpha < 1$), um eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

mit komplexen Gliedern und mit den Teilsummen

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

wobei das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

der komplexen Veränderlichen z für $|z| < 1$ als konvergent vorausgesetzt ist. Konvergiert dann die gewiß für $|z - \alpha| < 1 - \alpha$ konvergente TAYLOR-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n \tag{4}$$

---

[1]) Die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen der Limitierungstheorie werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt. Wegen des genannten TAYLORschen Verfahrens vergleiche man die in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeiten [9], [11] des Verf. und die dort angegebene Literatur (G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, P. VERMES, R. WAIS), ferner V. F. COWLING [1], J. TEGHEM [12], [13], P. VERMES [14], [15]. (Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.) — Über einen Teil der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hat Verf. auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Erlangen (Herbst 1950) vorgetragen (vgl. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, Kursivseite 40 (1952)).

von $f(z)$ nach Potenzen von $z-\alpha$ an der Stelle $z=1$ zum Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(1-\alpha)^n = s, \tag{5}$$

so heißt die Reihe (1) T_α-summierbar (bzw. die Folge (2) T_α-limitierbar) zum Wert s und setzt man

$$T_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = T_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s. \tag{6}$$

Die Teilsummen

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu(1-\alpha)^\nu$$

der Reihe (5) lassen sich, wie unschwer zu zeigen ist, in der Form

$$t_n = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu$$

darstellen. Damit erkennt man, daß das T_α-Verfahren ein Matrixverfahren ist. Die bekannten hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Permanenz eines solchen sind im vorliegenden Fall erfüllt. Aus der Konvergenz von (1) zum Wert s folgt also (6). Dies kann man auch so aussprechen: Ist (3) für $z=1$ zum Wert s konvergent, so gilt dasselbe für (4). Also gilt auch der (später benötigte)

Satz 1.1 (Konvergenz einer Taylor-Entwicklung, Fall 1). *Das Funktionselement*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

sei an der Stelle $z=z_1\ (\neq z_0)$ konvergent zum Wert s. Dann ist für jeden festen Wert $\alpha\ (0<\alpha<1)$ die Taylor-Entwicklung von $h(z)$ nach Potenzen von $z-z_0'$, wobei $z_0'=z_0+\alpha(z_1-z_0)$ gesetzt ist, an der Stelle $z=z_1$ ebenfalls konvergent zum Wert s.

Nun handle es sich statt der Reihe (1) um das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} a(x)\,dx \tag{7}$$

mit dem zugehörigen Teilintegral

$$s(x) = \int_0^{x} a(t)\,dt \qquad (x>0). \tag{8}$$

Dabei sei $a(x)$ eine für $x>0$ definierte komplexwertige und in jedem Intervall $0\leqq x\leqq x_0\ (x_0>0)$ etwa eigentlich im Riemannschen Sinn integrierbare Funktion. Um analog dem T_α-Verfahren das Integral (7) zu summieren bezw. die Funktion (8) zu limitieren, ziehen wir statt

(3) das LAPLACE-Integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, a(t)\, dt \tag{9}$$

heran, dessen Konvergenz für $\Re z > 0$[2]) vorausgesetzt sei. Wir wählen eine Zahl $a > 0$, die Ordnung des zu definierenden Verfahrens, das als TAYLORsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen, kurz als T'_a-Verfahren bezeichnet werden soll. Gewiß ist die TAYLOR-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} b'_n (z-a)^n \tag{10}$$

von $F(z)$ nach Potenzen von $z-a$ für $|z-a| < a$ konvergent. Ist sie auch an der Stelle $z = 0$ konvergent, und zwar zum Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b'_n (-a)^n = s, \tag{11}$$

so nennen wir das Integral (7) T'_a-summierbar (bezw. die Funktion (8) T'_a-limitierbar) zum Wert s, und setzen

$$(T'_a)\int_0^\infty a(x)\, dx = T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s. \tag{12}$$

Die Teilsummen

$$t'_n = \sum_{\nu=0}^{n} b'_\nu (-a)^\nu$$

der Reihe (11) lassen sich (vgl. § 2, Schluß) in der Form

$$t'_n = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt \tag{13}$$

darstellen. Die Folge t'_n ist somit die zu dem Kern

$$\frac{a^{n+1}}{n!}\, t^n e^{-at} \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ t > 0) \tag{14}$$

gehörige Integraltransformation der Funktion $s(x)$. Die bekannten hinreichenden Bedingungen für die Permanenz einer solchen sind im vorliegenden Fall erfüllt[3]). Aus der Konvergenz von (7) zum Wert s folgt also (12). Man kann dies auch so aussprechen: Ist (9) für $z = 0$ zum Wert s konvergent, so gilt dasselbe für (10).

So wie man beim T_a-Verfahren die oben gemachte Voraussetzung, daß (3) für $|z| < 1$ konvergieren soll, durch weniger einschränkende Bedingungen ersetzt, werden wir auch beim T'_a-Verfahren die Voraussetzung, daß (9) für $\Re z > 0$ konvergieren soll, abschwächen. Verschiedene Wege sind möglich. In § 2 wird das Verfahren in einer

[2]) $\Re$ soll Realteil, $\Im$ soll Imaginärteil bedeuten.

[3]) Die Permanenzeigenschaft der Transformation (13) wurde vom Verf. schon früher (vgl. [9], S. 283) nutzbar gemacht.

den Zwecken des § 3 angepaßten Weise aufgebaut. Dabei gehen wir nicht von einem zu summierenden Integral, sondern von einer zu limitierenden Funktion aus. Der Zusammenhang des Verfahrens mit der Transformation (13) bleibt dabei erhalten.

In § 3 wird der zu einem T'_a-Verfahren vorgegebener Ordnung gehörige Summierbarkeitsbereich eines LAPLACE-Integrales untersucht. Dieser läßt sich genau angeben, wenn die singulären Stellen bekannt sind, auf die man bei analytischer Fortsetzung der dargestellten Funktion längs horizontaler Geraden stößt. Der T'_a-Wert des Integrales stimmt im Summierbarkeitsbereich mit dem durch die Fortsetzung erzielten Wert überein.

Bei der weiteren Untersuchung des Verfahrens knüpft man am besten an die Transformation (13) an, die zu der Matrix (14) mit nicht kontinuierlichem Zeilenindex n und kontinuierlichem Spaltenindex t gehört. In § 4 werden zunächst Produktbeziehungen zwischen der Matrix (14) und den Matrizen einiger geläufiger weiterer Limitierungsverfahren aufgestellt. In § 5 wird die Definition des T'_a-Verfahrens nochmals erweitert, so wie es durch den Zusammenhang mit der Matrix (14) nahegelegt ist. Ferner wird geprüft, wie sich eine Argumentverschiebung bei der Funktion $s(x)$ auf ihre T'_a-Limitierbarkeit auswirkt. Diese Frage ist auch deshalb von Interesse, weil ihre Beantwortung auf ein konvergenzgleiches Limitierungsverfahren führt. § 6 bringt Vergleichs- und Verträglichkeitssätze. Es ergibt sich, daß die T'_a-Verfahren unter sich, mit dem ABELschen und mit dem CESÀROschen Verfahren verträglich, ferner daß alle T'_a-Verfahren für beschränkte Funktionen miteinander äquivalent sind.

Weitere Eigenschaften des T'_a-Verfahrens sollen in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Die im folgenden auftretenden Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ sind im eigentlichen RIEMANNschen bezw. RIEMANN-STIELTJESschen Sinn aufzufassen. Uneigentliche Integrale der Form $\int_a^\infty$ sind im CAUCHYschen Sinn zu verstehen: $\int_a^\infty = \lim_{x\to\infty} \int_a^x$. Wegen der benützten Tatsachen über STIELTJES-Integrale und LAPLACE-Integrale vergleiche man G. DOETSCH [2], D. V. WIDDER [16].

§ 2.

Definition und Permanenz des T'_a-Verfahrens.

In § 1 wurde das T'_a-Verfahren in vorläufiger Weise so definiert, wie es in Analogie zum T_a-Verfahren natürlich ist. In § 2 wird das T'_a-Verfahren neu und allgemeiner in einer für die Anwendung auf LAPLACE-STIELTJES-Integrale zweckmäßigen Form aufgebaut. Daß die

Definition des § 2 mit derjenigen des § 1 übereinstimmt, sofern es sich wie in § 1 um die Summierung des Integrales § 1, (7) bzw. um die Limitierung der Funktion § 1, (8) unter der Voraussetzung der Konvergenz des Integrales § 1, (9) für $\Re z > 0$ handelt, wird am Schluß von § 2 gezeigt.

Definition 2.1 (Funktionsklasse $\mathfrak{V}$). *Die komplexwertige Funktion $s(x)$ der reellen Veränderlichen x heißt zur Klasse $\mathfrak{V}$ gehörig, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ von beschränkter Schwankung ist.*

Hilfssatz 2.2 (Konvergenz zu $s(x) \in \mathfrak{V}$ gehöriger Integrale). *Ist a eine reelle positive Zahl und $s(x) \in \mathfrak{V}$, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(A_1) *Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ konvergiert das Integral*

$$\int_0^\infty t^n e^{-at}\, d\, s(t). \tag{1}$$

(A_2) *Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ gilt*

$$s(x) = O(x^{-n} e^{ax}) \qquad (x \to \infty). \tag{2}$$

Beweis. (A_1) sei erfüllt. Aus der Konvergenz von (1) für $n = 0$ folgt $s(x) = o(e^{ax})$ für $x \to \infty$, so daß (2) für $n = 0$ erfüllt ist. Die Behauptung ergibt sich nun durch vollständige Induktion nach n. (2) sei schon bewiesen für die Nummer $n \geqq 0$. Die Funktion

$$\beta(x) = \int_0^x t^{n+1}\, d\, s(t) = x^{n+1} s(x) - (n+1) \int_0^x t^n s(t)\, dt \tag{3}$$

gehört zu $\mathfrak{V}$. Wegen (A_1) existiert

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x t^{n+1} e^{-at}\, d\, s(t) = \lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-at}\, d\, \beta(t) = \int_0^\infty e^{-at}\, d\, \beta(t),$$

woraus $\beta(x) = o(e^{ax})$ für $x \to \infty$ folgt. Aus (3) und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich damit

$$x^{n+1} e^{-ax} s(x) = e^{-ax} \beta(x) + (n+1) e^{-ax} \int_0^x O_{t \to \infty}(e^{at})\, dt = O_{x \to \infty}(1).$$

Nun sei (A_2) erfüllt. Für jede feste Nummer $n \geqq 1$ ist

$$e^{-ax} s(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

existiert also das Integral (1) als

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ t^n e^{-at} s(t) \Big|_0^x - n \int_0^x t^{n-1} e^{-at} s(t)\, dt + a \int_0^x t^n e^{-at} s(t)\, dt \right\}$$

$$= -n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-at} s(t)\, dt + a \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt.$$

Im Falle $n = 0$ schließt man analog. —

Wir wählen nun eine im folgenden festgehaltene Zahl $a > 0$. Es soll dann das T_a'-Verfahren, das Taylorsche Verfahren der Ordnung a zur Limitierung von Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$, definiert werden. Eine Funktion $s(x) \in \mathfrak{B}$ sei gegeben. Ihr wird das Laplace-Integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, s(t) \quad \text{(Konvergenzabszisse } \sigma) \tag{4}$$

zugeordnet. Es wird vorausgesetzt, daß $s(x)$ die Bedingung (A_1) erfüllt, so daß $\sigma \leqq a$ und auf jeden Fall $F(z)$ regulär für $\Re z > a$ ist. Weiter wird vorausgesetzt, daß $F(z)$ an der Stelle $z = a$ regulär ist[4]). Für $z = 0$ folgt aus (4) formal

$$s(\infty) = F(0) + s(0). \tag{5}$$

Es ist daher natürlich, der Funktion $s(x)$ die rechte Seite von (5) als verallgemeinerten Grenzwert zuzuordnen, wobei $F(0)$ noch in „vernünftiger" Weise festzusetzen ist. Naheliegend ist es, unter $F(0)$ den Wert der Taylor-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, F^{(n)}(a)\,(z-a)^n \tag{6}$$

von $F(z)$ nach Potenzen von $z - a$ für $z = 0$ zu verstehen, falls diese Entwicklung für $z = 0$ konvergiert. Nun ist für $\Re z > a$

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty t^n\, e^{-zt}\, d\, s(t) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, \mu(t)$$

mit

$$\mu(x) = \int_0^x t^n\, d\, s(t) \qquad (x \geqq 0).$$

Der Grenzübergang $z \to a + 0$ liefert auf Grund eines bekannten Abelschen Satzes

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-at}\, d\, \mu(t),$$

falls das rechts stehende Integral konvergiert. Ohne den Faktor $(-1)^n$ ist dieses aber gleich dem nach Voraussetzung konvergenten Integral (1). Für $z = 0$ geht daher (6) über in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty t^n\, e^{-at}\, d\, s(t). \tag{7}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann das T_a'-Verfahren definiert werden.

Definition 2.3 (Verfahren T_a'). *Ist $a > 0$, so heißt T_a' auf die Funktion $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{B}$, (A_1) bezw. (A_2) erfüllt und (4) an der Stelle $z = a$ regulär ist. Die Funktion $s(x)$ heißt durch*

[4]) Im Falle $\sigma < a$ ist diese Voraussetzung von selbst erfüllt.

T'_a zum Wert s limitierbar, wenn T'_a auf $s(x)$ anwendbar und (7) konvergent zur Summe $s - s(0)$ ist.

T'_a ist auf $s(x) \in \mathfrak{V}$ sicher dann anwendbar, wenn $\sigma < a$ ist. Umgekehrt folgt aus der Anwendbarkeit von T'_a auf $s(x)$, daß $\sigma \leqq a$ ist. Ist T'_a in Anwendung auf $s(x)$ wirksam, d. h. ist $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x)$ vorhanden, so ist

$$T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-at}\, d\,s(t)\,^{5}).$$

Das nächste Ziel ist der Nachweis der Permanenz des T'_a-Verfahrens. Dazu werden die Teilsummen der Reihe (7) umgeformt.

Satz 2. 4 (Integraltransformation T'_a). *T'_a sei auf $s(x)$ anwendbar, und es werde*

$$t_n = s(0) + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^\nu}{\nu!} \int_0^{\infty} t^\nu e^{-at}\, d\,s(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$T'_a s = T'_a(n; s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-at} s(t)\, d\,t \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gesetzt[6]*). Dann ist $t_n = T'_a s$ $(n = 0, 1, \ldots)$.*

Beweis. Benützt man die Hilfsformel

$$\int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x = \frac{n!\, e^{-at}}{a^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} a^\nu t^\nu \qquad (t \geqq 0), \tag{8}$$

die man z. B. durch wiederholte partielle Integration bestätigt, so wird

$$t_n = s(0) + \int_0^{\infty} e^{-at} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^\nu t^\nu}{\nu!} \right) d\,s(t)$$

$$= s(0) + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \int_{t=0}^{T} \left(\int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x \right) d\,s(t)$$

$$= s(0) + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \left[s(t) \int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x \right]_{t=0}^{T} + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \int_{t=0}^{T} t^n e^{-at} s(t)\, d\,t.$$

---

[5]) Rein formal kann man diese Beziehung auf folgende Weise erhalten:

$$T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s(\infty) = s(0) + \int_0^{\infty} d\,s(t)$$

$$= s(0) + \int_0^{\infty} e^{-at} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \right) d\,s(t) = s(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-at} t^n\, d\,s(t).$$

[6]) Da $s(x)$ den Bedingungen (A_1) und (A_2) genügt, existieren die angeschriebenen Ausdrücke.

Die zuletzt für t_n durch eine partielle Integration gewonnene Darstellung ist berechtigt, weil die Grenzwerte im zweiten und dritten Summanden existieren. Der zweite Summand ist — man beachte (8) und (A_2) — gleich

$$-s(0)+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a^\nu}{\nu!}\left[\lim_{T\to\infty}T^\nu e^{-aT}s(T)\right]=-s(0).\ —$$

Wegen 2. 4 sind, falls T_a' auf $s(x)$ anwendbar ist, die Aussagen

$$T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty}s(x)=s \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}T_a'(n;\,s(x))=s$$

äquivalent. Das T_a'-Verfahren ist also im Bereich der Funktionen $s(x)$, auf die es anwendbar ist, das zu der Integraltransformation T_a', d. h. der Transformation

$$T_a'(n;\,s(x))=\int_0^\infty a(n,t)\,s(t)\,dt \tag{9}$$

mit

$$a(n,t)=\frac{a^{n+1}}{n!}\,t^n e^{-at} \qquad (n=0,1,\ldots;\ t>0)$$

gehörige Limitierungsverfahren. Dies öffnet den Zugang zu einer Reihe von Eigenschaften des Verfahrens. In anderen Fällen ist allerdings auch seine ursprüngliche funktionentheoretische Seite nützlich.

Satz 2. 5 (Permanenz von T_a'). *Aus* $s(x)\in\mathfrak{B}$ *und* $\lim_{x\to\infty}s(x)=s$ *folgt* $T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty}s(x)=s$.

Beweis. Aus der Konvergenz von (4) für $z=0$ folgt, daß die Konvergenzabszisse σ von (4) nicht positiv ist. Also ist T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Die Behauptung ist daher richtig, wenn die Transformation (9) permanent ist. Dafür sind aber bekannte, unmittelbar zu verifizierende Bedingungen hinreichend. —

Satz 2. 5 läßt sich auch so formulieren: Aus $s(x)\in\mathfrak{B}$ und der Konvergenz des Integrales (4) für $z=0$ zum Wert s' folgt die Konvergenz der für $z=0$ genommenen Taylor-Entwicklung (6) der Funktion (4) zum Wert s'. In Analogie zu 1. 1 gilt daher

Satz 2. 6 (Konvergenz einer Taylor-Entwicklung, Fall 2). *Die Laplace-Transformation*

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\,ds(t)$$

der Funktion $s(x)\in\mathfrak{B}$ *sei an der Stelle* $z=z_1$ *konvergent zum Wert* s'. *Dann ist für jeden festen Wert* a $(a>0)$ *die Taylor-Entwicklung von* $f(z)$ *nach Potenzen von* $z-(z_1+a)$ *an der Stelle* $z=z_1$ *ebenfalls konvergent zum Wert* s'.

Der Beweis ergibt sich, wenn man von $f(z)$ übergeht zu

$$F(z) = f(z + z_1) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\left(\int_{x=0}^{t} e^{-z_1 x}\, d\, s(x)\right). \quad -$$

Einfache Beispiele T_a'-limitierbarer Funktionen bekommt man, wenn man

$$s(x) = e^{cx} \qquad (c \text{ konstant})$$

setzt. T_a' ist auf dieses $s(x)$ genau dann anwendbar, wenn $\Re c < a$ ist. Es wird dann

$$T_a'(n; s(x)) = \left(\frac{a}{a-c}\right)^{n+1}.$$

Daraus erhält man z. B. (für $c = i$)

$$T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty} \cos x = 0 \qquad (a > 0),$$

oder (für $a = 1$, $c = \frac{1}{2} + i$)

$$T_1'\text{-}\lim_{x\to\infty} (e^{x/2} \cos x) = 0.$$

Natürlich läßt sich das T_a'-Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale nutzbar machen. Es existiere zu den komplexwertigen Funktionen $a(x)$ und $\alpha(x)$ für jedes $x > 0$ das Integral $\int_0^x a(x)\, d\,\alpha(x)$. Dann hat es einen Sinn, nach der Konvergenz des uneigentlichen Integrales

$$\int_0^\infty a(x)\, d\,\alpha(x)$$

zu fragen. Dieses soll T_a'-summierbar zum Wert s heißen, geschrieben

$$(T_a') \int_0^\infty a(x)\, d\,\alpha(x) = s,$$

wenn das Teilintegral

$$s(x) = \int_0^x a(t)\, d\,\alpha(t) \qquad (x \geqq 0)$$

T_a'-limitierbar zum Wert s ist. So ist z. B.

$$(T_1') \int_0^\infty e^{x/2} \cos x\, d\, x = -\tfrac{2}{5}.$$

Handelt es sich um das Laplace-Integral

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, t \qquad (\Re z > 0),$$

so ergibt sich (für jedes $a > 0$)

$$^{(T'_a)}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z} \qquad \text{für } \Re z > -a,\ |z+a| > a,$$

wobei der angegebene z-Bereich der genaue Summierbarkeitsbereich des Integrales ist. Ist $\alpha(x) \in \mathfrak{V}$, so gilt

$$\alpha(0) + {}^{(T'_a)}\int_0^\infty d\alpha(x) = T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$$

in dem Sinne, daß die Existenz der einen Seite die der anderen und Gleichheit beider Seiten zur Folge hat.

Es handle sich jetzt noch um das in § 1, (7) betrachtete Integral

$$\int_0^\infty a(x)\,dx \quad \text{mit} \quad s(x) = \int_0^x a(t)\,dt,$$

wo $a(x)$ für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $(0, x_0)$ integrierbar und

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,a(t)\,dt$$

für $\Re z > 0$ konvergent sein soll. Es ist $s(x) \in \mathfrak{V}$, ferner $s(x) = o(e^{\varepsilon x})$ für $x \to \infty$ (für jedes feste $\varepsilon > 0$), und für $\Re z > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,ds(t) = z\int_0^\infty e^{-zt}\,s(t)\,dt = F_1(z).$$

T'_a ist also auf $s(x)$ anwendbar, und die nach (4) zu $s(x)$ gehörige Funktion $F(z)$ stimmt mit $F_1(z)$ überein. Dies zeigt, daß die für den vorliegenden Fall schon in § 1 gegebene Definition der T'_a-Summierbarkeit mit der in § 2 gegebenen zusammenfällt. Die Teilsummen der an der Stelle $z = 0$ genommenen Taylor-Entwicklung von $F(z) = F_1(z)$ nach Potenzen von $z - a$ stimmen wegen $s(0) = 0$ nach 2. 4 mit $T'_a(n; s(x))$ überein. Damit ist nun auch die Gleichung (13) des § 1 bewiesen.

§ 3.

Summierung Laplacescher Integrale.

Das zu der Funktion $\alpha(x) \in \mathfrak{V}$ gehörige Laplace-Integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,d\alpha(t) \qquad (\Re z > \eta) \tag{1}$$

besitze die Konvergenzabszisse η $(-\infty < \eta < \infty)$. Wir wählen ein T'_a-Verfahren positiver Ordnung a und fragen, für welche z und gege-

benenfalls zu welchem Wert (1) summierbar ist. Der Fall $\alpha(t) = t$ wurde schon bei den Beispielen am Schluß von § 2 behandelt.

Natürlich ist (1) für $\Re z > \eta$ zum Wert $f(z)$ summierbar. Um die Frage allgemein für die Stelle $z = z_0$ zu entscheiden, ist die Limitierbarkeit des Teilintegrales

$$s(x) = s(x, z_0) = \int_0^x e^{-z_0 t}\, d\alpha(t) \qquad (x \geqq 0) \tag{2}$$

zu untersuchen. Dabei kommt es auf das nach § 2, (4) zu $s(x)$ gehörige Integral

$$F(z) = F(z, z_0) = \int_0^\infty e^{-zt}\, ds(t)$$

mit der Konvergenzabszisse $\sigma = \sigma(z_0)$ und im Anwendbarkeitsfall auf seine für $z = 0$ genommene Taylor-Entwicklung nach Potenzen von $z - a$, d. h. auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)^n F^{(n)}(a), \tag{3}$$

an. Wegen

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, ds(t) = \int_0^\infty e^{-(z+z_0)t}\, d\alpha(t)$$

ist $\sigma = \eta - \Re z_0$ und

$$F(z) = f(z + z_0) \qquad (\Re z > \eta - \Re z_0). \tag{4}$$

Satz 3.1 (Anwendbarkeit von T'_a). *a) Ist $\Re z_0 > \eta - a$, so ist T'_a auf $s(x, z_0)$ anwendbar. b) Ist $\Re z_0 < \eta - a$, so ist T'_a auf $s(x, z_0)$ nicht anwendbar.*

Der Beweis ergibt sich wegen $s(x, z_0) \in \mathfrak{B}$ aus den beiden an 2.3 anschließenden Bemerkungen. —

Im folgenden bezeichnen wir mit G und G' die beiden Kreisgebiete

$$G : |z - a| < a, \quad G' : |z + a| > a.$$

Mit $\overline{G}$ bezw. $\overline{G'}$ bezeichnen wir die durch Hinzunahme der Randpunkte abgeschlossenen Gebiete. Ist ζ eine komplexe Zahl, so verstehen wir unter $G + \zeta$ den Bereich der Punkte $z + \zeta$ mit $z \in G$. (Analog für G' usw.)

Satz 3.2 (Wirksamkeit von T'_a). *a) Es sei $\Re z_0 > \eta - a$ und $f(z)$ in dem Kreisgebiet $\overline{G} + z_0$, dessen Mittelpunkt im Innern der Konvergenzhalbebene von* (1) *liegt, regulär. Dann ist das Integral* (1) *an der Stelle $z = z_0$ T'_a-summierbar zum Wert $f(z_0)$. b) Das Integral* (1) *sei an der Stelle $z = z_0$ T'_a-summierbar. Dann ist $f(z)$ in dem Kreisgebiet $G + z_0$, dessen Mittelpunkt im Innern oder auf dem Rand der Konvergenzhalbebene von* (1) *liegt, regulär. (Vgl. Fig. 1.)*

Beweis. a) Nach 3. 1, a) ist T_a' auf $s(x)$ anwendbar. $F(z)=f(z+z_0)$ ist regulär in $\bar{G}$, also die TAYLOR-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z-a$ für $z=0$ konvergent zum Wert $F(0)=f(z_0)$. b) Nach 3. 2, b) ist

$$\Re(z_0+a)\geqq\eta.$$

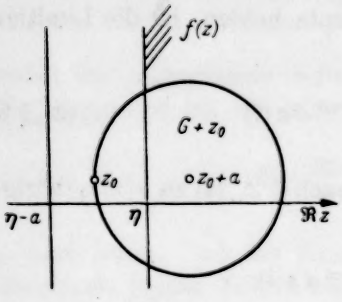


Fig. 1.

$F(z)$ ist regulär an der Stelle $z=a$, und die TAYLOR-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z-a$ ist für $z=0$ konvergent. Also ist $F(z)$ in G, d. h. $f(z)$ in $G+z_0$ regulär. —

Das nächste Ziel ist die Beschreibung des ganzen Summierbarkeitsbereiches, d. h. des Bereiches der z-Werte, für die (1) durch T_a' summiert wird. Dabei schließen wir (mit geringfügigen Modifikationen) an das Vorgehen von K. KNOPP [6] bei der Untersuchung der verallgemeinerten EULERschen Transformation von Potenzreihen an. Wir ordnen (vgl. [6], § 2) der Funktion $f(z)$ auf zweifache Art einen „Stern" zu.

1. Art. Für jede reelle Zahl y verstehen wir unter $x_1(y)$ die untere Grenze aller reellen $x\geqq\eta-a$, für die $f(z)$ in $G+(x+iy)$ regulär ist. Wir setzen $z_1(y)=x_1(y)+iy$. Ist $\Re z_1>\eta-a$, so liegt auf dem Rand von $G+z_1(y)$ mindestens eine singuläre Stelle von $f(z)$. Zu y betrachten wir den offenen Halbstrahl $z=x+iy$ $(x>x_1(y))$. Die Vereinigungsmenge aller dieser Halbstrahlen für $-\infty<y<\infty$ bezeichnen wir als den zu $f(z)$ gehörigen Stern $S_1=S_1(f(z), T_a')$.

2. Art. Für jede reelle Zahl y denken wir uns $f(z)$ auf der Geraden $\Im z=y$ aus der Konvergenzhalbebene von (1) heraus nach links analytisch fortgesetzt. Den ersten dabei angetroffenen singulären Punkt, spätestens aber den Punkt $(\eta-a)+iy$, bezeichnen wir mit

$$z_2(y)=x_2(y)+iy \qquad (x_2(y) \text{ reell}).$$

Den in der Halbebene $\Re z>\eta-a$ gelegenen Teil des Durchschnittes aller Gebiete $G'+z_2(y)$ für $-\infty<y<\infty$ bezeichnen wir als den zu $f(z)$ gehörigen Stern $S_2=S_2(f(z), T_a')$.

Satz 3. 3 ($S_1=S_2$). *Die Sternbereiche S_1 und S_2 fallen zusammen und bilden ein einfach zusammenhängendes Gebiet $S=S(f(z), T_a')$, das die Halbebene $\Re z>\eta$ enthält und in der Halbebene $\Re z>\eta-a$ gelegen ist. In S ist $f(z)$ vermöge analytischer Fortsetzung aus der Konvergenzhalbebene von* (1) *heraus auf Parallelen zur reellen Achse eindeutig regulär.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $S_1\leqq S_2$. Sei $z_0\in S_1$ und y reell. Zu zeigen ist:

$$\Re z_0>\eta-a, \quad z_0\in G'+z_2(y).$$

Wir setzen $z_0=x_0+iy_0$ (x_0, y_0 reell). Dann ist $x_0>x_1(y_0)\geqq\eta-a$. Ist weiter $\Re z_2(y)=\eta-a$, so folgt $z_0\in G'+z_2(y)$ unmittelbar. Ist aber

$\Re z_2(y) > \eta - a$, so ist $z_2(y)$ singulärer Punkt von $f(z)$. Da $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ regulär ist, folgt der Reihe nach

$$z_2(y) \notin \overline{G} + z_0, \quad z_2(y) - z_0 \notin \overline{G}, \quad -z_2(y) + z_0 \in G', \quad z_0 \in G' + z_2(y).$$

Um zu zeigen, daß $S_2 \leqq S_1$ ist, gehen wir aus von einer Stelle $z_0 \notin S_1$. Zu zeigen ist: $z_0 \notin S_2$. Aus $\Re z_0 \leqq \eta - a$ folgt $z_0 \notin S_2$ unmittelbar. Ist aber $\Re z_0 > \eta - a$, so ist $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ nicht regulär, gibt es also eine singuläre Stelle $z' \in \overline{G} + z_0$. Setzen wir dann $\Im z' = y'$, so folgt der Reihe nach

$$z_2(y') \in \overline{G} + z_0, \quad z_2(y') - z_0 \in \overline{G}, \quad -z_2(y') + z_0 \notin G', \quad z_0 \notin G' + z_2(y').$$

Die übrigen Behauptungen des Satzes ergeben sich unmittelbar, wenn man von der Konstruktion 1. Art von S ausgeht. —

Satz 3. 4 (Summierbarkeitsgebiet S). *a) Die Stelle z gehöre zu S. Dann ist das Integral* (1) *T'_a-summierbar zum Wert $f(z)$. b) Die Stelle z gehöre nicht zu S und sei auch nicht Randpunkt von S. Dann ist das Integral* (1) *nicht T'_a-summierbar.*

Beweis. Wir ziehen 3. 2 heran. a) Sei $z_0 \in S = S_1$. Dann ist $\Re z_0 > \eta - a$ und $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ regulär. b) Sei $z_0 \notin S = S_1$ und z_0 nicht Randpunkt von S. Ist $\Re z_0 < \eta - a$, so ist T'_a nach 3. 1, b) nicht anwendbar. Ist $\Re z_0 \geqq \eta - a$, so ist $f(z)$ in $G + z_0$ nicht regulär. —

Satz 3. 5 (Gleichmäßige Summierbarkeit in S). *In jedem beschränkten abgeschlossenen Teilbereich von $S = S(f(z), T'_a)$ ist das Integral* (1) *gleichmäßig T'_a-summierbar.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jeder Stelle $z_1 \in S$ einen Kreis mit z_1 als Mittelpunkt gibt, in dem gleichmäßige Summierbarkeit vorliegt. Sei $z_1 \in S = S_1$. Dann gibt es ein $r > 0$, so daß

$$f(z) \text{ regulär in } |z - (z_1 + a)| \leqq a + 2r \tag{5}$$

ist. Durch genügend kleine Wahl von r sei noch dafür gesorgt, daß der Kreis $|z - z_1| \leqq r$ in der Anwendbarkeitshalbebene von T'_a liegt. Es soll gezeigt werden, daß (1) gleichmäßig in z für $|z - z_1| \leqq r$ summierbar oder also (2) gleichmäßig in z_0 für $|z_0 - z_1| \leqq r$ limitierbar ist. Liegt z_0 in der Anwendbarkeitshalbebene, so besteht nach Satz 2. 4 wegen $s(0, z_0) = 0$ die T'_a-Transformation von $s(x, z_0)$ aus den Teilsummen der Reihe (3). Wegen (4) ist also zu zeigen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)^n f^{(n)}(a + z_0) \tag{6}$$

gleichmäßig konvergiert für $|z_0 - z_1| \leqq r$. Wir setzen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - (z_1 + a))^n.$$

Wegen (5) ist der Konvergenzradius dieser Reihe größer als $a+2r$, also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{a+2r}, \qquad |a_n| \leqq \frac{M}{(a+2r)^n} \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

(M von n unabhängig). Für $|z-(z_1+a)| \leqq a+2r$ ist weiter

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} a_{n+\nu} (z-(z_1+a))^\nu \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

für $|z_0 - z_1| \leqq r$ also

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(z_0+a)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} |a_{n+\nu}| r^\nu \leqq \frac{M(a+2r)}{(a+r)^{n+1}}.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige (und übrigens auch absolute) Konvergenz von (6) im angegebenen Kreis. —

§ 4.

Matrixbeziehungen.

Im folgenden treten Matrizen $V = (a_{n\nu}) = (a(n, \nu))$ auf (n Zeilen-, ν Spaltenindex; $n, \nu = 0, 1, \ldots$)[7]. Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, schreiben wir auch $V = a_{n\nu}$. Soll angezeigt werden, wie die Indizes benannt sind, so schreiben wir $V_{n,\nu}$ statt V. Zur Matrix V gehört das Limitierungsverfahren V, bei dem eine Folge s_n limitierbar zum Wert s heißt, wenn (neben eventuellen weiteren Forderungen) die V-Transformation

$$(1) \qquad Vs = V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

existiert und für $n \to \infty$ gegen s strebt. Wir betrachten auch solche Matrizen, bei denen der Zeilenindex oder der Spaltenindex oder beide kontinuierlich sind. Ist n (bezw. ν) kontinuierlich, so soll dafür x (bezw. t) geschrieben und der die Matrix bezeichnende Buchstabe links oben (bezw. rechts oben) mit einem Strich versehen werden. Beispiele: ${}'V = a(x, \nu)$; ${}'V' = a(x, t)$. Dabei sollen x und t aller positiven Werte fähig sein: $x > 0$, $t > 0$. Eine Matrix vom Typus ${}'V$ kann wie V zur Limitierung von Folgen verwendet werden. Matrizen vom Typus V' bezw. ${}'V'$ geben in analoger Weise Anlaß zu Limitierungsverfahren für Funktionen $s(x)$, die für $x \to \infty$ untersucht werden. An die Stelle der Summe in (1) tritt dabei ein Integral. Beispiel:

$$V's = V'(n; s(t)) = \int_0^{\infty} a(n, t)\, s(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)^8).$$

[7]) Die Verwendung von Matrizen in der Limitierungstheorie ist geläufig (vgl. z. B. [7]). Es handelt sich jetzt nur um die Festlegung einiger Bezeichnungen.

[8]) Natürlich müssen V', ${}'V'$ und $s(x)$ geeigneten Integrierbarkeitsvoraussetzungen genügen.

Sind zwei Matrizen $V = a(n, \nu)$, $W = b(n, \nu)$ gegeben, so kann man formal die Produktmatrix

$$VW = (VW)_{n,\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu)\, b(\mu, \nu) \quad (n, \nu = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

bilden. Konvergieren alle diese Reihen, so ist VW eine Matrix U. Analoge Produktbildungen sind im Falle kontinuierlicher Indizes möglich. An die Stelle der Reihe in (2) tritt dann gegebenenfalls ein Integral. Beispiel: $V' = a(n, t)$, $'W' = b(x, t)$,

$$V'\,'W' = (V'\,'W')_{n,t} = \int_0^{\infty} a(n, y)\, b(y, t)\, dy \quad (n = 0, 1, \ldots,\ t > 0);$$

sind die nötigen Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt und ist das Integral stets konvergent, so ist $V'\,'W'$ eine Matrix U'. Nur solche Produkte sind definiert, bei denen der zweite Index des ersten Faktors und der erste Index des zweiten Faktors miteinander nicht kontinuierlich oder kontinuierlich sind. Je nachdem hat man bei der Produktbildung eine Summe oder ein Integral zu benützen. Das Ergebnis ist im Existenzfall eine Matrix, deren erster (zweiter) Index zusammen mit dem ersten (zweiten) Index des ersten (zweiten) Faktors nicht kontinuierlich oder kontinuierlich ist. Beispiele: $'VW = 'U$; $'V\,'W'$ ist nicht definiert.

Wir stellen nun die im folgenden vorkommenden Matrizen und zugehörigen Limitierungsverfahren zusammen.

Taylorsches Verfahren zur Limitierung von Folgen (vgl. § 1):

$$T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Taylorsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$$T'_a = \frac{a^{n+1}}{n!}\, t^n\, e^{-at} \qquad (a > 0)$$

Abelsches Verfahren zur Limitierung von Folgen:

$$'A = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}.$$

Abelsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$$'A' = \frac{1}{x}\, e^{-t/x}.$$

Borelsches Verfahren:

$$'B = e^{-x}\, \frac{x^{\nu}}{\nu!}.$$

S_α-Verfahren (vgl. [9] bis [11]):

$$S_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Cesàrosches Verfahren zur Limitierung von Folgen:

$$C_k = \begin{cases} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \Big/ \binom{n+k}{n} & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } \nu > n \end{cases} \qquad (k > 0).$$

Cesàrosches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$${}'C'_k = \begin{cases} \frac{k}{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{k-1} & \text{für } 0 < t \leqq x \\ 0 & \text{für } t > x \end{cases} \qquad (k > 0).$$

Statt der Matrix T_α betrachten wir allgemeiner (vgl. [11]) die Matrix

$$T_{\alpha,k} = \begin{cases} (1-\alpha)^{n+k+1}\binom{\nu+k}{\nu-n}\alpha^{\nu-n} & \text{für } \nu \geqq n \\ 0 & \text{für } 0 \leqq \nu < n \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 1,\ k \geqq 0).$$

Statt der Matrix T'_a betrachten wir allgemeiner die Matrix

$$T'_{a,k} = \frac{a^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)}\, t^{n+k}\, e^{-at} \qquad (a > 0,\ k \geqq 0).$$

Es ist $T_{\alpha,0} = T_\alpha$, $T'_{a,0} = T'_a$; ist k positiv ganz, so entsteht $T_{\alpha,k}$ aus T_α durch Streichen der k ersten Zeilen und der k ersten Spalten, $T'_{a,k}$ aus T'_a durch Streichen der k ersten Zeilen. Alle aufgeführten Matrizen genügen den bekannten hinreichenden Bedingungen für Permanenz.

Wir betrachten nun Matrixprodukte, bei denen T'_a als Faktor auftritt. Die folgenden Sätze 4. 1. bis 4. 3 verifiziert man durch direktes Ausrechnen der fraglichen Produktmatrizen.

Satz 4. 1 ($T_\alpha T'_a$). *Es sei* $0 < \alpha < 1$, $a > 0$, $k \geqq 0$ *und* $b = (1-\alpha)a$, *also* $b > 0$. *Dann ist das Produkt* $T_{\alpha,k} T'_{a,k}$ *vorhanden, und es ist*

$$T_{\alpha,k}\, T'_{a,k} = T'_{b,k}.$$

Insbesondere ist

$$T_\alpha\, T'_a = T'_b.$$

Satz 4. 2 (${}'A T'_a$). *Es sei* $a > 0$. *Dann ist das Produkt* ${}'A T'_a$ *vorhanden, und es ist*

$$({}'A\, T'_a)_{x,t} = {}'A'_{y,t},$$

wobei zwischen x *und* y *der Zusammenhang* $y = (x+1)/a$ *besteht.*

Satz 4. 3 ($T'_a{}'B$). *Es sei* $a > 0$ *und* $\alpha = 1/(a+1)$, *also* $0 < \alpha < 1$. *Dann ist das Produkt* $T'_a{}'B$ *vorhanden, und es ist*

$$T'_a{}'B = S_a.$$

Es soll nun noch T'_a mit den Matrizen des Cesàroschen Verfahrens multipliziert werden. In Frage kommen die Bildungen $C_k T'_a$ und

$T_a'{}'C_k'$ $(a>0,\ k>0)$. $C_k T_a'$ existiert, weil C_k untere Dreiecksmatrix ist. $T_a'{}'C_k'$ existiert, wie man durch explizite Bildung des Produktes feststellt[9]). Es ist aber

$$C_k T_a' \neq T_a'{}'C_k' \qquad \text{für alle Paare } a, k. \tag{3}$$

Um dies nachzuweisen, vergleichen wir die jeweils erste Zeile $(n=0)$ der beiden Produktmatrizen miteinander. Es ist

$$(C_k T_a')_{0,t} = a\,e^{-at},$$

$$(T_a'{}'C_k')_{0,t} = a\,k \int_t^\infty e^{-ay} \frac{(y-t)^{k-1}}{y^k}\,dy$$

$$= a\,k\,e^{-at} \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{(t+u)^k}\,e^{-au}\,du$$

$$< a\,k\,\frac{e^{-at}}{t^k} \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-au}\,du = \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k-1}}\,\frac{e^{-at}}{t^k}.$$

Für große t ist also $(C_k T_a')_{0,t} \neq (T_a'{}'C_k')_{0,t}$. Damit ist (3) bewiesen. Ähnlich wie bei T_a (vgl. [11]) gilt nun aber

Satz 4.4 $(C_k T_a')$. *Es sei* $a>0$, $k>0$. *Dann sind die Produkte* $C_k T_a'$ *und* $T_{a,k}'{}'C_k'$ *vorhanden, und es ist*

$$C_k T_a' = T_{a,k}'{}'C_k'.$$

Beweis. Bildet man die beiden fraglichen Produkte, so sieht man nach Kürzung mit $\frac{a\,k}{\Gamma(n+k+1)}$, daß man für $n=0,1,\ldots,\ t>0$ die Beziehung

$$\Gamma(n+1)\,e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\Gamma(n-\mu+k)\,a^\mu\,t^\mu}{\Gamma(n-\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)} = a^{n+k} \int_t^\infty y^n (y-t)^{k-1}\,e^{-ay}\,dy \tag{4}$$

zu verifizieren hat. Die gewiß konvergente rechte Seite von (4) ist gleich

$$a^{n+k}\,e^{-at} \int_0^\infty (u+t)^n\,u^{k-1}\,e^{-au}\,du$$

und geht bei Entwicklung des Binoms $(u+t)^n$ in

$$\Gamma(n+1)\,e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{a^\mu\,t^\mu}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(n-\mu+1)} \int_{au=0}^\infty (a\,u)^{n-\mu+k-1}\,e^{-au}\,d(a\,u)$$

über, ist also gleich der linken Seite von (4). —

[9]) Hier und später müssen wir beim Arbeiten mit $'C_k'$ für $0<k<1$ ausnahmsweise (entgegen der Verabredung am Schluß von § 1) Integrale zulassen, die im Endlichen uneigentlich sind.

§ 5.

Erweiterte Definition des T'_a-Verfahrens. Argumentverschiebung.

Die Definition 2.3 bot sich beim Aufbau des T'_a-Verfahrens unmittelbar dar und reichte aus für die Summierung Laplacescher Integrale zum Zwecke analytischer Fortsetzung der dargestellten Funktionen. Im Hinblick auf die Matrix T'_a ist es jedoch naheliegend, die Definition zu erweitern.

Definition 5.1 (Funktionsklasse $\mathfrak{S}$). *Die komplexwertige Funktion $s(x)$ der reellen Veränderlichen x heißt zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehörig, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ beschränkt und im Riemannschen Sinn integrierbar ist.*

Definition 5.2 (Verfahren T'_a, Erweiterung). *Ist $a > 0$, so heißt T'_a auf die Funktion $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{S}$ und*

$$T'_a s = T'_a(n; s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt$$

für $n = 0, 1 \ldots$ existiert. Die Funktion $s(x)$ heißt durch T'_a zum Wert s limitierbar, wenn T'_a auf $s(x)$ anwendbar und $\lim_{n\to\infty} T'_a s = s$ ist.

T'_a-Anwendbarkeit bezw. T'_a-Limitierbarkeit bei einer Funktion $s(x)$ im Sinne von 2.3 hat Anwendbarkeit bezw. Limitierbarkeit im Sinne von 5.2 zur Folge. Für den Rest der Arbeit (§ 5, § 6) sind die fraglichen Begriffe im Sinne von 5.2 aufzufassen. Natürlich ist das Verfahren auch in der neuen Form im Bereich der Funktionen $s(x) \in \mathfrak{S}$ permanent.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung können wir eine funktionentheoretische Seite des Verfahrens zurückgewinnen. Es gilt nämlich

Satz 5.3 (Zusammenhang von T'_a mit einer Taylor-Entwicklung). *Es sei T'_a auf $s(x)$ anwendbar, und die für $\Re z > a$ erklärte Funktion*

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t)\, dt$$

an der Stelle $z = a$ regulär. Dann stimmt für $z = 0$ die Folge der Teilsummen der Taylor-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z - a$ überein mit der Folge $T'_a(n; s(x))$, so daß also dann und nur dann $T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z = 0$ zum Wert s konvergiert.

Beweis. Für $\Re z > a$ und $\nu = 0, 1, \ldots$ ist

$$(-1)^\nu F^{(\nu)}(z) = z \int_0^\infty t^\nu e^{-zt} s(t)\, dt - \nu \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-zt} s(t)\, dt.$$

Für $z \to a$ bei Annäherung von z an a auf der reellen Achse von rechts her folgt daraus

$$(-1)^\nu F^{(\nu)}(a) = \int_0^\infty (a t - \nu)\, t^{\nu-1} e^{-at} s(t)\, dt.$$

Die im Satz genannte TAYLOR-Entwicklung hat an der Stelle $z = 0$ also die 0-te Teilsumme

$$a \int_0^\infty e^{-at} s(t)\, dt = T_a'(0; s(x)),$$

und für $n = 1, 2, \ldots$ die n-te Teilsumme

$$a \int_0^\infty e^{-at} s(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^\nu}{\nu!} \int_0^\infty (a t - \nu)\, t^{\nu-1} e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^{\nu+1} t^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] e^{-at} s(t)\, dt = T_a' s. \; —$$

Satz 5.4 (Konvergenz einer TAYLOR-Entwicklung, Fall 3). *Für die Funktion* $s(x) \in \mathfrak{S}$ *sei* $\lim_{x \to \infty} s(x) = s$, *und es sei* $a > 0$. *Dann ist die* TAYLOR-*Entwicklung der für* $\Re z > 0$ *regulären Funktion*

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t)\, dt$$

nach Potenzen von $z - a$ *für* $z = 0$ *konvergent zum Wert* s.

Beweis. Wegen der Konvergenz von $s(x)$ für $x \to \infty$ ist T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Wegen der Permanenz von T_a' ist $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} s(x) = s$. Die Behauptung ergibt sich nun aus 5.3. —

Wir prüfen jetzt noch, wie sich bei einer zu limitierenden Funktion eine Argumentverschiebung auswirkt. Darüber gilt

Satz 5.5 (Zulässigkeit einer Argumentverschiebung). *Es sei* $s(x) \in \mathfrak{S}$, *und für eine Zahl* $c > 0$

$$S(x) = S_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x < c \\ s(x-c) & \text{für } c \leqq x < \infty. \end{cases}$$

a) Ist T_a' *auf* $s(x)$ *anwendbar, dann ist* T_a' *auf* $S(x)$ *anwendbar, und umgekehrt. b) Aus* $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} s(x) = s$ *folgt* $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} S(x) = s$ *und umgekehrt.*

Beweis. a) Es sei T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Dann existiert für $n = 0, 1, \ldots$

$$t_n = T_a'(n; s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt.$$

Also existiert auch

$$t'_n = T'_a(n; S(x)) = \frac{a^{n+1} e^{-ac}}{n!} \lim_{x \to \infty} \int_0^x (t+c)^n e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= \frac{a^{n+1} e^{-ac}}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} c^{n-\nu} \lim_{x \to \infty} \int_0^x t^\nu e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= (a c)^n e^{-ac} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t_\nu}{(n-\nu)!\,(a c)^\nu}.$$

Aus der Existenz von t'_n für $n = 0, 1, \ldots$ ergibt sich in gleicher Weise die Existenz von

$$t_n = (-a c)^n e^{ac} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t'_\nu}{(n-\nu)!\,(-a c)^\nu}.$$

b) Es sei T'_a auf $s(x)$ und $S(x)$ anwendbar. Die Behauptung ergibt sich unter Benützung der gleich nachher definierten Matrix K_p und ihrer Permanenz aus

$$t'_n = K_p(n; t_\nu) \ (p = a c), \quad t_n = K_p(n; t'_\nu) \ (p = -a c). \ —$$

Wir definieren für beliebiges komplexes p die Matrix K_p mit nicht kontinuierlichen Zeilen- und Spaltenindizes $n, \nu = 0, 1, \ldots$. Es sei $K_0 = E$, wo E die Einheitsmatrix bedeutet; für $p \neq 0$ sei

$$K_p = \begin{cases} \dfrac{p^{n-\nu} e^{-p}}{(n-\nu)!} & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } n < \nu < \infty. \end{cases}$$

K_p ist eine (untere) Dreiecksmatrix.

Satz 5.6 ($K_p K_q$). *Für beliebige Zahlen p, q ist*

$$K_p K_q = K_{p+q}.$$

Beweis. Ist mindestens eine der Zahlen p, q gleich Null, so ist nichts zu beweisen. Die Fälle $p \neq -q$ $(p, q \neq 0)$ und $p = -q$ $(p, q \neq 0)$ verifiziert man durch direktes Ausrechnen von $K_p K_q$. —

Zur Matrix K_p gehört das Verfahren K_p zur Limitierung von Folgen s_n $(n = 0, 1, \ldots)$, bei dem $K_p\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$ gleichbedeutend mit $K_p(n; s_\nu) \to s$ für $n \to \infty$ ist.

Satz 5.7 (Konvergenzgleichheit von K_p). *Das Verfahren K_p ist konvergenzgleich, d. h. K_p ist permanent und vermag nur konvergente Folgen zu limitieren.*

Beweis. Daß K_p den bekannten Permanenzbedingungen genügt, verifiziert man unmittelbar. Aus

$$t_n = K_p s = K_p(n, s_\nu) \to s \qquad \text{für } n \to \infty$$

folgt

$$s_n = E s = (K_{-p} K_p) s = K_{-p}(K_p s) = K_{-p}(n; t_\nu) \to s. \ —$$

§ 6.

Vergleichs- und Verträglichkeitssätze.

In diesem Paragraphen werden Vergleichs- und Verträglichkeitssätze behandelt, die mit dem T'_a-Verfahren in Zusammenhang stehen. Sind zwei Limitierungsverfahren vorgelegt, so handelt es sich bei den Vergleichssätzen um den Vergleich ihrer Wirkungsfelder, bei den Verträglichkeitssätzen um die Frage, ob für eine Funktion, die im Wirkungsfeld beider Verfahren liegt, die beiden verallgemeinerten Grenzwerte übereinstimmen. Es wird von den in § 4 eingeführten Bezeichnungen Gebrauch gemacht.

Zuerst werden die T'_a-Verfahren unter sich verglichen. Satz 5. 1 zeigt, daß das Verfahren T'_a (mit einer aus der Formulierung des Satzes ersichtlichen Einschränkung) um so stärker ist, je kleiner seine Ordnung ist.

Satz 6. 1 ($T'_a \to T'_b$-Satz). *Es sei* $0 < b < a$, $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* T'_b *auf* $s(x)$ *anwendbar. Dann ist* $T'_b\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Beweis. Wegen der Anwendbarkeit von T'_b auf $s(x)$ ist

$$F(z) = z\int_0^\infty e^{-zt}\, s(t)\, dt$$

für $\Re z > b$ konvergent. Wegen $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$ ist nach 5. 3

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

für $|z-a| < a$ regulär, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-a)^n = s.$$

Wird daher

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \qquad \text{für } |z-b| < b$$

gesetzt, so ist nach 1. 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (-b)^n = s.$$

Wegen 5. 3 ergibt dies die Behauptung. —

Einen zweiten Beweis können wir unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß T'_b auf $|s(x)|$ anwendbar ist, folgendermaßen führen. Wir setzen $\alpha = 1 - b/a$, so daß $0 < \alpha < 1$ ist. Nach 4. 1 ist dann $T'_b = T_\alpha T'_a$. Wegen der Permanenz von T_α ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Beziehung

$$(T_\alpha T'_a)s = T_\alpha (T'_a s). \tag{1}$$

Zur Verifikation von (1) sei

$$T_a = a(n, \nu) \geqq 0, \quad T'_a = b(n, t) \geqq 0$$

gesetzt. Die Folgen

$$T'_b s = T'_b(n; s(x)) \quad \text{und} \quad T'_b|s| = T'_b(n; |s(x)|)$$

sind vorhanden. Es existiert also

$$(T_a T'_a)s = \int_0^\infty \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu)\, b(\mu, t) \right) s(t)\, dt,$$

und dieser Ausdruck existiert auch, wenn s durch $|s|$ ersetzt wird. Daher darf die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden, und man erhält

$$(T_a T'_a)s = \sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu) \left(\int_0^\infty b(\mu, t)\, s(t)\, dt \right) = T_a(T'_a s). \; —$$

Aus 6. 1 folgt insbesondere die Verträglichkeit der Verfahren T'_a und T'_b, d. h. wenn $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$ und $T'_b\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s_1$ ist, so ist $s = s_1$. Tiefer als 6. 1 liegt der folgende Satz 6. 2, der die Äquivalenz aller T'_a-Verfahren im Bereich der beschränkten Funktionen behauptet. Der Beweis ist jedoch einfach, wenn man sich auf den entsprechenden Satz für die T_a-Verfahren stützt.

Satz 6. 2 (Äquivalenz der T'_a-Verfahren bei beschränkten Funktionen). *Es sei* $a > 0$, $b > 0$, $s(x) \in \mathfrak{S}$ *für* $x \geqq 0$ *beschränkt, und* $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$. *Dann ist* $T'_b\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Beweis. Wegen der Beschränktheit von $s(x)$ ist T'_c für jede Zahl $c > 0$ auf $|s(x)|$ anwendbar. Die Behauptung folgt im Fall $b \leqq a$ aus 6. 1. Der wesentliche Inhalt des Satzes liegt beim Fall $a < b$. Um den Beweis allgemein zu führen, wählen wir eine nun festgehaltene Zahl $c > \mathrm{Max}(a, b)$. Die Folge

$$t_n = T'_c s = \frac{c^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-ct}\, s(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist definiert und (wegen der Beschränktheit von $s(x)$) beschränkt. Setzen wir

$$\alpha = 1 - \frac{a}{c} \quad (0 < \alpha < 1), \qquad \beta = 1 - \frac{b}{c} \quad (0 < \beta < 1),$$

so ist nach 4. 1

$$T'_a = T_\alpha T'_c, \quad T'_b = T_\beta T'_c.$$

Analog zu (1) ergibt sich

$$T'_a(n; s(x)) = T_\alpha(n; t_\nu), \quad T'_b(n; s(x)) = T_\beta(n; t_\nu).$$

Aus $T'_a s \to s$ folgt $T_\alpha(n; t_\nu) \to s$, daraus [10]) $T_\beta(n; t_\nu) \to s$, also $T'_b s \to s$. —

[10]) Siehe [5], Kapitel IX; vgl. auch [9], S. 299, Satz 25.

Die Möglichkeit, mit Hilfe von 6. 2 einen Umkehrsatz des T'_a-Verfahrens mit zweiseitiger O-TAUBER-Bedingung herzuleiten, sei erwähnt, aber an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.

Es soll nun (bei festgehaltener Ordnung $a > 0$) das Verfahren T'_a mit dem ABELschen Verfahren $'A'$ verglichen werden. $'A'$ heiße auf $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{S}$ und wenn

$$'A's = 'A'(x; s(t)) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t/x} s(t)\,dt$$

konvergiert für $x > 0$. $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ heiße, daß $'A'$ auf $s(x)$ anwendbar und $\lim_{x\to\infty} 'A's = s$ ist. Es gilt

Satz 6. 3 ($T'_a \to 'A'$-Satz). *Es sei* $T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* $'A'$ *auf* $s(x)$ *anwendbar. Dann ist* $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$.

Beweis. Für $\Re z > 0$ ist

$$F(z) = z\int_0^\infty e^{-zt} s(t)\,dt$$

konvergent. Wird

$$F(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-a)^n \qquad \text{für } |z-a| < a$$

gesetzt, so ist wegen $T'_a s \to s$ nach 5. 3

$$\sum_{n=0}^\infty a_n (-a)^n = s.$$

Nach dem klassischen ABELschen Stetigkeitssatz ist also bei Annäherung auf der reellen Achse $\lim_{z\to+0} F(z) = s$. —

Aus 6. 3 folgt insbesondere, daß die Verfahren T'_a und $'A'$ miteinander verträglich sind.

Wir vergleichen weiter die Verfahren $T'_a (a > 0)$ und $'C'_k (k > 0)$ miteinander. $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ soll heißen, daß $s(x) \in \mathfrak{S}$ und

$$'C'_k s = 'C'_k(x; s(t)) = \frac{k}{x}\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} s(t)\,dt \to s$$

strebt für $x \to \infty$.

Satz 6. 4 (Verträglichkeit von T'_a und $'C'_k$). *Es sei* $a > 0$, $k > 0$, $T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$. *Dann ist* $s = s_1$.

Beweis. Ist $0 < k \leqq 1$, so folgt aus $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$, daß $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$ ist. Nach 6. 3 ist dann $s = s_1$. Für $k > 1$ versagt diese Schlußweise. (Vgl. [8].)

Beim Beweis für beliebige $k > 0$ können wir uns etwa auf ganzzahlige $k > 0$ beschränken, da aus $0 < l < m$ und ${}'C_l' s \to s_1$ bekanntlich ${}'C_m' s \to s_1$ folgt. Es liegt nahe, 4. 4 heranzuziehen. Jedoch kommen wir damit nur dann ohne weiteres zum Ziel, wenn vorausgesetzt wird, daß T_a' auf $|s(x)|$ anwendbar ist. Dies sei der Fall. Da C_k untere Dreiecksmatrix ist, ergibt sich dann ohne Schwierigkeit

$$C_k(T_a' s) = (C_k T_a') s = (T_{a,k}' {}'C_k') s, \tag{2}$$

$$C_k(T_a' |s|) = (C_k T_a') |s| = (T_{a,k}' {}'C_k') |s| \tag{3}$$

mit gesicherter Existenz der vorkommenden Ausdrücke. Wir wollen zeigen, daß

$$(T_{a,k}' {}'C_k') s = T_{a,k}' ({}'C_k' s) \tag{4}$$

ist. Dazu setzen wir

$$T_{a,k}' = a(n,t) \geqq 0, \qquad {}'C_k' = b(x,t) \geqq 0.$$

Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ ist dann

$$(T_{a,k}' {}'C_k') s = \int_{t=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{\infty} a(n,y)\, b(y,t)\, dy \right) s(t)\, dt. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck existiert auch, wenn man den Integranden durch seinen absoluten Betrag ersetzt (vgl. (3)). Deswegen, weil ferner, wie leicht zu sehen ist,

$$\int_{t=0}^{\infty} b(y,t) s(t)\, dt = \int_{t=0}^{y} b(y,t) s(t)\, dt = {}'C_k'(y; s(t))$$

und ${}'C_k'(y; |s(t)|)$ als Funktionen von y in jedem Intervall $0 \leqq y \leqq y_0$ eigentlich Riemann-integrierbar sind, weil schließlich der Integrand von (5) im Quadranten $t > 0$, $y > 0$ der t, y-Ebene eine meßbare Funktion von t und y ist, darf in (5) die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden,[11]). Man erhält dann (4). Zusammen mit (2) folgt

$$C_k(T_a' s) = T_{a,k}' ({}'C_k' s).$$

Wegen $T_a' s \to s$, ${}'C_k' s \to s_1$ und der Permanenz der Matrizen C_k und $T_{a,k}'$ ergibt sich nun $s = s_1$.

Um schließlich den Nachweis ohne die Zusatzvoraussetzung der Anwendbarkeit von T_a' auf $|s(x)|$ zu führen, sind umfangreichere Beweismittel notwendig. Es ist

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} s(t)\, dt$$

[11]) Man kann von den Riemannschen zu Lebesgueschen Integralen übergehen, einen bekannten Satz von G. Fubini anwenden und dann zu Riemannschen Integralen zurückkehren.

konvergent für $\Re z > a$. Wir bilden die $\mathfrak{L}^{(k)}$-Transformierte von $s(x)$ im Sinne von G. Doetsch (vgl. [2], 9. Kapitel):

$$\mathfrak{L}^{(k)}\{s\} = \lim_{x\to\infty} C^{(k)}(x; z; s(t))$$

mit

$$C^{(k)}(x; z; s(t)) = \frac{1}{x^k}\int_0^x e^{-zt}(x-t)^k s(t)\,dt \qquad (x>0).$$

Wegen ${}'C'_{k+1}\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$ ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k+1}{x^{k+1}}\int_0^x (x-t)^k s(t)\,dt = s_1,$$

also

$$C^{(k)}(x; 0; s(t)) \cong \frac{s_1}{k+1}\,x \qquad (x\to\infty).$$

Nach D. Gaier (vgl. [4], § 8; andeutungsweise findet man den benötigten Sachverhalt auch in [3], § 2) folgt daraus, daß $\mathfrak{L}^{(k)}\{s\}$ für $\Re z > 0$ existiert, also $f(z)$ für $\Re z > 0$ regulär ist, und daß bei reeller Annäherung von z an $z = 0$

$$\lim_{z\to+0} z f(z) = s_1$$

ist. Dieser Grenzwert ist nach 5. 3 und dem klassischen Abelschen Stetigkeitssatz andererseits aber auch gleich s. —

Der folgende Satz 6. 5 über den Zusammenhang der Verfahren ${}'B$ und S_α ist bekannt (vgl. [9], S. 283). Er wird hier mit aufgeführt, weil für ihn das T'_a-Verfahren eine wesentliche Rolle spielt und dessen funktionentheoretische Seite, z. B. in der Gestalt 2. 6, einen neuen Beweis ermöglicht, der auch die Matrixrelation 4. 3 verständlich macht.

Satz 6. 5. (${}'B \to S_\alpha$-Satz). *Für die Folge* s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ *und die Zahl* α $(0 < \alpha < 1)$ *sei* ${}'B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *und* S_α *auf* s_n *anwendbar. Dann ist* $S_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Beweis. Der Folge s_n ordnen wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit den Teilsummen} \quad s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

zu. Wegen der Anwendbarkeit von S_α auf s_n konvergiert das Funktionselement

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mindestens für $|z| < \alpha$ (vgl. [9], S. 273). Daher ist

$$G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) - a_0 \tag{6}$$

bei $z = \infty$ regulär und verschwindend, außerdem regulär für $\Re z > 1/\alpha$.

Dann ist aber, wenn

$$h(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu!}\, t^{\nu} \qquad (t \geqq 0)$$

gesetzt wird,

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t)\, dt \qquad \left(\Re z > \frac{1}{\alpha}\right), \tag{7}$$

und die Aussage $'B\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, d. h. die Existenz der $'B$-Transformation

$$'B(x; s_\nu) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!}\, x^{\nu}$$

für $x > 0$ und ihre Konvergenz zum Wert s für $x \to \infty$, äquivalent mit der Konvergenz des LAPLACE-Integrales (7) für $z = 1$ zum Wert $s - a_0$ (vgl. [2], S. 358, 380 ff., 464). $G(z)$ ist also für $\Re z > 1$ regulär. Setzt man

$$s(t) = \int_0^{t} h(x)\, dx \qquad (t \geqq 0),$$

so ist

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, d\, s(t) \qquad (\Re z > 1),$$

mit Konvergenz dieses Integrales für $z = 1$ zum Wert $s - a_0$. Nach 2.6 konvergiert infolgedessen wegen (6) die TAYLOR-Entwicklung von $g(1/z)$ nach Potenzen von $z - 1/\alpha$ für $z = 1$ zum Wert s. Weil $G(z)$ bei $z = 1/\alpha$, also $g(z)$ bei $z = \alpha$ regulär ist, heißt dies aber (vgl. [10], S. 347), daß $S_\alpha\text{-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist [12]). —

[12]) Der in [9], S. 281—283, gegebene Beweis von 6.5 beruhte auf der Beziehung

$$S_a s = T'_a('B\, s) \qquad (a = (1-\alpha)/\alpha),$$

die anders als dort auch aus 4.3 hergeleitet werden könnte.

Literaturverzeichnis.

COWLING, V. F.

[1] Summability and analytic continuation, Proc. Amer. math. Soc. **1**, 536—542 (1950).

DOETSCH, G.

[2] Handbuch der LAPLACE-Transformation I, Basel (1950).

GAIER, D.

[3] Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und DIRICHLETschen Reihen am Rande von Summationsgebieten, Math. Zeitschr. **53**, 291—308 (1950/51).

[4] ABELsche Sätze für Potenzreihen, DIRICHLET-Reihen und LAPLACE-Integrale, Dissertation, Stuttgart 1952.

HARDY, G. H.
[5] Divergent series, Oxford (1949).
KNOPP, K.
[6] Über Polynomentwicklungen im MITTAG-LEFFLERschen Stern durch Anwendung der EULERschen Reihentransformation, Acta math. **47**, 313—335 (1926).
[7] Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren, Math. Zeitschr. **47**, 229—264 (1942).
[8] Eine Bemerkung zur C_k- und A-Limitierung von Funktionen, Math. Zeitschr. **50**, 155—160 (1944).
MEYER-KÖNIG, W.
[9] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, 257—304 (1950).
[10] Die E_p- und S_α-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Math. Zeitschr. **52**, 344—354 (1950).
[11] Beziehungen zwischen einigen Matrizen der Limitierungstheorie, Math. Zeitschr. **53**, 450—453 (1950/51).
TEGHEM, J.
[12] Sur des transformations de séries, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **36**, 730—741 (1950).
[13] Sur des transformations de séries, Application aux séries entières, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **37**, 21—33 (1951).
VERMES, P.
[14] Certain classes of series to series transformation matrices, Amer. J. Math. **72**, 615—620 (1950).
[15] Conservative series to series transformation matrices, Acta Sci. math., Szeged **14**, 23—38 (1951).
WIDDER, D. V.
[16] The LAPLACE Transform, Princeton (1946).

(Eingegangen am 29. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 206—207 (1952).

Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Herrn KONRAD KNOPP zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

Der bekannte Beweis von KARAMATA[1]) für die LITTLEWOODsche Umkehrung des ABELschen Stetigkeitssatzes läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, in eine Fassung bringen, die durch ihre Kürze — sie vermeidet den Umweg über $\sum s_n x^n$ — seinen Grundgedanken noch deutlicher hervortreten läßt und überdies schon mit der schwächeren Voraussetzung der *einseitigen* O-Bedingung für die Koeffizienten a_n der Potenzreihe auskommt; sie ergibt unmittelbar den folgenden zuerst von HARDY und LITTLEWOOD[2]) bewiesenen

Satz. *Für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *sei* a_n *reell und* $n a_n \leqq C$; *für* $x \to 1-0$ *existiere* $\lim \sum a_n x^n = s$. *Dann konvergiert* $\sum a_n = s$.

Beim Beweis genügt es, den Fall $s = 0$, $a_0 = 0$, $a_n \leqq n^{-1}$ $(n > 0)$ zu behandeln; der allgemeine Fall kann durch Änderung von a_0 und a_1 und nachträgliche Division durch eine geeignete Zahl C' darauf zurückgeführt werden.

Der Grundgedanke besteht in der Einführung des Raumes $\mathfrak{F}$ derjenigen für $0 < x < 1$ definierten (reellwertigen) Funktionen $f(x)$, für welche

$$\sum_1^\infty a_n f(x^n) \quad \textit{für} \quad 0 < x < 1 \ \textit{konvergent} \tag{1}$$

ist und

$$\sum_1^\infty a_n f(x^n) = F(x) \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to 1-0 \tag{2}$$

gilt.

Hiermit schreibt sich die erste Voraussetzung des Satzes kurz $x \in \mathfrak{F}$, und die Behauptung läßt sich in der Form

$$\mathfrak{F} \ni f^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \textit{für} \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{3}$$

---

[1]) Math. Zeitschr. 32 (1932), S. 319—320. Gegenstand der Arbeit ist ein allgemeinerer Satz über $\sum s_n x^n$, aus dem der Satz von LITTLEWOOD durch elementare, aber nicht ganz kurze Betrachtungen abgeleitet werden kann. Die Durchführung ist zusammenhängend dargestellt bei K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auflage (Berlin 1947), S. 519—524.

[2]) Proc. London math. Soc. 13 (1913), S. 174—191, Theorem 11.

aussprechen, denn es ist

$$\sum_1^\infty a_n f^*(x^n) = \sum_{2x^n \geqq 1} a_n = \sum_1^N a_n = s_N, \quad N = \left[\frac{\log 2}{|\log x|}\right].$$

Der Funktionenraum $\mathfrak{F}$ enthält mit $f(x)$ offenbar stets auch $f(x^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und mit endlich vielen Funktionen auch jede ihrer Linearverbindungen mit konstanten Koeffizienten. Also gehört wegen $x \in \mathfrak{F}$ jedes durch x teilbare Polynom zu $\mathfrak{F}$. Wir zeigen, daß auch jede durch diese Polynome hinreichend gut approximierbare Funktion mit der Eigenschaft (1) zu $\mathfrak{F}$ gehört:

(4) *Die für $0<x<1$ erklärte Funktion $f(x)$ erfülle die Bedingung* (1); *zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es zwei durch x teilbare Polynome p_1, p_2, für die*

$$p_1(x) \leqq f(x) \leqq p_2(x) \qquad (0 < x < 1)$$

gilt und

$$\frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = q(x) \quad \textit{ein Polynom mit} \quad \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon$$

ist. Dann gilt auch (2), *d. h. es ist $f \in \mathfrak{F}$.*

Zum Beweis wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Polynome p_1, p_2 gemäß (4). Dann gilt für die in (2) erklärte Funktion $F(x)$:

$$F(x) - \sum_1^\infty a_n p_1(x^n) = \sum_1^\infty a_n (f(x^n) - p_1(x^n)) \leqq \sum_1^\infty \frac{1}{n} (p_2(x^n) - p_1(x^n))$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n} (1 - x^n)\, x^n\, q(x^n) \leqq \sum_1^\infty (1-x)\, x^n\, q(x^n) = \sum_{n=1}^\infty (1-x)\, x^n \sum_{\varrho=0}^r b_\varrho\, x^{n\varrho}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^r b_\varrho \frac{(1-x)x^{\varrho+1}}{1-x^{\varrho+1}} \xrightarrow{x \to 1-0} \sum_{\varrho=0}^r \frac{b_\varrho}{\varrho+1} = \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon.$$

Wegen $p_1 \in \mathfrak{F}$ gilt $\sum a_n p_1(x^n) \to 0$, also $F(x) < \varepsilon$ für $x > 1 - \delta$. Durch Betrachtung von $p_2 - f$ an Stelle von $f - p_1$ ergibt sich das Gleiche für $-F(x)$, also gilt $F(x) \to 0$. Damit ist (4) bewiesen. Wir wenden uns der Behauptung (3) zu.

f^* erfüllt die Forderung (1), da die Summe abbricht. Ferner läßt sich f^* im Sinne von (4) durch Polynome approximieren, indem man zunächst die für $0 \leqq x \leqq 1$ stückweise stetige Funktion $(f^*(x) - x)/x(1-x)$ zwischen zwei Polynome q_1, q_2 mit $\int (q_2 - q_1)\,dx < \varepsilon$ einschließt (was auf Grund des Weierstrassschen Approximationssatzes möglich ist) und dann $p_i(x) = x + x(1-x)\,q_i(x)$ setzt. Nach (4) ist $f^* \in \mathfrak{F}$. Damit ist der Beweis beendet.

(Eingegangen am 1. Mai 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 208—218 (1952).

Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Die folgenden Seiten enthalten eine differentialgeometrische Behandlung der Kongruenzen reeller Kurven im dreidimensionalen Euklidischen Raum, die sich systematisch der Methode des beweglichen Begleitkörpers bedient. Alle für das betrachtete Gebilde charakteristischen Begriffe ergeben sich nach diesem Verfahren auf die natürlichste Weise, weil es unmittelbar zu vollständigen Systemen von Differentialinvarianten führt; zudem haben diese von vornherein höchst anschauliche Bedeutungen.

1. Die zu untersuchende *Kurvenkongruenz* sei so beschaffen, daß durch jeden Punkt P eines gewissen räumlichen Gebietes genau eine ihrer Kurven geht; sie besitze alle sich als erforderlich herausstellenden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften. In jedem Punkt P bestimmt dann die durch ihn laufende Kurve, die wir als gerichtet voraussetzen, einen sie dort berührenden Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ [1]).

[1]) A. Voss betrachtet in seiner Arbeit „Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme", Math. Ann. 23 (1884), S. 45—81, im Grunde genommen die gleichen Gebilde, wenn er jedem Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene als zugeordnet annimmt: die Normalebene zu $\mathfrak{e}$ durch P.

R. v. Lilienthal behandelt in seinen Arbeiten „Über die Krümmung der Kurvenscharen", Math. Ann. 32 (1888), S. 545—565, und „Zur Krümmungstheorie der Kurvenscharen", Math. Ann. 38 (1891), S. 429—451, zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten, d. h. nach unserem heutigen Sprachgebrauch Kongruenzen von Kurven.

P. Delens verwendet in einer großen Arbeit „Géométrie des congruences de courbes", Rend. Palermo 56 (1932), p. 289—351, in der er Untersuchungen von C. E. Weatherburn weiterführt, schon die méthode du repère mobile; sein Verfahren ist aber in den Grundlagen der Vereinfachung fähig, wie die vorliegende kleine Arbeit zu zeigen versucht.

F. Emde untersucht in seinem Buch „Quirlende elektrische Felder" (Braunschweig 1949) Felder von Einheitsvektoren, die unter geeigneten Voraussetzungen Kongruenzen von „Feldlinien" definieren.

2. Denken wir uns einen zu einer Schar von Kongruenzkurven senkrechten Flächenstreifen! In jedem Punkt P seiner Mittellinie m ist durch den von ihm ausgehenden Vektor $\mathfrak{e}$ und den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ der Tangente von m ein starrer Körper definiert, der „*Begleitkörper* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$". Verschieben wir diesen an m entlang so, daß sein Scheitel P die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ hat, die Zeit also durch die Bogenlänge s von m gemessen wird, so gibt es nach einem Satz der Kinematik an jeder Stelle P einen momentanen *Drehvektor* $\mathfrak{d}$, mittels dessen sich die Änderungsgeschwindigkeit eines beliebigen, mit dem Körper fest verbundenen Vektors $\mathfrak{q}$ in der Form ausdrückt:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q}. \tag{1}$$

Dies ist die *Grundformel*, die die „Ableitungsgleichungen" der Theorie umfaßt; diese gehen aus ihr hervor, wenn man für $\mathfrak{q}$ die „Grundvektoren" $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}$ des Begleitkörpers oder „begleitenden Dreibeins" $(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ einsetzt.

3. Die zu $\mathfrak{e}$ normale Komponente des Drehvektors,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{e}, \tag{2}$$

ist für die Gestaltsverhältnisse der Kongruenz in der Umgebung der Stelle P in bezug auf die Richtung $\mathfrak{a}$ maßgebend; denn $\mathfrak{g}$ ist durch die räumliche Ortsfunktion $\mathfrak{e}$ und ihre geometrische Ableitung in der Richtung $\mathfrak{a}$ bestimmt, da die Grundformel (1) mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{e}$ für $\mathfrak{g}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \times \frac{d\mathfrak{e}}{ds} \tag{3}$$

ergibt. $\mathfrak{g}$ kennzeichnet nach Größe und Richtung die Geschwindigkeit, mit der der Vektor $\mathfrak{e}$ sich beim Fortschreiten von P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ neigt, und heiße deshalb der *Neigungsvektor* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$.

Naturgemäß kommt es hauptsächlich auf die relative Lage von $\mathfrak{g}$ zum Begleitkörper an; diese wird durch die Größen der Komponenten von $\mathfrak{d}$ in den Richtungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ festgelegt, die „*Schränkung*" a und die „*Spreizung*" b der Kongruenz für das Element $(P, \mathfrak{a})$[2]: es ist

$$\mathfrak{g} = a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}. \tag{4a}$$

[2]) Mit dem Begriff der Spreizung, aber unter dem Namen „Normalkrümmung" beschäftigte sich schon A. Voss, a. a. O., S. 70, und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 553 ff. Beide Begriffe kommen dann bei C. E Weatherburn vor; s. P. Delens l. c. p. 303. Das Wort „Spreizung" gebraucht F. Ende a. a. O., S. 101, wo gleichzeitig der Begriff der Schränkung unter der Bezeichnung „Drillung" eingeführt wird, die wir jedoch in einer etwas anderen, und zwar der üblichen Bedeutung benützen wollen. Der Ausdruck „Schränkung" wurde in einem engeren Sinn bei der Untersuchung von Regelflächen von F. Buka 1881 eingeführt, Z. f. Math. u. Phys. 21, S. 16.

In manchen Fällen ist es günstiger, zur Festlegung von $\mathfrak{g}$ im Begleitkörper Polarkoordinaten g und γ zu verwenden, so daß

$$\mathfrak{g} = g(\mathfrak{a}\cos\gamma + \mathfrak{b}\sin\gamma) \tag{4b}$$

wird. Den Skalar g, der nach (3) die Größe von $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ angibt, nennen wir die *Neigung*, den Winkel

$$\delta = \gamma - \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

zwischen $\mathfrak{a}$ und $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ die *Schwenkung* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$.

Zwischen den eingeführten „Neigungsgrößen" gelten die Beziehungen:

$$a = -g\sin\delta, \quad b = g\cos\delta, \quad g^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg}\delta = -a:b. \tag{4c}$$

4. Die Koordinate von $\mathfrak{b}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$, die „Rundung" c des Orthogonalstreifens der Kongruenz[3]), ist durch die Änderung der Richtung $\mathfrak{a}$ beim Fortschreiten des Begleitkörpers längs der Streifenachse m bestimmt; aus der Grundformel (1) ergibt sich mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} + c\mathfrak{e}$ der bekannte Ausdruck[4]) $c = \mathfrak{e}\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}}{ds}$.

Besonders interessant sind die orthogonalen „Bänder" der Kongruenz, die durch das Verschwinden von c gekennzeichnet sind[5]); sie sind durch die Angabe eines ihrer Linienelemente eindeutig bestimmt.

5. Wie hängen die *Neigungsgrößen* a und b, die zu den verschiedenen, von einen Punkt P ausstrahlenden Normalenrichtungen $\mathfrak{a}$ der Kongruenz gehören, untereinander zusammen?

Es seien $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}_1$ zwei zueinander senkrechte unter den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e}$ ist. Bezeichnet φ den Winkel zwischen $\mathfrak{a}_1$ und einem beliebigen der Vektoren $\mathfrak{a}$, den „Richtungswinkel" von $\mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\cos\varphi + \mathfrak{a}_2\sin\varphi. \tag{6}$$

---

[3]) Zur Benennung der Krümmungsgrößen eines Streifens vergleiche man Jahresber. d. D. Math.-Ver. 53, 1943, 2. Abt., S. 33. Die „Koordinate" ist der Zahlenwert der „Komponente".

[4]) Diesen Ausdruck stellte, natürlich in anderer Schreibweise, C. F. Gauss schon vor 1825 (Werke VIII, S. 390 unten) für die „Seitenkrümmung" auf, die später O. Bonnet „geodätische Krümmung" nannte.

[5]) Auf sie weist R. v. Lilienthal hin a. a. O., S. 555. Als Band bezeichnete S. Finsterwalder einen Streifen mit verschwindender geodätischer Krümmung oder Rundung.

Diese Beziehung kann nur das Ergebnis der Anwendung der Operation

$$\frac{d}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial s_2} \tag{7}$$

auf den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ der Punkte einer Fläche sein, die durch den Punkt P geht und in diesem die Normale $\mathfrak{e}$ besitzt. Der Operator (7) ist auf jede Ortsfunktion auf dieser Fläche in der Umgebung von P anwendbar[6]; eine solche ist der Vektor $\mathfrak{e}$, so daß

$$\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_2} \tag{8}$$

wird, woraus nach (3) folgt:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cos\varphi + \mathfrak{g}_2 \sin\varphi. \tag{9}$$

Hierin spricht sich das „Verteilungsgesetz" des Neigungsvektors $\mathfrak{g}$ als Funktion des Linienelementes $(P, \mathfrak{a})$ aus; er ist, wie man sieht, in jedem Punkt P eine *lineare Vektorfunktion* von $\mathfrak{a}$.

Für die Schränkung und die Spreizung, für die nach (4a) und (3)

$$a = \mathfrak{g}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{e}}{ds}, \quad b = \mathfrak{g}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{e}}{ds} \tag{10}$$

gilt, ergeben sich aus (9), da nach (6)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{a}_2 = \cos\varphi, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1 = \sin\varphi$$

ist, quadratische Formen in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mit Koeffizienten, die sich in einfacher Weise aus a_1, a_2, b_1, b_2 zusammensetzen[7].

6. Die *Affinität* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ oder, anschaulicher ausgedrückt, die *Ellipse* mit dem Mittelpunkt P und den Halbmessern $\mathfrak{g}$ in Verbindung mit dem Gesetz der Zuordnung ihrer Punkte zu denen des Einheitskreises um P mit den Radien $\mathfrak{a}$ bringt die Zusammenhänge zwischen den Neigungsgrößen der Kongruenz in einem ihrer Punkte P vollständig zum Ausdruck; wir wollen dies im einzelnen genauer betrachten:

---

[6]) Selbstverständlich müssen überall die nötigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden.

Es sei betont, daß $\mathfrak{e}$ im allgemeinen außer in P *nicht* zur Fläche normal ist.

Mit dem Index i versehene Buchstaben bezeichnen im folgenden Größen, die der Richtung $\mathfrak{a}_i$ zugeordnet sind.

[7]) S. F. Emde a. a. O., S. 102. Ähnliche Ausdrücke werden auf die gleiche Weise wie im obigen Text im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, auf S. 180 abgeleitet; vgl. auch M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung (Leipzig 1928), S. 93.

Die Ellipse der Vektoren $\mathfrak{g}$ besitzt, wenn sie nicht speziell ein Kreis ist, zwei Hauptachsen. Die in sie fallenden Neigungsvektoren $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ haben extreme Längen g' und g''; wir nennen sie die *Hauptneigungen* der Kongruenz an der Stelle P. Die Vektoren $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}'$, denen sie entsprechen, geben die *„Hauptneigungsrichtungen"* der Kongruenz in P an; sie sind stets reell und aufeinander senkrecht. Diese Richtungen, die im allgemeinen nicht mit denen der Hauptachsen unserer $\mathfrak{g}$-Ellipse zusammenfallen, bilden bez. mit $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ Winkel, die bei geeigneter Festsetzung der Vorzeichen der Hauptneigungen g' und g'' als einander gleich angenommen werden können; wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit $\frac{\pi}{2} + \delta_0$ und nennen δ_0 die *mittlere Schwenkung* der Kongruenz an der betrachteten Stelle. — Ist die $\mathfrak{g}$-Ellipse ein Kreis, der dem $\mathfrak{a}$-Kreis mit gleichem Umlaufsinn entspricht, so hat die Kongruenz in P für alle Richtungen $\mathfrak{a}$ gleiche Schwenkungen $\delta = \delta_0$ (vgl. (4 b) in Abschnitt 3), daher nach (4 a) auch gleiche Schränkungen und gleiche Spreizungen; findet das Entsprechen der beiden Kreise mit entgegengesetzten Umlaufrichtungen statt, so verliert der Begriff der mittleren Schwenkung seinen Sinn.

7. Die *Ellipse* der Vektoren $\mathfrak{g}$ besitzt bekanntlich zwei *Invarianten*, nämlich den Vektor $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = g_1 g_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta_2 - \delta_1\right)\mathfrak{e}$ oder, da nach unserer Vorzeichenfestsetzung $\delta'' - \delta' = 0$ wird,

$$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = g' g'' \mathfrak{e} \tag{11}$$

und den Skalar

$$\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 = \mathfrak{g}'^2 + \mathfrak{g}''^2, \tag{12}$$

wie sich mit Hilfe von (9) verifizieren läßt, da wegen $\mathfrak{e} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$ der zur Richtung $\mathfrak{b}$ gehörende Neigungsvektor $-\mathfrak{g}_1 \sin\varphi + \mathfrak{g}_2 \cos\varphi$ wird.

Die skalare Ortsfunktion im Raum

$$N = \mathfrak{e}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \tag{11'}$$

heiße das *Neigungsmaß* der Kongruenz in P; wie wir aus (11) ersehen, ist es gleich dem Produkt der beiden Hauptneigungen:

$$N = g' g''. \tag{11''}$$

Je nachdem $N \gtrless 0$ ist, entsprechen sich der $\mathfrak{a}$-Kreis und die $\mathfrak{g}$-Ellipse mit gleichen oder mit entgegengesetzten Umlaufsinnen.

Als *Invarianten der Affinität* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ finden wir nach (9) und (6)

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{g}_2 \mathfrak{a}_2 = 2A, \tag{13}$$

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{a}_1 = 2B; \tag{14}$$

nach (10) und, weil vermöge (4 b) und (5)

$\mathfrak{g}'\mathfrak{a}' = -g' \sin\delta_0$, $\mathfrak{g}''\mathfrak{a}' = -g'' \cos\delta_0$, $\mathfrak{g}'\mathfrak{a}'' = g' \cos\delta_0$, $\mathfrak{g}''\mathfrak{a}'' = -g'' \sin\delta_0$

ist, wird

(13′) $$A = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2) = -\tfrac{1}{2}(g' + g'') \sin\delta_0,$$

(14′) $$B = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2) = \tfrac{1}{2}(g' + g'') \cos\delta_0.$$

A ist die *„mittlere Schränkung"*, B die *„mittlere Spreizung"* der Kongruenz an der Stelle P[8]).

Die Größe

(15) $$\operatorname{tg}\delta_0 = -A : B$$

kann als *Schwenkungsmaß* bezeichnet werden; durch seinen Wert wird, wie es sein muß, δ_0 nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von π bestimmt, und je nach dem Wert von δ_0, für den man sich entscheidet, sind die Vorzeichen von g' und g'' zu wählen.

Die besprochenen Invarianten sind *nicht unabhängig* voneinander; es ist nämlich gemäß (4 b), (13′), (14′) und (11′)

(12′) $$\mathfrak{g}'^2 + \mathfrak{g}''^2 = a'^2 + b'^2 + a''^2 + b''^2 = 4A^2 + 4B^2 - 2N.$$

8. Mit Hilfe der eingeführten Größen können übersichtliche *Ausdrücke für die Schränkung und die Spreizung* aufgestellt werden:

Bezeichnen wir mit χ den Richtungswinkel von $\mathfrak{a}$ gegenüber der Hauptneigungsrichtung $\mathfrak{a}'$, so erhalten wir auf Grund von (10), (6), (9), und (4 c)[9])

(16) $$a = A + \tfrac{1}{2}(g' - g'') \sin(2\chi - \delta_0),$$

(17) $$b = B + \tfrac{1}{2}(g' - g'') \cos(2\chi - \delta_0).$$

Diese Ausdrücke lassen unmittelbar folgende Tatsachen erkennen: a und b nehmen für vier gleichmäßig verteilte, stets reelle Paare entgegengesetzter Richtungen extreme Werte an; unter der Voraussetzung $g' > g''$ wird

für $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}$: $a = a_{\max} = \bar{a}$ und $b = B$,

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}$: $a = a_{\min} = \underline{a}$ und $b = B$;

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$: $b = b_{\max} = \bar{b}$ und $a = A$,

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 \pm \frac{\pi}{2}$: $b = b_{\min} = \underline{b}$ und $a = A$.

a und b verschwinden für je zwei Paare entgegengesetzter Richtungen $\mathfrak{a}$, die entweder reell oder imaginär sind und demgemäß auch zusammen-

[8]) S. P. Delens l. c. p. 299; F. Emde führte die Bezeichnungen „mittlere Drillung" und „mittlere Spreizung" ein, a. a. O., S. 103.

[9]) Ähnliche Ausdrücke gibt F. Emde a. a. O., S. 102 (13); den Zusammenhang vermitteln unsere zwischen (14) und (13′) stehenden Beziehungen.

fallen können, und zwar wird $b = 0$ für Richtungen, die zur Richtung $\chi = \frac{1}{2}\delta_0$ symmetrisch sind, und $a = 0$ für Richtungen, die zur Richtung $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{4}$ symmetrisch liegen. Alle diese Verhältnisse werden durch die Abbildung erläutert, die den $\mathfrak{a}$-Kreis und die $\mathfrak{g}$-Ellipse in ihrer gegenseitigen Lage zeigt, während die ausgezeichneten Werte der Größen a und b der Übersichtlichkeit zuliebe an Richtungen vom Richtungswinkel 2χ angeschrieben sind [10]).

Nach (11′) wird für die Richtungen, für die $a = 0$, $N = b\,b^*$, für die Richtungen, für die $b = 0$, $N = a\,a^*$, wo das Sternchen die Abhängigkeit von der in der Normalebene zu $\mathfrak{e}$ um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehten Richtung $\mathfrak{e} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ bezeichnet.

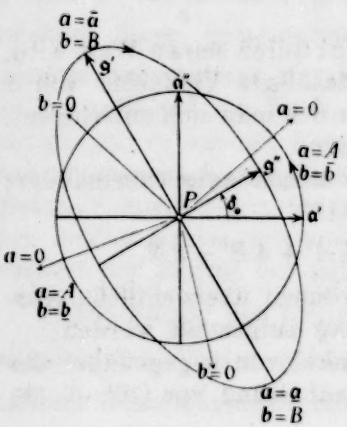


Fig. 1.

Da die Extremwerte von a und die von b je Paaren aufeinander senkrechter Richtungen zugeordnet sind, so wird, wenn der Richtungswinkel von $\mathfrak{a}$ in bezug auf ein solches Paar mit α bzw. β bezeichnet wird, so daß $\alpha + \frac{\pi}{4} = \beta = \chi - \frac{1}{2}\delta_0$ ist,

$$(16') \qquad a = \bar{a} \cdot \cos^2\alpha + \underline{a} \cdot \sin^2\alpha,$$

$$(17') \qquad b = \bar{b} \cdot \cos^2\beta + \underline{b} \cdot \sin^2\beta;$$

denn a und b sind nach der Schlußbemerkung von Abschnitt 5 quadratische Formen in $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ bzw. $\cos\beta$, $\sin\beta$, die nur die angegebene Gestalt haben können, wenn sie für verschwindende cos- und sin-Werte extreme Größen annehmen sollen. Ferner wird nach (16) und (17)

$$(16'') \qquad a = A + \tfrac{1}{2}(g' - g'')\sin 2\beta,$$

$$(17'') \qquad b = B - \tfrac{1}{2}(g' - g'')\sin 2\alpha.$$

Hiernach wird wegen (12′)

$$\bar{a} \cdot \underline{a} = N - B^2, \quad \bar{b} \cdot \underline{b} = N - A^2;$$

diese beiden Skalare könnte man als Schränkungsmaß und Spreizungsmaß der Kongruenz bezeichnen [11]).

---

[10]) Die Werteverteilung der Funktionen a und b um einen Punkt zeigt F. Emde a. a. O. auf S. 108 in einer schönen Figur.

[11]) Manchmal sind die folgenden Beziehungen wertvoll, die man durch partielle Ableitung von (9), (16) und (17) nach dem Richtungswinkel erhält und in denen das Sternchen den zum Linienelement $(P, \mathfrak{e} \times \mathfrak{a})$ gehörenden Funktionswert kennzeichnet:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \varphi} = \mathfrak{g}^*, \quad g\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \mathfrak{g}\mathfrak{g}^*, \quad \frac{\partial a}{\partial \varphi} = 2(b - B) = b - b^*, \quad \frac{\partial b}{\partial \varphi} = 2(A - a) = a^* - a.$$

9. Betrachten wir nun die *Bewegung des Begleitkörpers* (e, a, b) *längs eines von Kongruenzkurven gebildeten Flächenstreifens* durch den Punkt P! Während in bekannter Weise aus der *Krümmung* k der Kongruenzlinie die Normalkrümmung des Streifens zu $k\cos\vartheta$ und seine Seitenkrümmung zu $k\sin\vartheta$ berechnet werden kann, wo ϑ im Falle $k \neq 0$ den Winkel der negativen Streifennormalen $-\mathfrak{b}$ mit der Hauptnormalen $\mathfrak{h}$ der Streifenachse bedeutet[12]), ist auf Grund einer bekannten Tatsache der Flächentheorie die Normalwindung des Streifens, die „*Drillung*" *der Kongruenz für das Linienelement* $(P, \mathfrak{a})$, *ihrer Schränkung* a für dieses Element *entgegengesetzt gleich*[13]).

Diese Bemerkung erlaubt es, die Schränkung mit dem Winkel ϑ und der *Windung* w der Kongruenzlinie in Beziehung zu setzen; ein bekannter Satz der Streifentheorie besagt nämlich, daß, wenn t die Bogenlänge der Kongruenzkurve ist, gilt[14]):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a + w. \tag{18}$$

10. Die wesentlichen allgemeinen Einsichten der Differentialgeometrie entspringen aus Integrabilitätsbedingungen. So ergeben sich durch Anwendung einer solchen auf den Ortsvektor einer Fläche außer dem im vorigen Abschnitt herangezogenen BERTRAND-BONNETschen Gesetz Ausdrücke für die *Seitenkrümmungen* der auf der Fläche zu Grunde gelegten Netzlinien. Da diese für eine den betrachteten Kongruenzstreifen enthaltende Fläche und das auf ihr liegende Netz der Kongruenzlinien

---

[12]) Der erste dieser Werte ergibt sich aus der Formel von MEUSNIER, der zweite aus einer Beziehung, die gelegentlich nach CATALAN benannt wird, aber schon von GAUSS und MINDING benutzt wurde.

[13]) Damit kommt die von F. EMDE benützte Bezeichnung zur Geltung (vgl. Fußnote [2]) und [3]) dieser Arbeit).

Der Satz, daß die Normalwindungen zweier sich senkrecht schneidender Flächenkurven in ihrem Schnittpunkt verschwindende Summe haben, stammt von J. BERTRAND, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), p. 134—137, und O. BONNET, Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XVIII, 32e cahier (1845), p. 1—4.

[14]) O. BONNET, l. c. p. 13—17.

Wenn statt ϑ die Variable $\tau = tg\,\vartheta$, ferner mit Hilfe des in Abschnitt 5 erwähnten Ausdrucks für a, in dem nur φ durch ϑ zu ersetzen ist, die Schränkungen a_1, a_2 und die Spreizungen b_1, b_2 für die Richtungen der Hauptnormalen und der Binormalen der Kongruenzlinie eingeführt werden, so erhält man für die Funktion $\tau(t)$ längs einer Kongruenzkurve die Riccatische Differentialgleichung:

$$\frac{d\tau}{dt} = (a_1 + w)\tau^2 + (b_1 - b_2)\tau + a_2 + w.$$

Eine Folge hiervon ist der bekannte Satz, daß vier koaxiale Kongruenzstreifen mit jeder Ebene vier Linienelemente gleichen Doppelverhältnisses gemein haben. Vgl. G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II (Paris 1915), p. 4.

und ihrer orthogonalen Trajektorien die Werte

$k \sin \vartheta$ für die Linie mit der Tangentenrichtung $\mathfrak{e}$,

b „ „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{a}$

haben, so genügen sie der Beziehung [15])

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} + k \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial t} + b \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \tag{19}$$

in der F eine willkürliche Ortsfunktion auf der Fläche bedeutet.

Die auf einen beliebigen, mit einem geeigneten Begleitkörper der Fläche fest verbundenen Vektor angewandte Integrabilitätsbedingung ist die Quelle des theorema egregium von Gauss und der Mainardi-Codazzischen Gleichung [16]). Diese Relationen erscheinen, da die Darboux-Cesàroschen Krümmungsvektoren unserer aus Kongruenzkurven gebildeten Fläche für die t- und s-Linien

$$-a\mathfrak{e} + k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad a\mathfrak{a} + c\mathfrak{e} + b\mathfrak{b}$$

sind, wo c die in Abschnitt 4 erläuterte Bedeutung hat, in der einen Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b\right)(a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{e}) - \left(\frac{\partial}{\partial s} - k \sin \vartheta\right)(k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} - a\mathfrak{e})$$
$$= (k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} - a\mathfrak{e}) \times (a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{e}),$$

mit der die folgenden skalaren Beziehungen gleichwertig sind:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} - \dfrac{\partial (k \cos \vartheta)}{\partial s} + 2ab + ck \sin \vartheta + k^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} - \dfrac{\partial (k \sin \vartheta)}{\partial s} - a^2 + b^2 - ck \cos \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial a}{\partial s} + bc - 2ak \sin \vartheta + bk \cos \vartheta = 0. \end{cases} \tag{20}$$

---

[15]) S. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, S. 177 (26); nach S. 178 (32) sind, weil $\omega_{12} = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, die dort mit $-g_2$ und g_1 bezeichneten Größen die Seitenkrümmungen G_1 und G_2 der Netzlinien.

[16]) S. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, S. 178 (37), wo $D\omega_{12} = 0$ zu setzen und bezüglich g_1 und g_2 das in der vorigen Fußnote Gesagte zu berücksichtigen ist.

Integrabilitätsbedingungen stellen auch R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 438 f., und P. Delens, l. c. p. 315, auf.

Eine Möglichkeit, zu Fundamentalgleichungen zu gelangen, zeigen auch zwei Arbeiten des Verfassers in den Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1951 (2. März) und 1952 (6. Juni).

Dies sind die *Fundamentalgleichungen* der Theorie der Kurvenkongruenzen. Man beachte, daß die Funktionswerte von ϑ hier längs einer Orthogonaltrajektorie der Kongruenzlinien willkürlich angenommen werden dürfen. Die Funktion $-a^2 - ck\cos\vartheta$, die in der mittleren, das theorema egregium aussprechenden Gleichung auftritt, ist das Krümmungsmaß unserer Fläche.

11. Die Theorie der Kurvenkongruenzen umfaßt die *Flächenlehre* — das bedarf wohl kaum der Erwähnung. Wenden wir unsere Theorie auf die Normalenkongruenz einer Fläche oder auch nur auf eine Kongruenz von Kurven an, die die Fläche senkrecht durchsetzen, so erkennen wir aus der Bedeutung von $\mathfrak{d}$ als Krümmungsvektor der Fläche unmittelbar, daß die Schränkung der Kongruenz in die Normalwindung, ihre Spreizung in die Normalkrümmung der Orthogonalfläche übergeht, die mittlere Spreizung aber in die mittlere Krümmung; die mittlere Schränkung jedoch verschwindet nach dem schon mehrfach erwähnten Satz von Bonnet in den Punkten der Fläche. Das identische Verschwinden von A in einem Raumgebiet ist aber nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven der Kongruenz in diesem Gebiet orthogonale Flächen besitzen[17]).

In (17′) und (16″) haben wir nach dem Gesagten Verallgemeinerungen der Formeln von Euler[18]) und von Bertrand-Bonnet vor uns, während die Relationen (16′) und (17″) in der Flächentheorie nicht benutzt zu werden pflegen.

Beim ersten Blick auf die Figur wird man die Verhältnisse im Fall der allgemeinen Kongruenz für viel verwickelter halten als in der Lehre von den Flächenkrümmungen. Bei genauerem Zusehen wird man jedoch bemerken, daß sich dieser spezielle Fall nur dadurch auszeichnet, daß die Hauptachsen der $\mathfrak{g}$-Ellipse zu den Hauptneigungsrichtungen bez. senkrecht sind oder, mit anderen Worten, die mittlere Schwenkung $\delta_0 = 0$ ist; auch bei Minimalflächen, für die dieser Begriff sich als sinnlos erwies, besteht die Aussage über die Lage der $\mathfrak{g}$-Ellipse bei geeigneter Festlegung der Hauptrichtungen zu Recht. Daß man so leicht geneigt ist, die Krümmungsverhältnisse in der Umgebung eines Flächenpunktes für einfacher zu halten, als sie in Wirklichkeit sind, rührt daher, daß man einem Teil der dort herrschenden Gesetzmäßigkeiten gewöhnlich überhaupt keine Beachtung schenkt. Die Neigungsverhältnisse in der allgemeinen Theorie der Kurvenkongruenzen zeichnen sich sogar durch ihre Symmetrie bezüglich der Größen a und b aus.

[17]) Dies ergibt sich durch den Vergleich mit älteren Bedingungen von A. Voss, a. a. O., S. 48 f. und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 548; F. Emde führt die Gleichung $A = 0$ auf eine bekannte Bedingung der Vektoranalysis zurück, a. a. O., S. 103.

[18]) Auf diese weisen schon A. Voss, a. a. O., S. 70 und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 555 f., hin.

12. Es wäre reizvoll, noch weitere Sonderfälle zu betrachten, so vor allem den der Strahlenkongruenzen, der durch das identische Verschwinden von k gekennzeichnet ist, ferner die Zusammenhänge mit der Lehre von den Flächenabbildungen und schließlich einige interessante Integralsätze der Theorie. All dies möge anderen Gelegenheiten vorbehalten bleiben.

(Eingegangen am 30. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 219—222 (1952).

Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

J. Karamata in Genf.

Sei

$$(A) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^\nu$$

konvergent für $|x| < 1$, dann stellt für $x \to 1$ nicht nur der Ausdruck (A), sondern auch jeder Abschnitt dieser Reihe

$$(A_N) \qquad f_N(x) = \sum_{\nu \leqq N} u_\nu x^\nu$$

mit

$$N = N(x) \to \infty \qquad (x \to 1)$$

ein reguläres Summierungsverfahren der Reihe $\sum u_\nu$ dar.

Das A_N-Verfahren ist ersichtlich um so schwächer, je langsamer $N(x)$ gegen Unendlich strebt, und wird schon konvergenzgleich für

$$(1) \qquad N(x) = \lg t / \lg x$$

(t eine passende Konstante). Es gilt in der Tat der

Satz 1. *Ist* $\frac{1}{2} < t < 1$, *so folgt aus*

$$(1') \qquad f_N(x) = \sum_{x^\nu \geqq t} u_\nu x^\nu \to s \qquad (x \to 1)$$

auch

$$(2) \qquad s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \to s \qquad (n \to \infty)$$

und umgekehrt.

Dies ist ein Satz Mercerscher Art (vgl. H. R. Pitt, Mercerian theorems, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34** (1938), S. 510—520). Er kann aus einem allgemeineren Ergebnis von Pitt abgeleitet werden, ist aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch elementar beweisbar. Sei

$$t = e^{-a}, \quad x = e^{-1/y}, \quad s(y) = \sum_{\nu \leqq a y} u_\nu$$

und

$$(3) \qquad F(y) = e^a f_N(x) = e^a \sum_{\nu \leqq a y} u_\nu e^{-\nu/y}$$

gesetzt; dann ist

$$(3') \qquad s(y) = F(y) - \frac{a e^a}{y} \int_0^y e^{-a\eta/y} s(\eta)\, d\eta.$$

Daraus folgt durch Iteration

$$s(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu F_\nu(y),$$

wobei

$$F_0(y) = F(y), \quad F_{\nu+1}(y) = \frac{a e^a}{y} \int_0^y e^{-a\eta/y} F_\nu(\eta)\, d\eta \tag{4}$$

ist. Die Reihe konvergiert wegen (1′) absolut und gleichmäßig in y, solange $e^{-a} = t > \frac{1}{2}$ bleibt, da

$$|F_\nu(y)| < C(e^a - 1)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, was wegen (4) aus (1′) und (3), d. h. aus $|F(y)| < C$ folgt. Somit ist

$$\lim_{y\to\infty} s(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \lim_{y\to\infty} F_\nu(y)$$

vorhanden und es gilt

$$s(y) \to \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s\, e^a (e^a - 1)^\nu = s \qquad (y \to \infty),$$

was mit (2) gleichbedeutend ist. Daß umgekehrt aus (2) auch (1′) folgt, entnimmt man der Gleichung (3′). Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wird abweichend von (1)

$$N = N(x) = \frac{\lg t}{\lg x} + (1-p)\frac{\lg\lg\frac{1}{x}}{\lg x}, \quad 0 < p < 1, \tag{5}$$

genommen, so ist das so gebildete A_N-Verfahren niemals konvergenzgleich. Es ist um so stärker, je kleiner p ist, und bleibt schwächer als das A-Verfahren selbst. *Die beiden Verfahren werden aber äquivalent, wenn zusätzlich noch*

$$n^p |u_n| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

vorausgesetzt wird. In der Tat ist wegen (6) und (5)

$$|f(x) - f_N(x)| < M \sum_{\nu>N} x^\nu/\nu^p < M\left\{\int_N^\infty x^\zeta \zeta^{-p}\, d\zeta + \frac{x^{[N]}}{[N]^p}\right\} =$$

$$< M(-\lg x)^{p-1} \int_{-N\lg x}^{\infty} e^{-\zeta}\zeta^{-p}\, d\zeta + o(1) =$$

$$< \frac{Mt}{(1-p)^p}(-\lg\lg 1/x)^{-p} + o(1);$$

also ist

$$f_N(x) = f(x) + o(1) \qquad (x \to 1). \tag{7}$$

Für $p = 0$ und $p = 1$ versagt diese Schlußweise. Im ersten Fall erhält man nur

$$|f(x) - f_N(x)| < M t \frac{-\lg x}{1-x},$$

so daß (7) aus (6) mit $p = 0$, d. h. aus

$$u_n = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

nur dann unmittelbar gefolgert werden kann, wenn in (5) noch vorausgesetzt wird, daß

$$t = t(x) \to 0 \qquad (x \to 1).$$

Ob (7) aber auch noch für ein konstant bleibendes t gilt, konnte ich nicht entscheiden, ebenso wie bei dem allgemeineren Fall, bei welchem

$$N(x) = \frac{1}{\lg x}\{\lg t + (1-p)\lg\lg 1/x - p\lg(-\lg\lg 1/x)\}$$

genommen und (6) mit $0 \leqq p < 1$ vorausgesetzt wird (außer wenn (6) durch $u_n = o(n^{-p})$ ersetzt wird).

Ist hingegen $p = 1$, so bleibt (7) richtig: es gilt der

Satz 2. *Ist die Reihe* $\sum u_\nu$ *A-summierbar, d. h.*

$$f(x) \to s \qquad (x \to 1), \tag{8}$$

und ist (6) *für* $p = 1$ *erfüllt, d. h.*

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty), \tag{9}$$

dann ist (1′) *mit* (1) *erfüllt, d. h. die Reihe* $\sum u_\nu$ *ist auch* A_N*-summierbar.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Littlewoodschen Satzes, nach welchem aus (8) und (9) sogar die Konvergenz der Reihe $\sum u_\nu$ folgt. Man kann diesen Satz aber auch direkt beweisen, was wegen Satz 1 einen weiteren Beweis des Littlewoodschen Satzes liefert. Sei nämlich

$$g_x(t) = f(x) - f_N(x) = \sum_{\nu > \frac{\lg t}{\lg x}} u_\nu x^\nu, \qquad g_x(0) = 0, \tag{10}$$

gesetzt; dann ist wegen (9) für $0 \leqq t' < t < 1$

$$|g_x(t) - g_x(t')| < M \sum_{\tau < \nu \leqq \tau'} \frac{x^\nu}{\nu} \qquad \left(\tau = \frac{\lg t}{\lg x},\ \tau' = \frac{\lg t'}{\lg x}\right)$$

$$< M\left\{\frac{x^{[\tau]+1}}{[\tau]+1} + \int_\tau^{\tau'} x^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta}\right\} < M\left\{\frac{xt}{1+\tau} + \int_{\tau'}^{\tau} \frac{d\zeta}{-\lg\zeta}\right\} < M\left\{\frac{xt}{1+\tau} + \lg\frac{1-t'}{1-t}\right\}.$$

Also ist ($t' = 0$)

$$|g_x(t)| < M\left\{1 + \lg \frac{1}{1-t}\right\} \tag{11}$$

und für $0 \leqq t' < t < 1$

$$\limsup_{x \to 1} |g_x(t) - g_x(t')| \leqq M \lg \frac{1-t'}{1-t}. \tag{12}$$

Außerdem ist für $\lambda > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^{\lambda\nu} = \int_0^1 t^{\lambda-1}\, d\{g_x(t)\} = g_x(1) - (\lambda-1)\int_0^1 t^{\lambda-2} g_x(t)\, dt,$$

d. h.

$$f(x) - f(x^\lambda) = (\lambda-1)\int_0^1 t^{\lambda-2} g_x(t)\, dt. \tag{13}$$

Man kann nun wegen (11) und (12) aus jeder Folge

$$g_{x_\nu}(t) \qquad (x_\nu \to 1)$$

eine Teilfolge herausgreifen, welche gegen eine für $0 \leqq t < 1$ stetige und integrierbare Funktion $g(t)$ konvergiert. Aus (8) und (13) folgt aber wegen (11), daß dann für jedes $\lambda > 1$

$$\int_0^1 t^{\lambda-2} g(t)\, dt = 0$$

ist. Also muß jede Grenzfunktion $g(t) = 0$ sein, so daß, für $0 \leqq t < 1$,

$$g_x(t) \to 0 \qquad (x \to 1)$$

gilt; hieraus folgt wegen (10) die Behauptung von Satz 2.

(Eingegangen am 5. Juni 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 223—226 (1952).

Some properties of the maximum function of a meromorphic function.

By

S. K. Bose in Lucknow (India).

1. In my previous paper [1], I have defined the maximum and minimum functions of a meromorphic function as follows:

If $f(z)=f_1(z)/P(z)$ is a meromorphic function with poles $b_1, b_2, \ldots$ and zeros $a_1, a_2, a_3, \ldots$, $P(z)$ denoting the canonical product with zeros $b_1, b_2, \ldots$, *exclude* from the plane the circles C_i and C_i' given by $|z-b_i|=\varepsilon_i$ and $|z-a_i|=\varepsilon_i'$, and let $\varepsilon_i=|b_i|^{-h}$ and $\varepsilon_i'=|a_i|^{-h'}$ where $h>\varrho_1$ and $h'>\varrho_2$, ϱ_1 and ϱ_2 being the exponent of convergence of the sequences $\{b_i\}$ and $\{a_i\}$ respectively. In the region D exterior to the circles C_i and interior and on the circle $|z|=r$, we define the *maximum function* of $f(z)$ as

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq\frac{M_1(r)}{m_2(r)}=S(r),$$

where $M_1(r)=\max_{|z|=r}|f_1(z)|$, $m_2(r)$ is the minimum modulus of $P(z)$ for $|z|=r$ and z is a point in D.

The minimum function of $f(z)$ in the region exterior to the circles C_i' and interior and on the circle $|z|=r$ is defined as

$$\min_{|z|\leq r}|f(z)|\geq\frac{m_1(r)}{M_2(r)}=s(r),$$

where $m_1(r)$ is the minimum modulus of $f_1(z)$ for $|z|=r$, $M_2(r)=\max_{|z=r}|P(z)|$ and z is a point in D

Further, I have shown that $\log^* S(r)$ is a convex function of $\log r$ where $\log S(r)$ denotes the maximum function of

(i) $\log|f(z)|$ when $f_1(z)$ is of order greater than or equal to that of $P(z)$;

(ii) $\log\frac{1}{|f(z)|}$ when $P(z)$ is of order greater than or equal to that of $f_1(z)$;

for $r>r_0$, r_0 depending on C_i for (i) and C_i' for (ii).

The object of this paper is to give some more definitions and to establish some properties of the maximum function. In Theorem IV, I have obtained a lower bound for $S'(r)$ in terms of $S(r)$ and r, where $S'(r)$ is the maximum function of the derivative of $f(z)$.

In this paper the point z, wherever it occurs, is taken in *the region D or D'* according as the circles C_i or C_i' have been excluded as defined above.

2. We have defined the order of a meromorphic function $f(z)$ to be ϱ,

$$\varrho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log^* S(r)}{\log r}$$

where $S(r)$ denotes the maximum function of $f(z)$; so it is natural to call

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log \log^* S(r)}{\log r}$$

the *lower order*.

If $\lambda = \varrho < \infty$, then we may call, as in the case of an integral function, $f(z)$ to be of *regular growth and of finite order*.

3. Theorem I. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order $\varrho (1 < \varrho < \infty)$, then*

(i) $$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ;

(ii) $$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ.

Proof: Let $S(r)$ denote the maximum function of $f(z)$ for $|z| = r$. Then

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r) - \log m_2(r)}{r^\varrho}$$

(i)
$$= \varlimsup_{r\to\infty} \left[\frac{\log M_1(r)}{r^\varrho} \left\{ 1 - \frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)} \right\} \right]$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}.$$

(ii) In this case

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r) - \log m_1(r)}{r^\varrho}$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$$

and the theorem is proved.

We should note here that the different cases that will arise in the case of integral function, which is already known, regarding $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$ will also hold, in general, in the case of meromorphic function.

4. Theorem II. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order $\varrho (1 < \varrho_1 < \varrho < \infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = 0$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1.

Proof: We have

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r) - \log m_2(r)}{r^\varrho}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}$$

$$= 0$$

for

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{r^{\varrho}}=0, \quad \text{where } \varrho_1<\varrho.$$

5. Definitions. Here we give some more definitions:

If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ, and

(i) If

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}=B$$

where B is a positive number, then $f(z)$ will be called a *meromorphic function of perfectly regular growth.*

(ii) If

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}\geq B$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}\leq D_1,$$

where D_1 is a positive number greater than B, then $f(z)$ will be called a *meromorphic function of very regular growth.*

6. Theorem III. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, and $f_1(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}<\infty;$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ and $P(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Proof:

(i) We have

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)-\log m_2(r)}{n(r,0)}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}\left\{1-\frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)}\right\}\right]$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}.$$

Now (VALIRON [2], p. 59)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}<\infty,$$

hence

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}<\infty.$$

(ii) We have

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{n(r,\infty)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)-\log m_1(r)}{n(r,\infty)}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)}{n(r,\infty)}.$$

Applying the result (VALIRON [2], p. 56)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)}{n(r,\infty)}<\infty,$$

whence

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

7. Theorem IV. *If $f(z)$ is a meromorphic function, $S(r)$ and $S'(r)$ are the maximum function of $f(z)$ and its derivative respectively, for $|z|=r$, then*

$$S'(r)\geq\frac{S(r)\log^* S(r)}{r\log r}\quad \text{for } r>r_0 \tag{1}$$

where r_0 is a number depending on the function $f(z)$, and for those functions only for which it is possible to find a value w of z such that

$$S(r)=|f(w)|.$$

Proof: I have shown [1] that $\log^* S(r)$ is a convex function of $\log r$, therefore

$$g(r)=\frac{\log^* S(r)}{\log r} \tag{2}$$

is increasing function of r for $r>r_0$. Let w be such that $|w|=r$ and $|f(w)|=S(r)$. Then

$$\begin{aligned}
S'(r)&\geq|f'(w)|\\
&=\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{f(w)-f(w-w\varepsilon)}{w\varepsilon}\right|\\
&\geq\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{S(r)-S(r-r\varepsilon)}{r\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{r^{g(r)}-(r-r\varepsilon)^{g(r-r\varepsilon)}}{r\varepsilon}\\
&\geq\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{r^{g(r)}-(r-r\varepsilon)^{g(r)}}{r\varepsilon}\\
&=g(r)\,r^{g(r)-1}\\
&=\frac{\log^* S(r)}{\log r}\cdot\frac{S(r)}{r}
\end{aligned}$$

which completes the proof of the theorem.

References.

[1] BOSE, S. K.
Maximum and Minimum Function of a Meromorphic Function. Bull. Calcutta Math. Soc. 1952.

[2] VALIRON, G.
Theory of Integral Functions. 1923.

(Eingegangen am 15. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 227—253 (1952).

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Maßzahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, daß es solche Dreiecke nicht gibt, führt FERMAT auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \tag{1}$$

ergibt sich die diophantische Gleichung

$$ab(a^2 - b^2) = \text{Quadrat}. \tag{2}$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1, 2)

$$a = a_*^2, \quad b = b_*^2 \tag{3}$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

$$a_*^4 - b_*^4 = \text{Quadrat} \tag{4}$$

bei dem die Nullstellen des Verzweigungspolynoms gleichfalls harmonisch liegen. Die Unmöglichkeit von (4) kann dahin formuliert werden, daß die mittlere Proportionale aus einer Kathete und der Hypotenuse eines „pythagoreischen Dreiecks" nicht rational sein kann. In diesem Satze ist zugleich die Aussage FERMATs über die bekannte Potenzengleichung für den Fall des Exponenten vier enthalten.

Die Aufgabe über das pythagoreische Dreieck läßt sich dahin verallgemeinern, daß Dreiecke gesucht werden, deren Inhalt das n-fache einer Quadratzahl ist, wobei n eine ganze rationale positive Zahl bedeutet, die keinen Teiler zweifach enthält. Nach der erwähnten Methode ergibt sich, daß Dreiecke nicht existieren, wenn n eine Primzahl $p \equiv 3 \pmod 8$ oder das Doppelte einer Primzahl $p \equiv 5 \pmod 8$ ist[1]). Andrerseits ist ersichtlich, daß es Werte für n gibt, die eine Lösung haben. Aus dem Harpedonapten-Dreieck mit der Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ ergibt sich der Wert

[1]) Man vgl. etwa T. NAGELL, Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre, Acta Math. 52 (1929) 93—126. Die elementar-arithmetischen Beweise werden im folgenden stets übergangen.

$n = 6$ oder, wenn man die entsprechende Verallgemeinerung von (4) heranzieht, der kleinstmögliche Wert $n = 5$. Die Transformation

$$(5) \qquad \begin{aligned} a &: b : a-b : a+b = \\ n c_1^2 &: c_2^2 : c_3^2 : c_4^2 \end{aligned}$$

führt zunächst auf ein Gleichungssystem

$$(6) \qquad \begin{aligned} n c_1^2 - c_2^2 &= c_3^2 \qquad c_4^2 - c_3^2 = 2 c_2^2 \\ n c_1^2 + c_2^2 &= c_4^2 \qquad c_4^2 + c_3^2 = 2 n c_1^2, \end{aligned}$$

bei welchem jede einzelne Gleichung in rationalen Zahlen auflösbar ist, wenn n eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ist. Ich behaupte nunmehr, daß für jedes $p \equiv 5 \pmod 8$ die Gleichungen simultan erfüllt werden können. Aus einer Tabelle, die ich vor 30 Jahren angefertigt habe, entnehme ich für die niedersten Werte von n die in (5) einzusetzenden Zahlenwerte

$$(7) \qquad \begin{array}{rrrrr} n & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 5 & 1, & 2, & 1, & 3 \\ 13 & 5, & 6, & 17, & 19 \\ 29 & 13, & 70, & 1, & 99 \\ 37 & 145, & 42, & 881, & 883. \end{array}$$

Der Nachweis läßt sich nur durch die elliptische Modulfunktion führen. Es gibt noch andere Gleichungssysteme von dieser Eigenschaft; für $p \equiv 3 \pmod 8$, $n = 2p$, oder $p \equiv -1 \pmod 8$, $n = p, 2p$.

Sobald an einem elliptischen Gebilde mit rationalen Zahlenkoeffizienten eine Lösung in rationalen Zahlen bekannt ist, lassen sich im allgemeinen unendlich viele Lösungen vermöge einer Fermatschen Kette ermitteln. Auf diese algebraischen Abhängigkeiten, in denen jede der beiden Variablen nur bis zum zweiten Grade ansteigt, gründet Euler, angeregt durch Arbeiten Fagnanos über die Teilung des Lemniskatenumfanges, die Herleitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Bezüglich des Gleichungssystems (6) läßt sich die Aussage über die rationalen Lösungen dahin verschärfen, daß bei $n = p \equiv 5 \pmod 8$ durch eine einzige Fermatsche Kette alle rationalen Lösungen erhalten werden. Eine erste Untersuchung nach dieser Richtung verdankt man Lagrange[2]). Das von ihm behandelte Beispiel rührt ebenfalls von Fermat: Alle pythagoreischen Dreiecke zu finden, bei denen die Hypotenuse und die Summe der Katheten ein Quadrat ist. Die Aufgabe führt gleichfalls auf ein elliptisches Gebilde vom harmonischen Fall

$$(8) \qquad 2u^4 - 1 = \text{Quadrat}$$

[2]) Oeuvres, t. IV, p. 377.

mit der Grundlösung $u = 1$, das uns bald wieder begegnen wird. LAGRANGE löst die Gleichung vermittels der symmetrischen FÉRMATschen Kette

$$u_1^2 u_2^2 - u_1^2 - u_2^2 - 6u_1 u_2 + 8 = 0 \tag{9}$$

vollständig auf[3]). Die Ausrechnung von (9) nach einer der Variabeln ergibt eine Gleichung

$$u^4 + 8 = \text{Quadrat}, \tag{10}$$

die mit (8) durch quadratische Transformation verknüpft ist.

Die eingangs vorgelegte Aufgabe enthält auch zwei- und mehrbasige Gleichungen, bei denen man nicht mehr mit einer einzelnen FERMATschen Kette auskommt. Bereits bei der Einschränkung der ganzen Zahl n auf eine Primzahl oder das Doppelte einer Primzahl treten bei $p \equiv 1 \pmod 8$ zweibasige Gleichungen auf ($n = 34, 41$), zu deren Behandlung die Heranziehung einer PICARDschen Modulfunktion erforderlich wird. Um die Ausweitung der Untersuchung auf mehrere Veränderliche[4]) zu vermeiden, gebe ich der vorliegenden Arbeit eine andere Wendung. Vorerst hierzu folgendes:

Die grundlegende Idee besteht darin, auf transformierbare automorphe Funktionen[5]) die von F. KLEIN an der elliptischen Modulfunktion entwickelte Stufentheorie in Anwendung zu bringen. Zu jeder vorgegebenen Stufe gibt es bestimmte Resolventen, auf die sich die Koinzidenzen der unendlich vielen Transformationskorrespondenzen vollständig und eindeutig verteilen. Diese Einsicht ergab sich bei algebraischen Untersuchungen im Gebiete zweier Veränderlicher, auf die ich durch die Beschäftigung mit den reduzierbaren ABELschen Integralen geführt wurde[6]), und legte mir den Gedanken nahe, diophantische Gleichungen durch Modulfunktionen zu lösen.

Für die elliptische Modulfunktion hat H. WEBER im Zusammenhang mit der Aufgabe, die Klasseninvarianten zu berechnen, derartige arithmetische Resolventen im dritten Band seiner Algebra betrachtet. Der Gesichtspunkt ist daselbst, möglichst einfache numerische Resultate zu erhalten. Diese Moduln eignen sich daher auch zur Einführung in das zu betretende Gebiet, und es werden sich für die lemniskatischen Fälle der elliptischen Gebilde (harmonischer und äquianharmonischer Fall), die sich naturgemäß wiederum zuerst einstellen, erste Einsichten ergeben.

[3]) loc. cit., indem $n : m = u_1$ und $s : t = u_2$ zu setzen ist.

[4]) Meine Forschungstätigkeit in dieser Richtung wurde in den Jahren 1947 bis 1950 von der Berliner Akademie unterstützt. Die vorliegende Arbeit knüpft an Untersuchungen älteren Datums an.

[5]) K. HEEGNER, Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen, Math. Z. **48** (1938) 161—204 u. 321—352; **44** (1939) 555—567.

[6]) Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt, Journ. f. reine u. angew. Math. **168** (1932), 91—105. Ferner: Diophantische Untersuchungen über reduzierbare ABELsche Integrale, Math. Z. **31** (1930), 457—480 u. 481—497.

1. Die Resultate H. Webers.

In den Untersuchungen WEBERs über die Klasseninvarianten nimmt der SCHLAEFLische Modul eine bevorzugte Stellung ein.

$$\sigma(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{2\nu-1}), \quad q = e^{i\pi\omega}. \tag{11}$$

Die Beziehung zum LEGENDREschen Modul $\varkappa$ ist

$$\varkappa\varkappa' = 4\sigma^{-12}, \qquad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}. \tag{12}$$

Die Ausrechnung nach $\varkappa^2$ bzw. $\varkappa'^2$ ergibt

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 2^6\sigma^{-24}}\right) \tag{13}$$

und schließlich die Wurzelziehung

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\sigma^{-12}} + \sqrt{1 - 8\sigma^{-12}}\right]. \tag{14}$$

Die Transformation zweiter Ordnung ist für den SCHLAEFLischen Modul durch

$$\omega' = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}, \qquad \sigma(\omega)\cdot\sigma(\omega') = \sqrt{2} \tag{15}$$

gegeben. Bewegt sich ω auf der Achse des Imaginären, so durchläuft ω' den Einheitskreis.

Unter den singulären Werten $\omega = i\sqrt{m}$ (m ganze rationale positive Zahl) betrachten wir vorerst die einfachsten Fälle.

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \omega = i\sqrt{3}, \quad \sigma^3 = 2, \quad \varkappa = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ &\text{(b)}\ \omega = i\sqrt{7}, \quad \sigma^2 = 2, \quad \varkappa = \frac{3-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{16}$$

und es gehört $\varkappa\sqrt{2}$ dem Klassenkörper der quadratischen Formen mit der Diskriminante $D = -3\cdot 2^4$ bzw. $-7\cdot 2^4$ an. Hingegen[7])

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \omega' = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad \sigma^6 = 2, \quad \varkappa = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \\ &\text{(b)}\ \omega' = \tfrac{1}{2}(3 + i\sqrt{7}), \quad \sigma = 1, \quad \varkappa = \tfrac{1}{2}(3 + i\sqrt{7}) \end{aligned} \tag{17}$$

und es ist $\varkappa$ ausdrückbar durch den imaginär-quadratischen Körper $i\sqrt{3}$ bzw. $i\sqrt{7}$ und dem Klassenkörper von $D = -48$ bzw. -7. Im folgenden finden die allgemeineren Tatsachen Verwertung:

Für $m \equiv -1 \pmod 8$ ist $\sigma^3(\omega')$ eine Einheit aus dem Klassenkörper von $D = -m$, und es ist nicht nur $\varkappa^2$, sondern auch $\varkappa$ rational ausdrückbar

[7]) Das Vorzeichen der Quadratwurzeln in (14) bestimmt man leicht aus dem Polygon für $\varkappa$.

Bei Anwendung der Substitution für σ in (15) reproduzieren sich diese Irrationalitäten bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ bzw. $i\sqrt{2}$. Aus dieser Überlegung erkennt man die Übereinstimmung des WEBERschen Satzes über $\varkappa$, $D \equiv 5 \pmod 8$, (Algebra Bd. 3, S. 507) mit der nachfolgenden Formulierung für $m \equiv 3 \pmod 8$.

durch $i\sqrt{m}$ und dem Klassenkörper von $D=-m$. Bei $m\not\equiv 0 \pmod 3$ ist bereits $\sigma(\omega')$ Einheit aus diesem Klassenkörper [Beispiel (17b)].

Für $m\equiv 3 \pmod 8$ ist $\frac{1}{2}\sigma^3(\omega)$ eine Einheit aus dem Klassenkörper von $D=-4m$ und nicht nur $\varkappa^2$, sondern auch $\varkappa\sqrt{2}$ eine Zahl aus dem Klassenkörper von $D=-16m$ [Beispiel (16a)]. Bei $m\not\equiv 0 \pmod 3$ ist bereits $\sigma(\omega)$ eine ganze Zahl aus dem Klassenkörper von $D=-4m$.

Das letztere sei an dem Beispiel $m=11$ erläutert, das noch in Abschn. 7 (123) Verwendung findet. Als irrationale Modulargleichung für den elften Transformationsgrad hat man[8])

$$\sqrt{\varkappa(\omega)\,\varkappa(11\omega)}+\sqrt{\varkappa'(\omega)\,\varkappa'(11\omega)} + 2\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\varkappa(\omega)\,\varkappa(11\omega)\,\varkappa'(\omega)\,\varkappa'(11\omega)}=1. \tag{18}$$

Für $\omega=\dfrac{-1}{i\sqrt{11}}$ ist $\varkappa(11\omega)=\varkappa'(\omega)$ und $\varkappa'(11\omega)=\varkappa(\omega)$ und daraus ergibt sich für $\sigma\left(i\sqrt{11}\right)$ zufolge (12)

$$4\sigma^{-6}+4\sigma^{-4}=1 \quad \text{oder} \quad \sigma^6-4\sigma^2-4=0. \tag{19}$$

Die Reduzibilität dieser Gleichung

$$\sigma^3-2\sigma^2+2\sigma-2=0 \tag{20}$$

ermittelt H. Weber nur auf induktivem Wege. Die Begründung dieser Reduzibilität und die Ausdehnung dieser Eigenschaften der singulären Werte auf höhere Stufen läßt sich aus dem oben erwähnten Problem in zwei Veränderlichen gewinnen.

Da bei $m\equiv -1 \pmod 8$ die Zahl 2 im imaginär-quadratischen Körper $i\sqrt{m}$ in zwei zueinander prime Idealteiler zerfällt, haben die Diskriminanten $D=-4m$ und $-m$ dieselbe Klassenzahl. Hingegen reduziert sich bei $m\equiv 3 \pmod 8$ die Klassenzahl von $D=-m$ auf den dritten Teil der Klassenzahl von $D=-4m$, so daß in diesen Fällen besonders kleine Werte erreicht werden. Um zu einer Verwendung der zugeordneten singulären Werte zu gelangen, hat man von der absoluten Invariante $j(\omega)$ auszugehen. Nach Weber sind für $\omega=i\sqrt{m}$, $m\equiv 3 \pmod 4$

$$\sqrt[3]{j(\omega')} \quad \text{und} \quad \sqrt{D(j(\omega')-12^3)}, \qquad \left(\omega'=\frac{\omega-1}{\omega+1}\right) \tag{21}$$

ganze Zahlen aus dem Klassenkörper von $D=-m$, wobei für die dreistufige Größe noch die Einschränkung $m\not\equiv 0 \pmod 3$ zu machen ist. Für $m=3 \pmod 8$ ist die kubische Gleichung in σ^8

$$\sigma^{24}-\sqrt[3]{j}\,\sigma^8-16=0 \tag{22}$$

stets irreduzibel, indem hierdurch die Verdreifachung der Klassenzahl zum Ausdruck gelangt. Setzt man

$$j=-2^6\xi^3, \qquad j-12^3=-2^6 m\eta^2, \tag{23}$$

[8]) R. Fricke, Elliptische Funktionen Bd. 2, S. 526.

so wird ein elliptisches Gebilde vom äquianharmonischen Fall

$$\xi^3 + 27 = m\,\eta^2 \tag{24}$$

erhalten. Für $D = -m$

$$m = 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163 \tag{25}$$

hat die Klassenzahl den Wert eins und ξ und η stellen die Grundlösung der diophantischen Gleichung (24) in rationalen Zahlen dar. Nach WEBER erhält man für $m \equiv 3 \pmod 8$ die ganzzahligen Werte[9])

(26a)

m	ξ	η
11	8	7
19	$3 \cdot 8$	3^3
43	$3 \cdot 80$	$3^4 \cdot 7$
67	$3 \cdot 440$	$3^3 \cdot 7 \cdot 31$
163	$3 \cdot 53360$	$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127$.

Für die erste fehlende Primzahl 59 existiert die Grundlösung

$$59 \qquad -\frac{7 \cdot 19}{2^6} \qquad \frac{283}{2^9}, \tag{26b}$$

die sich zwar nicht mehr in ganzen Zahlen darstellt. Jedoch liefert der singuläre Wert $\omega = i\sqrt{59}$ für $\xi(\omega')$ eine ganzzahlige Lösung von (24) im kubischen Klassenkörper. Nimmt man die drei konjugierten Werte zur oberen Grenze des Integrals erster Gattung von (24) und ermittelt nach dem Additionstheorem die obere Grenze der Integralsumme, so erhält man (26b). Dies konstruktive Verfahren führt zu einem allgemeineren Beweise für die Existenz der Grundlösung nur bei Erweiterung der Ergebnisse WEBERs[10]). In anderen Fällen werden wir indessen unmittelbar zum Ziel gelangen (Abschn. 4).

Zu der abbrechenden Zahlenreihe (25) bemerkt WEBER, daß die Anzahl bisher nur durch Induktion festgestellt ist[11]). Indessen werden die

[9]) Algebra Bd. 3, S. 462 u. 504. Die auffällige Zerlegbarkeit erklärt sich aus Abschn. 5 u. 10 meiner Arbeit. So ist

$$\xi = 4\zeta(\alpha\beta + 1)\left(\frac{\beta\zeta}{2\alpha} - 1\right).$$

[10]) Ein solcher Zusatz ist: Die Wurzelausdrücke

$$\sqrt[3]{(\xi + 3)} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{-\xi - 3\varepsilon} + \sqrt[3]{-\xi - 3\varepsilon^2}, \qquad (\varepsilon^3 = 1)$$

ergeben Zahlen aus dem Klassenkörper von $D = -m$ für $m \equiv 7$ bzw. $11 \pmod{12}$. Alsdann läßt sich nach Abschn. 4 der Satz beweisen:

Die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + 27 = p\,\eta^2, \qquad p \equiv 3 \pmod 4$$

hat immer eine Lösung in rationalen von Null verschiedenen Zahlen.

[11]) Algebra, Bd. 3, S. 460, Anmerkung. Ferner C. F. GAUSS, Disq. arithm., 5. Abschn. Art. 303.

Entwicklungen über Modulfunktionen, die sich an (22) anschließen, einen fast elementaren Beweis ergeben, daß mit $D=-3,\ -4,\ -8,\ -12,\ -16,\ -27,\ -28$ diese Zahlen die einzigen sind, bei denen die Klassenzahl den Wert eins erhält.

2. Reduzierbare Integrale.

Das algebraische Gebilde in (14)

$$\sqrt{\sigma^{12}+8}, \qquad \sqrt{\sigma^{12}-8} \tag{27}$$

vom Geschlechte $g=5+5+11=21$ enthält das hyperelliptische Gebilde

$$\sqrt{x^{12}-c^3} \tag{28}$$

vom Geschlechte $g=5$ ersichtlich auf dreifache Weise, nämlich für die Werte $c=2,\ -2,\ 4$. Wir untersuchen (28) auf Reduzierbarkeit. Vermöge

$$x^2=y \tag{29}$$

erhält man die Zerlegung

$$\sqrt{y^6-c^3}, \qquad \sqrt{y(y^6-c^3)}. \tag{30a, b}$$

Desgleichen wird (30a) durch

$$y^2=z \tag{31}$$

in die beiden elliptischen Gebilde

$$\sqrt{z^3-c^3}, \qquad \sqrt{z(z^3-c^3)} \tag{32a, b}$$

vom äquianharmonischen Fall zerlegt. Unter den fünf linear unabhängigen Integralen erster Gattung von (28)

$$\int \frac{x^\nu\,dx}{\sqrt{x^{12}-c^3}} \qquad \nu=0,1,2,3,4 \tag{33}$$

sind die zu (32a, b) gehörigen durch $\nu=3,\ 1$ gegeben. Ein drittes durch $\nu=2$ gegebenes Integral tritt auf, wenn (28) durch

$$x^3=u \tag{34}$$

reduziert wird. Es ergibt sich das elliptische Gebilde

$$\sqrt{u^4-c^3} \tag{35}$$

vom harmonischen Fall. Andrerseits läßt sich das hyperelliptische Gebilde vom Geschlechte $g=3$ in (30b) vermöge

$$y-\frac{c}{y}=w \tag{36}$$

in

$$\sqrt{w(w^2+3c)}, \qquad \sqrt{w(w^2+3c)(w^2+4c)} \tag{37a, b}$$

zerlegen. Das elliptische Gebilde liefert vermöge (36) und (29) das Integral erster Gattung

$$\int \frac{(x^4+c)\,dx}{\sqrt{x^{12}-c^3}}. \tag{38}$$

Daher ist das zu (35) gehörige Integral in den hyperelliptischen Integralen von (37b) enthalten. Setzt man

$$u^2 = v, \quad \text{so ist} \quad y^3 = v. \tag{39a}$$

Andrerseits wird

$$w(w^2+3c) = y^3 - \frac{c^3}{y^3} = v - \frac{c^3}{v} = t \tag{39b}$$

gesetzt und (35) geht über in

$$\sqrt{v(v^2-c^3)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{t(t^2+4c^3)}. \tag{40a, b}$$

In der Tat führt die Reduktion dritten Grades

$$t = w(w^2+3c), \qquad dt = 3(w^2+c)\,dw \tag{41}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t^2+4c^3)}} \quad \text{in} \quad 3\int \frac{dw}{\sqrt{w(w^3+3c)(w^3+4c)}} \tag{42}$$

über, und dieses Integral wird auch vermöge (36) und (29) in (33), $\nu = 2$ transformiert. Das zweite reduzierbare Integral der Reduktion dritten Grades gewinnt man durch die Substitutionen

$$w = \frac{2\sqrt{3}\,c}{w'}, \qquad t = \frac{6\sqrt{3}\,c^2}{s}. \tag{43}$$

Die erste reproduziert (37b) und an Stelle von (40b) und (41) treten

$$\sqrt{s(s^2+3^3c)}, \qquad s = \frac{w^3}{w^3+4c}. \tag{44}$$

Das zugehörige Integral erster Gattung nimmt die Gestalt

$$\int \frac{(x^4-c)\,dx}{\sqrt{x^{12}-c^3}} \tag{45}$$

an, so daß das hyperelliptische Gebilde (30b) die drei unabhängigen elliptischen Integrale (45), (38), (33), $\nu = 2$ vom harmonischen Fall enthält. In (28) treten die beiden Integrale vom äquianharmonischen Fall (33) $\nu = 1, 3$ hinzu und schließlich *ergeben sich für das algebraische Gebilde* (27) *sechs linear unabhängige elliptische Integrale vom äquianharmonischen Fall und neun linear unabhängige elliptische Integrale vom harmonischen Fall.* Die weitere Analyse ergibt noch zwei elliptische Integrale mit der komplexen Multiplikation im Körper $i\sqrt{2}$. Die restlichen vier Integrale ergeben singuläre hyperelliptische Moduln.

3. Erste Anwendungen.

Aus der Darstellung von $\varkappa$ durch σ in (14) und den Angaben über $\omega = i\sqrt{m}$, $m \equiv -1 \pmod 8$, $\not\equiv 0 \pmod 3$ ergibt sich, daß eine der beiden Quadratwurzeln in (27) für die singulären Werte $\sigma(\omega')$ im Klassenkörper von $D = -m$ aufgeht, hingegen die andere mit $-m$ zu multiplizieren ist, um diese Eigenschaft zu erlangen. Aus der arithmetischen Theorie des Gaussschen arithmetisch-geometrischen Mittels ergibt sich allgemein die Entscheidung

$$\sigma^{12} + 8 = \text{Quadrat}, \qquad -m(\sigma^{12} - 8) = \text{Quadrat} \tag{46}$$

und der Fall $m = 7$, $\sigma = 1$ bestätigt dies. Die diophantische Analyse im nächsten Abschnitt gibt indessen Gelegenheit, von diesem speziellen Fall auf den jeweils benötigten allgemeineren Fall zu schließen. Zunächst vergegenwärtigen wir uns die durch $m = 7$, $\sigma = 1$ gelösten diophantischen Gleichungen. $\sigma = 1$ ergibt für die in (28), (29), (31), (34), (39a) eingeführten Variabeln x, y, z, u, v für alle c den Wert eins. Zunächst liefert (35) die drei diophantischen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7(u^4 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad u^4 + 8 = \text{Quadrat} \\ &\text{(c)} \quad -7(u^4 - 8^2) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{47}$$

mit der Grundlösung $u = 1$. (47b) stimmt mit der Fermat-Lagrangeschen Gleichung in (10) überein. (47a und c) lassen sich durch lineare Substitution $u = 2u'$ bzw. quadratische Transformation $u^2 = 8a/b$ auf Gleichungen zurückführen, deren Verzweigungspolynom mit (8) bzw. (2) bis auf den Faktor -14 übereinstimmt. Ferner ergibt sich aus (36) und (37a) für $c = 2, -2, 4$

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7w(w^2 + 6) = \text{Quadrat}, \quad w = -1 \\ &\text{(b)} \quad w(w^2 - 6) = \text{Quadrat}, \quad w = 3 \\ &\text{(c)} \quad -7w(w^2 + 12) = \text{Quadrat}, \quad w = -3 \end{aligned} \tag{48}$$

und schließlich aus (44)

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7s(s^2 + 2 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = -\frac{1}{9} \\ &\text{(b)} \quad s(s^2 - 2 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = 3^3 \\ &\text{(c)} \quad -7s(s^2 + 4 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = -\frac{3^3}{5^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Diese *neun diophantischen Gleichungen sind innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches als voneinander verschieden anzusehen.* Andrerseits fehlt unter den auflösbaren Gleichungen, deren Koeffizienten aus den

Zahlen 2 und 3 zusammengesetzt sind, die von EULER behandelte einbasige Gleichung[12])

$$3v^4 + 1 = \text{Quadrat} \tag{50}$$

mit den Lösungen $v = 0, 1, 2$. Vermittels

$$v^2 w^2 - 4w - 12v^2 = 0 \tag{51}$$

wird diese birational transformiert in

$$w(w^2 - 12) = \text{Quadrat} \tag{52}$$

und es geht (52) aus (37a) hervor, wenn $c = -4$ gesetzt wird. Die Beziehung zwischen $\varkappa$ und σ läßt sich aber so schreiben:

$$4\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa} = \left(\frac{2}{\sqrt{\varkappa}\,\sigma^4}\right)^6 = x^6 \tag{53}$$

und die Ausrechnung nach $\varkappa$ in Abhängigkeit von x ergibt eine Gleichung (28) für $c = -4$. Nunmehr ist eine Anleihe aus der arithmetischen Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels erforderlich, daß bei $m \equiv -1 \pmod 8$ ein $\varkappa$ existiert, für das auch $\sqrt{\varkappa}$ rational ausdrückbar ist durch $i\sqrt{m}$ und den Klassenkörper von $D = -m$. Für $m = 7$, $\sigma = 1$ hat man

$$\sqrt{\varkappa} = \tfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{7}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{7}\right) \tag{54a}$$

und erhält nach (29) und (36)

$$y = -\tfrac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{7}\right), \qquad w = -3. \tag{54b}$$

Die so gefundene Lösung von (52) ist aber nicht die Grundlösung. Diese ist vielmehr $v = 1$, $w = -2$, so daß also nicht jedes Verfahren auf die Grundlösung führt. Für die anderen elliptischen Gebilde vom harmonischen Fall in (40b) und (44) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7t(t^2 - 16^2) = \text{Quadrat}, \quad t = 9 \\ &\text{(b)} \quad -7s(s^2 - 4 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = \tfrac{37}{7}. \end{aligned} \tag{55}$$

Durch $t = -16a : b$ geht (55a) wiederum in das Polynom von (2) bis auf den Faktor -7 über.

Werfen wir noch einen Blick auf den äquianharmonischen Fall in (32a, b). Durch $z = 1$ werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a, b)} \quad -7(z^3 - 8) = \text{Quadrat}, \quad -7z(z^3 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(c, d)} \quad z^3 + 8 = \text{Quadrat}, \quad z(z^3 + 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(e, f)} \quad -7(z^3 - 4^3) = \text{Quadrat}, \quad -7z(z^3 - 4^3) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{56}$$

[12]) Arithmetische Schriften Bd. II, LXXXVI, S. 474—487, letztes Beispiel.

gelöst, die sich sämtlich auf die Normalform

$$(57) \qquad n(z^3+1) = \text{Quadrat}, \qquad \begin{matrix} n = 14, & -7, & 2, & 1, & 7, & -7 \\ z = -\frac{1}{2}, & -2, & \frac{1}{2}, & 2, & -\frac{1}{4}, & -4 \end{matrix}$$

zurückführen lassen. (56d) oder (57), $n=1$ ist eine viel zitierte, von EULER untersuchte Gleichung. Außer den Lösungen $z=0$ und $z=2$, die eine rationale Periodensechsteilung darstellen, hat diese keine eigentlichen Lösungen. Ferner ist zu bemerken, daß (57), $n=-7$ auf zweifache Weise durch (56b und f) gelöst wird. Indessen ergeben die Lösungswerte $z=-2$ und -4 als Grenzen des Integrals erster Gattung eine halbe Periode, so daß auch diese Gleichung einbasig ist.

Bei $m \equiv 3 \pmod 8$ gibt nur $m=3$, $\sigma^3=2$ rationale Lösungen. Setzen wir $\sigma^3=2u$, so stellt $u=1$ die Lösung dar, und die Quadratwurzeln (27) sind in der Weise anzusetzen:

$$(58a, b) \qquad 3(2u^4+1) = \text{Quadrat}, \qquad 2u^4-1 = \text{Quadrat}.$$

Die zweite Gleichung ist die FERMAT-LAGRANGEsche Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt (8). Die Produktbildung aus (58a und b) und Reduktion durch $u^2=u_*$ ergibt

$$(59) \qquad 3(4u_*^4-1) = \text{Quadrat}, \qquad u_*=1$$

und die weitere Transformation $u_*^2 = a/2b$ führt auf die Lösung von

$$(60) \qquad 6ab(a^2-b^2) = \text{Quadrat}$$

durch das Harpedonapten-Dreieck.

4. Allgemeinere Ausführungen.

Zu allgemeineren Sätzen gelangt man durch folgende Hilfsbetrachtung. Gegeben sei ein Polynom $P_4(x)$ vom vierten Grade in x, dessen Koeffizienten im Zahlkörper k liegen. Ferner seien x_0 und y_0 ein Lösungssystem der diophantischen Gleichung

$$(61) \qquad P_4(x) = y^2$$

in einem Oberkörper K von ungeradem Relativgrade h, so daß x_0 durch eine in k irreduzibele Gleichung $f_h(x)=0$ vom Grade h gegeben ist und die Zahl y_0 sich durch x_0 eindeutig als ein Polynom $f_{(h-\nu)}(x)$ mit Koeffizienten in k vom Grade $h-\nu$ darstellen läßt, wobei die ganze Zahl ν im allgemeinen $=1$, in besonderen Fällen >1 sein kann. Alsdann gilt für $h-\nu>2$ die Identität

$$(62) \qquad P_4(x) \equiv f_{(h-\nu)}^2(x) - f_h(x) \cdot f_{(h-2\nu)}(x),$$

wenn $f_{(h-2\nu)}$ ein Polynom vom Grade $h-2\nu$ bedeutet, dessen Koeffizienten in k liegen. Je nachdem $f_{(h-2\nu)}$ in k irreduzibel ist oder nicht,

erhält man eine oder mehrere Lösungen von (61) in einem Oberkörper K', dessen Relativgrad $h' < h$ ist. Da $h \equiv 1 \pmod 2$ vorausgesetzt war, gibt es auch mindestens ein $h' \equiv 1 \pmod 2$. Die Wiederholung des Verfahrens führt notwendig zu einer Lösung in k. Es ist notwendig $y \neq 0$, wenn P_4 keine Wurzel in k zu liegen hat.

Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen lehrt, daß man das Rekursionsverfahren in einen Schritt zusammenziehen kann. In der Tat: Wenn $f_{(h-\nu)}$ nicht schon vom Grade $\frac{1}{2}(h+1)$ ist, läßt sich immer ein f_* vom Grade $\frac{1}{2}(h-3)$ finden, so daß $f_* \cdot f_{(h-\nu)}$ modulo f_h sich auf ein f_{**} reduziert, dessen Grad gleich $\frac{1}{2}(h+1)$ oder kleiner ist und es gilt die Identität

$$f_*^2(x) P_4(x) \equiv f_{**}^2(x) - l(x) \cdot f_h(x), \tag{63}$$

wobei l ein Linearfaktor in x oder konstant ist. In letzterem Falle erhält man die Lösung $x = \infty$.

Von den singulären Werten hatten wir nachgewiesen, daß sie Lösungen in den Klassenkörpern für die elliptischen Gebilde von Abschn. 2 erzeugen. Wird der natürliche Rationalitätsbereich als Körper k gewählt und der Klassenkörper als Oberkörper K, so muß m auf Primzahlen $p \equiv -1 \pmod 4$ eingeschränkt werden, damit der Grad von K ungerade wird. Daß das Verfahren zu keiner trivialen Lösung führt, läßt sich ohne weitere Hilfsmittel an den elliptischen Gebilden (35) in Abschn. 2, bei denen die Polynome keine rationale Wurzel haben, allgemein feststellen. Zunächst ergibt sich für $m = p \equiv -1 \pmod 8$ die Entscheidung

$$u^4 + 8 = \text{Quadrat}, \qquad u^4 - 8 \neq \text{Quadrat}. \tag{64a, b}$$

Da nur die Gleichung (64a) in rationalen Zahlen lösbar ist, kann nur diese in allen Klassenkörpern von $D = -p$ lösbar sein. Daraus ergeben sich die Sätze:

Die diophantischen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -p(u^4 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad -p(u^4 - 8^2) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{65}$$

sind für alle Primzahlen $p \equiv -1 \pmod 8$ *in rationalen Zahlen lösbar.* Ebenso ergibt sich für $m = p \equiv 3 \pmod 8$, daß (58b) in allen Klassenkörpern von $D = -4p$ lösbar ist, und die Sätze:

Die diophantischen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad p(2u^4 + 1) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad p(4u^4 - 1) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{66}$$

sind für alle Primzahlen $p \equiv 3 \pmod 8$ *in rationalen Zahlen lösbar.* Die Sätze (65b) und (66b) sind die bereits in der Einleitung unter (7) für $n = 2p$ genannten. Der Beweis der Sätze für $n = p$ ($p \equiv 5, 7 \pmod 8$) erfordert weitere Hilfssätze über singuläre Moduln.

Als Zahlkörper k kann auch ein Unterkörper des Klassenkörpers gewählt werden, insbesondere die Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen, durch die die Klassengleichung entsprechend der Anzahl der Geschlechter des imaginär-quadratischen Zahlkörpers zerfällt. Alsdann läßt sich das konstruktive Verfahren dahin erweitern, daß man durch subtraktive Anwendung des Additionstheorems zu anderen Werten von n gelangt, in denen die diophantische Gleichung einbasig ist.

Im folgenden wird der Fall $m \equiv 3 \pmod 8$ erörtert, in welchem k und K die Klassenkörper von $D = -m$ bzw. $-4m$ sind. K ist alsdann ein kubischer Relativkörper. Indem dieser durch die allgemeine kubische Gleichung für σ^8 in (22) ersetzt wird, gelangt man zu einem Studium von Modulsystemen, das eine besondere Methode darstellt, algebraische Gebilde auf reduzierbare Integrale zu untersuchen (Abschn. 6 bis 8). Diese Entwicklungen sind um so bemerkenswerter, als sie zu einem endgültigen Resultat über die imaginär-quadratischen Körper von der Klassenzahl eins führen (Abschn. 9) und eine diophantische Methode zur Berechnung der Klasseninvarianten eröffnen (Abschn. 10).

5. Entwicklungen über Modulfunktionen.

Die kubische Gleichung für σ^8 in (22)

$$\sigma^{24} - \sqrt[3]{j}\,\sigma^8 - 16 = 0 \tag{67}$$

läßt sich durch eine solche in σ^4 ersetzen, bei der die Summe der Quadrate der Wurzeln verschwindet. Dies ergibt den Ansatz

$$\sigma^{12} + 2\zeta\,\sigma^8 + 2\zeta^2\,\sigma^4 - 4 = 0 \tag{68}$$

und die Beziehung

$$\sqrt[3]{j} = -4\zeta\,(\zeta^3 + 4). \tag{69}$$

Ebenso ergibt der Ansatz

$$\sigma^6 + 2\alpha\,\sigma^4 + 2\beta\,\sigma^2 - 2 = 0 \tag{70}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \zeta &= 2\,(\beta - \alpha^2) \\ \zeta^2 &= 2\,(\beta^2 + 2\alpha) \end{aligned} \tag{71}$$

und daraus

$$(\beta - 2\alpha^2)^2 = 2\alpha\,(\alpha^3 + 1). \tag{72}$$

Der Parameter ζ ist ein Hauptmodul der zwölften Stufe vom Index 12, die Parameter α und β stellen ein Modulsystem der 24. Stufe vom Index 48 dar. Weiterhin erkennt man, wenn (69) in die dritte Potenz erhoben wird, in ζ^3 einen Hauptmodul vierter Stufe, der die bekannte Oktaederresolvente vierten Grades darstellt. Ferner läßt sich aus (71)

ein Hauptmodul ϑ achter Stufe ableiten, indem man setzt

$$\zeta = \vartheta\beta = 2(\beta - \alpha^2) \tag{73}$$

und

$$\beta = -2\alpha^2/(\vartheta - 2)$$

in (72) einsetzt:

$$\alpha^3 = \frac{(\vartheta-2)^2}{\vartheta^2-2}, \qquad \beta^3 = -8\frac{\vartheta-2}{(\vartheta^2-2)^2}, \tag{74}$$

$$\zeta^3 = -8\frac{\vartheta^3(\vartheta-2)}{(\vartheta^2-2)^2}. \tag{75}$$

Ebenso wie $\sqrt[3]{j}$ nehmen diese Moduln bei $m \equiv 3 \pmod 8$ singuläre Werte im Klassenkörper von $D = -m$ an, während σ^2 im Klassenkörper von $D = -4m$ liegt. σ^2 ergibt sich aus der quadratischen Transformation von $\sigma^2(i\sqrt{m})$ nach (15) und ist wie $\sigma^2(i\sqrt{m})$ eine ganze Zahl. Denn es sind $\frac{1}{4}\sigma^6(i\sqrt{m})$ und $\frac{1}{8}[\sqrt{2} : \sigma(i\sqrt{m})]^6$ algebraische Einheiten (Abschn. 1). Da die Zahl 2 im Klassenkörper von $D = -m$ nur in voneinander verschiedene Idealfaktoren zerfallen kann, folgt, daß auch ζ, α, β ganze Zahlen sind. In dem Falle der Klassenzahl eins hat man unter Verwendung der Ergebnisse H. Webers:

(76)

m	α	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}\zeta$	ϑ
3	0	0	0	2
11	1	0	−1	∞
19	−1	1	1	1
43	2	1	−2	−2
67	1	2	3	3/2
163	2	7	10	10/7.

6. Der äquianharmonische Fall.

Die Betrachtung reduzierbarer Integrale in Abschn. 2 führte auf sechs elliptische Integrale vom äquianharmonischen Fall (32a, b), ($c = 2, -2, 4$). Die durch die singulären Werte im Klassenkörper von $D = -4m$ erzeugten Lösungen der zugehörigen diophantischen Gleichungen lassen sich bei $m \equiv 3 \pmod 8$ auf Lösungen im Klassenkörper von $D = -m$ vermittels des Additionstheorems nach Abschn. 4 reduzieren. Dieser Reduktionsprozeß läßt sich durch den Hauptmodul ζ oder das Modulsystem α, β allgemeingültig darstellen. Hierbei beansprucht jedes einzelne Ergebnis Interesse.

Eine erste Folgerung ergibt die Umformung von (68)

$$\sigma^4(\sigma^4 + 2\zeta)^2 = -\sigma^{12} + 8, \tag{77}$$

in die $\sigma^4 = -2/z$ zu substituieren ist:

$$z^3 + 1 = -(\zeta z - 1)^2. \tag{78}$$

Im natürlichen Rationalitätsbereich hat

$$-(z^3+1) = \text{Quadrat} \tag{79}$$

keine Lösung. Die Gleichung (78) besagt aber, daß *auch im Klassenkörper von $D=-m$ keine Lösung erhalten wird*, indem die Anwendung des Additionstheorems auf die bezüglich dieses Körpers konjugierten Werte $z=-2\sigma_i^{-4}$, $(i=1, 2, 3)$ eine volle Periode ergibt.

Die zweite Reduktionsmöglichkeit für $c=2$ in (32) läßt sich durch das Modulsystem (α, β) behandeln, wenn man σ^2 zufolge (70) durch σ^4 und σ^8 ausdrückt:

$$2\sigma^2(2\alpha\beta+1) = \sigma^8 - 2\sigma^4(2\alpha^2-\beta) + 4\alpha \tag{80}$$

und die linke Seite von (77) in das Quadrat eines Polynoms in σ^4 verwandelt:

$$[\sigma^8 - 2\sigma^4(2\alpha^2-\beta) + 4\alpha]^2(\sigma^4+2\zeta)^2 = -4(2\alpha\beta+1)^2(\sigma^{12}-8), \tag{81}$$

so daß die diophantische Gleichung

$$2z(z^3+1) = \text{Quadrat} \tag{82}$$

in $z=-2\sigma^{-4}$ eine Lösung hat. Um die gewünschte Lösung zu erhalten, ist die linke Seite von (81) vermittels (68) auf das Quadrat eines quadratischen Polynoms in σ^4 zu reduzieren. (81) stellt alsdann eine Gleichung vierten Grades in σ^4 dar, die außer (68) noch einen linearen Faktor enthält, der in z die Lösung

$$z = \frac{2(2\alpha^2-\beta)^2}{2(2\alpha\beta+1)^2-(2\alpha\zeta+1)^2} = \frac{4\alpha(\alpha^3+1)}{-8\alpha^3+1} \tag{83}$$

ergibt. (83) *stellt die Duplikatur des zu* (82) *gehörigen elliptischen Integrals dar* und die so gefundene Lösung im Klassenkörper von $D=-m$ kann allgemein nicht mehr auf die Grundlösung $z=1$ von (82) führen.

Bei den weiteren elliptischen Gebilden (32a, b), $c=4$, -2 ist das Verzweigungspolynom mit dem Faktor m bzw. $2m$ zu multiplizieren. In den allgemeinen Formeln tritt alsdann die Diskriminante der kubischen Gleichung (68)

$$D(\zeta) = -2^4(\zeta^6+10\zeta^3+27) \tag{84}$$

bzw. die von (70)

$$\begin{aligned} D(\alpha,\beta) &= 2^2(4\alpha^2\beta^2+16\alpha^3-8\beta^3-36\alpha\beta-27) \\ &= -2^2(4\alpha\beta-2\alpha^3+5)^2 - 2^3(3\alpha\beta-2\alpha^3+1)^2 \end{aligned} \tag{85}$$

als Faktor auf. Zur Herstellung solcher Formeln kann man davon ausgehen, daß das Polynom in (68) für $\sigma^4=-2$ den Wert

$$-4(\zeta^2-4\zeta+3) \tag{86}$$

annimmt, der einen Teiler der Diskriminante (84) darstellt, und gewinnt die Formel

$$(87) \qquad (\sigma^4+2)(\sigma^4+\zeta-1)^2 = -(\zeta^2-2\zeta+3)(\sigma^4-2).$$

Übt man auf diese die (68) in sich transformierenden Substitutionen

$$(88) \qquad \sigma = \varepsilon\sigma', \qquad \zeta = \varepsilon\zeta', \qquad \varepsilon^3 = 1$$

aus und multipliziert die drei Gleichungen, so erhält man

$$(89) \qquad (\sigma^{12}+8)\left[(\sigma^4+\zeta)^3-1\right]^2 = -(\zeta^6+10\zeta^3+27)(\sigma^{12}-8)$$

und durch Kombination mit (77)

$$(90) \qquad (\sigma^{12}+8)\left[(\sigma^4+\zeta)^3-1\right]^2 = (\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4(\sigma^4+2\zeta)^2.$$

Nunmehr läßt sich die Division durch $(\sigma^4+2\zeta)^2$ ausführen

$$(91) \qquad (\sigma^{12}+8)(3\sigma^8+4\zeta\sigma^4+2\zeta^2)^2 = 2^4(\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4$$

und die Multiplikation mit $\sigma^{12}+8$ ergibt links das Quadrat eines Polynoms in σ^4, das wiederum vermittels (68) zu reduzieren ist:

$$(92) \qquad \left[(\zeta^3+9)\sigma^8+6\zeta\sigma^4+4\zeta^2\right]^2 = (\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4(\sigma^{12}+8).$$

Setzt man noch $\sigma^4 = 2/z$, so läßt sich (92) in die Identität

$$(93) \qquad \begin{aligned}(\zeta^6+10\zeta^3+27)(z^3+1) \equiv{}& (\zeta^2z^2+3\zeta z+\zeta^3+9)^2\\ &-(\zeta^4z-4\zeta^3-27)(z^3-\zeta^2z^2-2\zeta z-2)\end{aligned}$$

umsetzen. Die Lösung aus dem linearen Faktor

$$(94) \qquad z = 4\zeta^{-1}+27\zeta^{-4}$$

liefert

$$(95) \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{z^3+1}} = 4\int\frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^6+10\zeta^3+27}}.$$

Zufolge (88) wird (93) durch $\zeta=\varepsilon\zeta'$, $z=\varepsilon^2z'$ in sich transformiert und die Identität läßt sich einfacher dadurch gewinnen, daß man diese zunächst für die niedersten Fälle $m=11, 19$ aufstellt, und daraus den allgemeinen Fall für den Hauptmodul ζ kombiniert.

Für das Modulsystem (α, β) läßt sich diese Methode an der zweiten Reduktionsmöglichkeit exemplifizieren. Hierzu bringt man in (92) σ^4 auf die linke Seite und drückt nach (80) σ^2 durch σ^8 und σ^4 aus. Alsdann tritt links das Quadrat des folgenden Ausdrucks

$$(96) \qquad \frac{\left[(\zeta^3+9)\sigma^8+6\zeta\sigma^4+4\zeta^2\right]\left[\sigma^8-2\sigma^4(2\alpha^2-\beta)+4\alpha\right]}{2\sigma^4(2\alpha\beta+1)}$$

auf, der durch (68) auf ein quadratisches Polynom zu reduzieren ist. Der Faktor

$$(97) \qquad 2(2\alpha\beta+1) = \sqrt{D(\zeta):D(\alpha,\beta)}$$

hebt sich sowohl aus dem Bruch (96) als auch aus der Gleichung heraus, wodurch eine wesentliche Vereinfachung im Endergebnis eintritt. Die unmittelbare Ausrechnung ist schwer durchführbar. Indessen kann man aus (96) die Dimension der Polynome in α und β leicht feststellen und gelangt unter Benutzung der niedersten Fälle $m = 11, 19, 43$ zu der Gleichung in $z = \frac{1}{2}\sigma^4$

$$(98) \qquad -\tfrac{1}{2} D(\alpha,\beta)\cdot(z^3+1) = [2g_2(\alpha,\beta)\,z^2 - 2g_4(\alpha,\beta)\,z + g_3(\alpha,\beta)]^2,$$

wobei

$$(99) \qquad \begin{aligned} g_2(\alpha,\beta) &= 2\alpha^2 - 3\beta \\ g_4(\alpha,\beta) &= \alpha - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2 \\ g_3(\alpha,\beta) &= -4\alpha^3 + 9 + 8\alpha\beta \end{aligned}$$

ist. *Die Lösung der diophantischen Gleichung*

$$(100) \qquad 2m(z^3+1) = \text{Quadrat}$$

im Klassenkörper von $D = -m$ ist alsdann

$$(101) \qquad z = [g_3^2(\alpha,\beta) + \tfrac{1}{2} D(\alpha,\beta)] : 2g_2^2(\alpha,\beta).$$

In den Fällen (32), $c = 4$ geht man zweckmäßig von der ursprünglichen kubischen Gleichung (67) in σ^8 aus. Setzt man wie in (23)

$$(102) \qquad \sqrt[3]{j} = -4\xi,$$

so ergeben die zu (86) bis (92) analogen Entwicklungen das Resultat

$$(103) \qquad [\sigma^{-8}(\sigma^{24} - 2^6)(\sigma^{24} + 2^3)]^2 = -2^6(\xi^3 + 27)\,\sigma^8(\sigma^{24} - 2^6).$$

Die Reduktion auf der linken Seite ergibt, wenn $z = -4\sigma^{-8}$ substituiert wird, die Identität

$$(104) \qquad \begin{aligned} -4(\xi^3+27)(z^3+1) \equiv{}& (3\xi z^2 + \xi^2 z + 18)^2 \\ & - (9\xi^2 z + \xi^3 + 108)(z^3 + \xi z^2 + 4). \end{aligned}$$

Die durch den linearen Faktor gegebene Lösung und (69)

$$(105) \qquad z = -\tfrac{1}{3}\xi - 12\xi^{-2}, \qquad \xi = \zeta(\zeta^3 + 4)$$

liefern

$$(106) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{-z^3-1}} = -3\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3+27}} = -12\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^6 + 10\zeta^3 + 27}}.$$

Die Deutung für die singulären Werte ist unmittelbar. *Die im Klassenkörper von $D = -m$ gefundene Lösung* (105) *der diophantischen Gleichung*

$$(107) \qquad -m(z^3+1) = \text{Quadrat}$$

ist die durch die komplexe Multiplikation des äquianharmonischen Falles gegebene kubische Transformation der in Abschn. 1, (24) *gegebenen Lösung.*

Der letzte Fall läßt sich in Analogie zu (96) bis (101) entwickeln, indem σ^4 vermöge (68) durch σ^8 und σ^{16} auszudrücken ist. Wenn $\sigma^8 = -4z_*$ gesetzt wird, erhält man die Identität

$$\begin{aligned}(108)\quad 4(\zeta^6+10\zeta^3+27)(z_*^3+1) \equiv\ & [2\zeta^2 z_*^2+\zeta(\zeta^3+6)z_*-(2\zeta^3+9)]^2 \\ & -(\zeta^4 z_*-4\zeta^3-27)[4z_*^3+z_*\zeta(\zeta^3+4)+1].\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (93) zeigt, daß *nicht nur dieselbe diophantische Gleichung*

$$(109)\qquad m(z^3+1) = \text{Quadrat}$$

gelöst wird, sondern auch dieselbe Lösung (94) *erhalten wird*, so daß die im Klassenkörper von $D=-4m$ durch $z=2\sigma^{-4}$ und $z_*=-\frac{1}{4}\sigma^8$ gegebene Zweibasigkeit bereits bei der Reduktion der Lösungen auf den Klassenkörper von $D=-m$ aufgehoben wird.

7. Der harmonische Fall.

Von den neun in Abschn. 2 gefundenen elliptischen Integralen vom harmonischen Fall gibt es nur drei, nämlich die mit dem Wert $c=4$, bei denen die gestellte Aufgabe mit dem Modulsystem (α, β) gelöst werden kann. Für die Gleichung (35) ist der in (73) definierte Hauptmodul ϑ der achten Stufe ausreichend, was im folgenden näher ausgeführt wird.

Aus (89) gewinnt man vermöge (68) unmittelbar eine Gleichung in σ^{12}

$$(110)\qquad (\sigma^{12}+8)(\tfrac{1}{2}\sigma^{12}-\zeta^3-5)^2 = -(\zeta^6+10\zeta^3+27)(\sigma^{12}-8).$$

Da $\sigma^6=2u$ zu substitutieren ist, bedürfen wir einer Gleichung in σ^6

$$(111)\qquad \sigma^{18}+2a\sigma^{12}+4b\sigma^6-8=0,$$

deren Koeffizienten sich rational durch ϑ darstellen:

$$\begin{aligned}(112)\quad a &= 4\alpha^3-6\alpha\beta-3 = (\vartheta^2-4\vartheta-2):(\vartheta^2-2) \\ b &= 2\beta^3+6\alpha\beta+3 = (3\vartheta^4-12\vartheta^3+12\vartheta^2+8\vartheta-4):(\vartheta^2-2)^2.\end{aligned}$$

Multipliziert man (110) mit $\sigma^{12}+8$, so ergibt die Reduktion des linksstehenden Quadrates durch (111)

$$(113)\qquad [(2a^2-2b-\zeta^3-1)\sigma^{12}+4(ab+1)\sigma^6-8(a+\zeta^3+5)]^2.$$

Es ist aber nach (75) und (84)

$$(114)\quad D(\zeta) = -2^4(\vartheta^2-4\vartheta+6)^2(11\vartheta^4-8\vartheta^3-12\vartheta^2+16\vartheta+12):(\vartheta^2-2)^4.$$

Der im Quadrat eingehende Faktor ist auch in (113) enthalten und fällt daher aus der Gleichung heraus:

$$\begin{aligned}(115)\quad & (-11\vartheta^4+8\vartheta^3+12\vartheta^2-16\vartheta-12)(u^4-4) \\ & = [(3\vartheta^2+4\vartheta+2)u^2+r(\vartheta)u+4(\vartheta^2-2\vartheta-2)]^2.\end{aligned}$$

Als Lösung von

$$-m(u^2+2)(u^2-2)=\text{Quadrat} \tag{116}$$

im Klassenkörper von $D=-m$ *erhält man daher*

$$u=-\frac{(\vartheta^2-2)(7\vartheta^2+8\vartheta+2)}{(\vartheta^2-2\vartheta-2)^2+4\vartheta^2(\vartheta+1)^2}. \tag{117}$$

Die rationale Funktion vierten Grades ist aus zwei quadratischen

$$u=\frac{\tau^2+2\tau-1}{\tau^2+1}, \qquad \tau=\frac{-\vartheta^2+2\vartheta+2}{2\vartheta(\vartheta+1)} \tag{118}$$

zusammengesetzt und zwar löst die erste die diophantische Gleichung

$$-u^2+2=\text{Quadrat}, \tag{119}$$

so daß (116) übergeht in

$$m(\tau^2+2\tau+3)(3\tau^2-2\tau+1)=\text{Quadrat}. \tag{120}$$

Weiterhin löst die zweite

$$\tau^2+2\tau+3=\text{Quadrat}, \tag{121}$$

so daß (116) übergeht in

$$m(11\vartheta^4-8\vartheta^3-12\vartheta^2+16\vartheta+12)=\text{Quadrat}. \tag{122}$$

Für den einfachsten Fall $m=11$ lassen sich auch die anderen elliptischen Gebilde leicht behandeln. Die Gleichung für $\sigma(i\sqrt{11})$ wurde bereits in Abschn. 1 (20) abgeleitet. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\sigma^3(i\sqrt{11})=u, \qquad \tfrac{1}{2}\sigma^4(i\sqrt{11})=z, \tag{123}$$

so besteht

$$z^3=2u^4, \qquad u\cdot\sigma(i\sqrt{11})=z=u+1, \qquad u^3-u^2-u-1=0. \tag{124}$$

Das in den letzten Abschnitten verwendete σ ist durch $\sqrt{2}:\sigma(i\sqrt{11})$ gegeben. Die Größe z in (93) stimmt daher mit der von (123) überein und nach (76) ist $\zeta=-2$. Die Spezialisierung von (93) ergibt also

$$11(z^3+1)=(4z^2-6z+1)^2. \tag{125}$$

Aus (124) ergibt sich sofort die Identität

$$11(2u^4+1)\equiv(4u^2+2u-1)^2+2(3u-5)(u^3-u^2-u-1) \tag{126}$$

und daraus die Grundlösung für das elliptische Gebilde (35), $c=-2$

$$2\cdot 5^4+3^4=11^3. \tag{127}$$

Als zweites Beispiel wählen wir das elliptische Gebilde (37a) $c=4$. Alsdann ist

$$w=\sigma^4(i\sqrt{11})-\frac{4}{\sigma^4(i\sqrt{11})}=2(u+1)-(u-1)^2 \tag{128}$$

und aus (110) und (87) ergeben sich für $\zeta = -2$ die Relationen

$$(129)\qquad \begin{aligned} &(a)\quad 11w(w^2+12) = 2^2(u+2)^2(u+4)^2 \\ &(b)\quad 11w \qquad\quad = (u+2)^2(3u+1)^2/u^4 \end{aligned}$$

und daraus durch Division und Wurzelziehung

$$(130)\qquad \sqrt{w^2+12} = 2u^2(u+4)/(3u+1) = u^2+2u-1.$$

Bereits die Lösung im Klassenkörper von $D=-44$ geht aus einer quadratischen Transformation hervor. Aus (128) und (130) erhält man geradezu

$$(131)\qquad w+\sqrt{w^2+12} = 6u \quad \text{oder} \quad w = \frac{3u^2-1}{u}$$

und vermöge (129b) die Identität

$$(132)\qquad 11u(3u^2-1) \equiv (2u^2+u+5)^2 - (4u-25)(u^3-u^2-u-1).$$

Daraus ergibt sich die Grundlösung

$$(133)\qquad 3\cdot 5^4 - 2^4 = 11\cdot 13^2.$$

8. Nochmals reduzierbare Integrale.

Die vorstehenden Abschnitte lassen eine Anwendung auf die Reduzierbarkeit der Integrale des algebraischen Gebildes

$$(134)\qquad -m\cdot D(\alpha,\beta) = \text{Quadrat}$$

zu. Nach (75) und (114) ist das Gebilde auch durch die simultanen Gleichungen

$$(135)\qquad \begin{aligned} (\vartheta-2)(\vartheta^2-2) &= \text{Kubus} \\ m(11\vartheta^4 - 8\vartheta^3 - 12\vartheta^2 + 16\vartheta + 12) &= \text{Quadrat} \end{aligned}$$

definiert und hat das Geschlecht $g=7$. In Abschn. 6 wurden in (82), (100), (107), (109) an dem Modulsystem vier Reduktionen auf elliptische Gebilde vom äquianharmonischen Fall abgeleitet, und drei Reduktionen gibt es für den harmonischen Fall. *Die zugehörigen diophantischen Gleichungen sind innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches sämtlich untereinander verschieden.* Daraus folgt, daß die zugehörigen sieben Integrale erster Gattung linear unabhängig sind und daher diese Integrale des algebraischen Gebildes vollständig repräsentieren. Das algebraische Gebilde besitzt zwar unendlich viele reduzierbare Integrale, die Koeffizienten der reduzierenden algebraischen Funktionen liegen jedoch nur bei den sieben genannten Reduktionen im natürlichen Rationalitätsbereich. Vier von den sieben Reduktionen sind unmittelbar erkennbar. In (135) kann jede der simultanen Gleichungen für sich betrachtet werden. In (95) und (106) sind die Reduktionen vierten Grades des in (134) enthaltenen hyperelliptischen Gebildes angegeben. Die drei

restlichen Reduktionen liegen verborgener, wie die nähere Darlegung der Reduktion in (99) bis (101) zeigt.

Daß (135) in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt, läßt sich auch aus dem zugehörigen GALOIS-System[13]) der 24. Stufe vom Index 288 und dem Geschlechte $g = 19$

$$x_1^4 + x_2^4 + x^4 = 0, \qquad x_1 x_2 x = 2 \tag{136}$$

ableiten. Setzt man

$$x_1^4 = -\lambda x^4, \qquad x_2^4 = (\lambda - 1) x^4, \tag{137}$$

so besteht

$$\lambda (1 - \lambda) = 16 x^{-12}, \tag{138}$$

indem λ das Doppelverhältnis und x das Quadrat des SCHLAEFLischen Moduls bedeutet. Von diesem algebraischen Gebilde wurde in Abschn. 2 gezeigt, daß es in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt. Die rechte Seite in (138) bleibt eine zwölfte Potenz, wenn links durch $(-\lambda)^3$ oder $(\lambda - 1)^3$ dividiert wird, und es ist (138) auf dreifache Weise in (136) enthalten. Wird mit $(-\lambda)^3$ multipliziert, so erhält man ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $g = 4$

$$\lambda^4 (\lambda - 1) = 16 y^{12}, \tag{139}$$

das durch $\lambda = 2 y^3/\mu$ in

$$\mu (\mu^4 + 1) = 2 y^3 \tag{140}$$

übergeht. Da links das Oktaederpolynom sechsten Grades steht, zeigt man leicht, daß (140) in elliptische Gebilde vom äquianharmonischen Fall zerfällt[14]). Da wesentlich neue Gebilde auf diesem Wege nicht erhalten werden, folgt, daß das GALOIS-System (136) in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt. Die genauere Analyse ergibt die Zerlegung in 9 bzw. 10 unabhängige Integrale der genannten Art.

9. Imaginär-quadratischer Körper von der Klassenzahl eins.

In Abschn. 5 wurde bereits festgestellt, daß α, β, ζ für die singulären Werte ganzzahlig sind. Für den Fall der Klassenzahl eins sind diese Werte durch rationale ganze Zahlen gegeben und insbesondere folgt aus (71) und (72), daß β und ζ gerade sind. Daß die Gleichung (72) nur

[13]) Hierzu R. FRICKE, elliptische Funktionen, Bd. 2, S. 532.

[14]) Unter den Integralen erster Gattung befindet sich auch das H. A. SCHWARZsche Integral

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt[3]{\mu (\mu^4 + 1)}},$$

das die konforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Oktaeders auf die Vollkugel leistet.

endlich viele ganzzahlige Lösungen haben kann, ergibt sich aus allgemeinen Sätzen der diophantischen Analysis. Im vorliegenden Falle läßt sich indessen auf elementarem Wege zeigen, daß (72) keine anderen ganzzahligen Lösungen besitzt als die in der Tabelle (76) aufgeführten, und es folgt daraus, daß *andere imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl eins als die seit langer Zeit bekannten nicht existieren.*

Nach (72) ist also zu zeigen, daß

$$2x(x^3+1) = \text{Quadrat} \tag{141}$$

außer $x = 0, -1, 1, 2$ *keine ganzzahligen Lösungen hat.* Die Annahme $2|x| = $ Quadrat führt auf

$$|x|^3 - y^2 = \pm 1. \tag{142}$$

Außer $x = 2$, $y = 3$ gibt es kein Zahlenpaar, die einen Kubus und ein Quadrat ergeben, die sich um eine Einheit unterscheiden, was seit langem bekannt sein dürfte. Das untere Vorzeichen führt auf die von EULER untersuchte Gleichung (57), $n = 1$, das obere Vorzeichen auf (79). Die zweite Möglichkeit $|x| = $ Quadrat führt auf

$$z^6 \pm 1 = 2w^2. \tag{143}$$

Daß ein zweifaches Quadrat um eins vermehrt niemals einen Kubus ergibt, ist leicht einzusehen. Für das obere Zeichen zerfällt (143) eindeutig in

$$2(z^2+1) = \text{Quadrat} \tag{144}$$

$$z^4 - z^2 + 1 = \text{Quadrat}. \tag{145}$$

Außer $z = 0, \pm 1$ hat (145) keine ganzzahligen Lösungen. Denn es gilt bei ganzzahligen u und v

$$\pm(z^2+\varepsilon) = (u+\varepsilon v)^2, \qquad \varepsilon^3 = 1. \tag{146}$$

Die Auftrennung in reelle Gleichungen ergibt

$$(2u - v)v = \pm 1, \qquad u^2 - v^2 = \pm z^2. \tag{147}$$

Das Gleichungssystem hat nur diese Lösungen:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 1, \quad z = \pm 1 \\ u &= 1, \quad v = 1, \quad z = 0. \end{aligned} \tag{148}$$

Hiermit ist der Satz in (141) bewiesen.

10. Berechnung der Klasseninvarianten.

Das Ergebnis des vorigen Abschnittes läßt sich zur Berechnung der Klasseninvarianten $j(\omega)$ verwenden. Indem die Beziehung (72) unter α und β nur sechs Lösungen in ganzen Zahlen zuläßt, andrerseits sechs singuläre Werte existieren, für die α und β ganze rationale Zahlen an-

nehmen, bedarf es bei der Berechnung nur der Verteilung der Lösungen vermittels der Diskriminante $D(\alpha, \beta)$. Indem man das von H. Weber induktiv gefundene Ergebnis über $\sigma(i\sqrt{m})$, $m = 3 \pmod 8$ hinzunimmt, gelangt man nicht nur zu einer zahlenmäßig noch einfacheren Bestimmung von m, sondern auch zu einer algebraischen Beziehung vom Geschlechte $g = 9$, die es ermöglicht, Klasseninvarianten zu ermitteln, bei denen die Klassenzahl größer als eins ist. Die zunächstliegende Aufgabe, bei der $j(\omega)$ durch eine einzige Quadratwurzel ausgedrückt werden kann, erwähnt H. Weber am Ende des 20. Abschnittes seiner Algebra, III. Im folgenden teile ich die Lösung mit. Die Verwendung des von H. Weber nur induktiv erkannten Ergebnisses wird Entschuldigung finden, wenn ich nochmals versichere, daß es sich um ein Einzelergebnis der oben erwähnten Theorie in zwei Veränderlichen handelt.

Aus (70) erhalten wir zunächst für $\sigma^2(i\sqrt{m}) = 2/\sigma^2$

$$\sigma^6(i\sqrt{m}) - 2\beta\,\sigma^4(i\sqrt{m}) - 4\alpha\,\sigma^2(i\sqrt{m}) - 4 = 0. \tag{149}$$

Wird nunmehr für $\sigma(i\sqrt{m})$ eine kubische Gleichung angesetzt:

$$\sigma^3(i\sqrt{m}) - 2\gamma\,\sigma^2(i\sqrt{m}) - 2\delta\,\sigma(i\sqrt{m}) - 2 = 0, \tag{150}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2(\gamma^2 + \delta) &= \beta, \\ 2\gamma - \delta^2 &= \alpha. \end{aligned} \tag{151}$$

Die Elimination von β und γ führt auf die Gleichung

$$(-3\alpha^2 + 2\alpha\,\delta^2 + \delta^4 + 4\delta)^2 = 8(\alpha^4 + \alpha). \tag{152}$$

Die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bilden ein Modulsystem der 48. Stufe. Das darin enthaltene Modulsystem der 16. Stufe ist dadurch definiert, daß in der Potenzengleichung

$$\sigma_1^8 + \sigma_2^8 + \sigma_3^8 = 0 \tag{153}$$

die symmetrischen Grundfunktionen von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eingeführt werden. Das hervorgehende hyperelliptische Gebilde läßt sich aus (152) herleiten, wenn

$$\alpha = x\,\delta^2 \tag{154}$$

substituiert wird:

$$[(-3x^2 + 2x + 1)\,\delta^3 + 4]^2 = 8(x^4\,\delta^6 + x) \tag{155}$$

und nach δ^3 ausgerechnet wird:

$$\delta^3 = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(3x+1) \pm \sqrt{\frac{1}{2}x(x+1)^4 - 4x^3}}. \tag{156}$$

Das so erhaltene hyperelliptische Gebilde mit dem Verzweigungspolynom

$$P = x(x+1)^4 - 8x^3 \tag{157}$$

wird in sich transformiert durch

$$x' = x^{-1} \tag{158}$$

und zerfällt daher in zwei elliptische Gebilde, indem

$$\frac{(x+1)^2}{2x} = y \tag{159}$$

unmittelbar auf die FERMAT-LAGRANGE-Gleichung

$$\sqrt{y\,(y^2-2)} \tag{160}$$

zurückführt. Das zweite Gebilde

$$\sqrt{(y-2)\,(y^2-2)} \tag{161}$$

besitzt gleichfalls komplexe Multiplikation, und zwar in $i\sqrt{2}$. Als diophantische Gleichung ist (161) von TH. PEPIN behandelt worden. Beide Gleichungen (160) und (161) sind einbasig, so daß das durch (157) definierte Gebilde vom Geschlechte $g=2$ für die Gesamtheit aller Lösungspaare, die bezüglich des natürlichen Rationalitätsbereiches zueinander konjugierte Werte eines quadratischen Zahlkörpers aufweisen, zweibasig ist. Die Basen wird man unter den rationalen Lösungen suchen. Die Vervollständigung der Tabelle (76) ergibt

(162)

m	α	γ	δ	x
11	1	1	-1	1
19	-1	0	1	-1
43	2	1	0	∞
67	1	1	1	1
163	2	3	-2	1/2.

Der Wert $x=1/2$ wird durch (158) in $x=2$ transformiert und (156), (154) ergibt $\delta=0$, $\alpha=0$, $m=3$. Zu $m=3$ gehört auch $x=0$, nur fällt $\delta=-\sqrt[3]{4}$ nicht mehr rational aus[15]). Wählt man $x=\infty$ zur unteren Grenze, die anderen Werte zur oberen Grenze der Integrale erster Gattung, so müssen unter den Integralwerten Relationen bestehen, wenn das Gebilde zweibasig sein soll. Die Umformung von (157)

$$(3x^2+1)^2 + (x^2-1)^2\,(2x-1) = 2P \tag{163}$$

bestätigt dies und man kann $x=\pm 1$ als Basislösungen wählen.

Vermittels des Additionstheorems, das man in der Weise handhaben kann, wie es EULER für diophantische Untersuchungen an elliptischen Gebilden angewendet hat, lassen sich die einfachsten quadratischen Polynome bestimmen, die die oben erwähnten Lösungspaare darstellen.

[15]) Bei $x=-1$ führt das andere Vorzeichen in (156) auf $\gamma=0$, $\delta=\sqrt[3]{3}$, $m=27$.

Zunächst ergeben sich die bezüglich (158) invarianten Umformungen von (157)

$$\begin{aligned} &2x^2(x-1)^2 + x(x+1)^2(x^2+1) = P \\ &2x^2(x+1)^2 + x(x-1)^2(x^2+4x+1) = P. \end{aligned} \tag{164}$$

Die Wurzeln der quadratischen Polynome

$$x = i, \qquad -2+\sqrt{3} \tag{165}$$

erzeugen singuläre Werte, wenn man in (156) das Vorzeichen so wählt, daß $x-2$ sich heraushebt. Man erhält

$$\delta = (1+i):\sqrt[3]{2} \quad \text{bzw.} \quad \delta = -(1+\sqrt{3}):\sqrt[3]{2}. \tag{166}$$

Für beide Wertsysteme ergibt die weitere Ausrechnung

$$\alpha = -\sqrt[3]{2}, \qquad \beta = \sqrt[3]{4}, \qquad \zeta = 0, \qquad m = 3. \tag{167}$$

Die einfachste bezüglich (158) variante Umformung von (157) ist

$$8x^2 + x(x^2-1)(x^2+4x-1) = P. \tag{168}$$

Wählt man wiederum das Vorzeichen in (156) so, daß $x-2$ sich heraushebt, so erhält man

$$\begin{aligned} x = -2+\sqrt{5}, \qquad \delta = -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \\ \gamma = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \beta = 2 \end{aligned} \tag{169}$$

und diese Werte stimmen mit den Angaben H. Webers bezüglich $m=35$ überein. Der reziproke Wert von x erzeugt sogar für beide Vorzeichen einen singulären Wert. Erstens ergibt $x = 2+\sqrt{5}$

$$m = 75, \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt[3]{5}, \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt[3]{5}, \qquad \gamma = \sqrt[3]{5}. \tag{170}$$

Indem δ eine Kubikwurzel enthält, kommt nur ein $m \equiv 0 \pmod 3$ in Frage, wodurch m eindeutig bestimmt ist. Zweitens hat man

$$m = 115, \quad \delta = -\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \gamma = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}). \tag{171}$$

Dies ergibt für $\sigma(i\sqrt{115})$ nach (150) die Gleichung

$$(\sigma-1)^3 + \sigma(\sigma-1)\sqrt{5} - 1 = 0. \tag{172}$$

In $\sigma-1$ ist diese Gleichung zu ihrer reziproken konjugiert und die Diskriminante hat den rationalen Wert -92. In dieser Weise kann man fortfahren. Aus der Gaussschen Tabelle ergeben sich folgende Fälle:

$m \not\equiv 0 \pmod 3$:	35,	91,	115,	187,	235,	403,	427
Klassenkörper:	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{13}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{17}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{13}$,	$\sqrt{61}$

(173)

$m \equiv 0 \pmod 3$:	51,	75,	99,	123,	147,	267
Klassenkörper:	$\sqrt{17}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{33}$,	$\sqrt{41}$,	$\sqrt{21}$,	$\sqrt{89}$.

(174)

Zur Ermittlung der singulären Werte dient das Kriterium, daß δ einen ganzzahligen Wert annehmen muß. In den Fällen (173) gehört δ dem Klassenkörper selbst an. Hingegen ist δ in den Fällen (174) durch eine Kubikwurzel gegeben, die aber bei Vorzeichenwechsel der Quadratwurzel denselben kubischen Körper definiert.

Im Falle $m = 147$ tritt die Besonderheit ein, daß x rational ausfällt, und der Klassenkörper durch die Quadratwurzel des hyperelliptischen Gebildes erzeugt wird:

$$(175)\quad m = 147, \quad 3x + 1 = 0, \quad \delta = \sqrt{3}\sqrt[6]{7}, \quad \alpha = -\sqrt[3]{7}, \quad \gamma = \sqrt[3]{7},$$

$$(176)\quad \sigma\left(i\,7\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{3}\left|2\sqrt[3]{7} + \sqrt[6]{\tfrac{1}{4}}\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right) + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\left(5 + \sqrt{21}\right)\right|.$$

Die Ermittlung gelang aus der SCHLAEFLischen Modulargleichung für den siebenten Transformationsgrad

$$(177)\quad \sigma^8 + \tau^8 - \sigma\tau\left(\sigma^6\tau^6 - 7\sigma^3\tau^3 + 8\right) = 0.$$

Setzt man

$$(178)\quad \sigma = \sqrt[3]{2}\varrho, \qquad \tau = \sqrt[3]{2},$$

so geht (177) über in

$$(179)\quad \begin{aligned} &\varrho^8 - 4\varrho^7 + 7\varrho^4 - 2\varrho + 1 \\ &\equiv (\varrho^2 + \varrho + 1)(\varrho^6 - 5\varrho^5 + 4\varrho^4 + \varrho^3 + 2\varrho^2 - 3\varrho + 1) = 0. \end{aligned}$$

Der Restfaktor sechsten Grades zerfällt im Klassenkörper $\sqrt{21}$:

$$(180)\quad \varrho^3 - \tfrac{5}{2}\varrho^2 + \tfrac{3}{2}\varrho - 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{21}\,\varrho(\varrho - 1)$$

und ϱ ist durch (178) mit σ in (176) verbunden.

Zur weiteren Berechnung dienen folgende Umformungen von (157)

$$(181)\quad \begin{aligned} \sqrt{13}, &\quad (x^3 - x^2 - x - 3)^2 - (x^4 - 1)(x^2 - 4x - 9) = 2P \\ \sqrt{17}, &\quad 2(x+1)^2 + (x^2+1)(x-1)(x^2 + 5x + 2) = P \\ \sqrt{33}, &\quad 2(x^2 + x + 2)^2 + (x^2+1)(x+1)(x^2 + x - 8) = P \\ \sqrt{41}, &\quad (5x^2 + 4x - 5)^2 + (x^2 - 1)(2x - 1)(x^2 - 8x - 25) = 2P \\ \sqrt{61}, &\quad 2(3x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)(x - 2)(x^2 - 12x - 25) = P \\ \sqrt{89}, &\quad x^2(5x+1)^2 + x(x+1)(2x-1)(x^2 - 9x - 2) = 2P \end{aligned}$$

Der Fall $\sqrt{13}$ führt nur auf einen ganzzahligen Wert für δ, der $m = 91$ angehört. Indessen enthält die Tabelle noch $m = 403$. Ebenso steht noch $m = 235$ mit dem Klassenkörper $\sqrt{5}$ aus. Die zugehörigen Lösungspaare lassen sich aus der Duplikatur des Integrals der Grundlösung von (160) als auch (161) herleiten. Für beide Gleichungen ist die Duplikatur durch $x = 2$, $y = 9/4$ gegeben. Indem man die rationale Periodenhalbierung von (161) und (160) heranzieht und den Integralwert um diesen

Wert vermehrt, gelangt man zu Lösungen, die die gewünschten Lösungspaare liefern.

$$\text{(182)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ y' = \frac{2(y-1)}{y-2} = 10, \qquad x^2 - 18x + 1 = 0, \qquad \sqrt{5} \\ &\text{(b)}\ y' = -\frac{2}{y} = -\frac{8}{9}, \qquad 9x^2 + 34x + 9 = 0, \qquad \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Hiermit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Die Ausrechnung von (182a) und (181), $\sqrt{17}$ füge ich noch bei.

$$\text{(183)}\quad m = 235, \qquad x = 9 + 4\sqrt{5}, \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\text{(184)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ m = 187, \qquad x = \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{17}), \qquad \delta = -\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \\ &\text{(b)}\ m = 51, \qquad x^{-1} = \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{17}), \qquad \delta^3 = \tfrac{1}{2}(-11 + 3\sqrt{17}). \end{aligned}$$

Um das Resultat für $m = 51$ mit dem von H. Weber zu identifizieren, berechnet man

$$\text{(185)}\quad \delta = \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{17})\sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}, \qquad \gamma = \sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}$$

und setzt

$$\text{(186)}\quad \sigma^3(i\sqrt{51}) = 2z, \qquad z^3 + cz^2 + dz - 1 = 0$$

und benutzt ähnliche Formeln wie in (112)

$$\text{(187)}\quad \begin{aligned} c &= -4\gamma^3 - 6\gamma\delta - 3 = -4 + \sqrt{17} \\ d &= -2\delta^3 + 6\gamma\delta + 3 = -1. \end{aligned}$$

An dem algebraischen Gebilde (152) lassen sich ungewöhnliche Eigenschaften nachweisen. Das Gebilde besitzt nach (162) sechs ganzzahlige rationale Lösungen, nach (173) sieben Lösungspaare mit ganzzahligen Werten und 14 Lösungstripel mit ganzzahligen Werten, nämlich für

$$\text{(188)}\quad \begin{aligned} m = 59,\ 83,\ 107,\ 139,\ 211,\ 283,\ 307,\ 331,\ 379,\ 499,\ 547, \\ 643,\ 883,\ 907 \end{aligned}$$

usw. Ferner habe ich bewiesen, daß das algebraische Gebilde vollständig in elliptische Gebilde mit komplexer Multiplikation in i, $i\sqrt{2}$, $i\sqrt{3}$, $i\sqrt{6}$ zerfällt, und zwar ist die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung beziehungsweise 3, 1, 3, 2.

Die vorliegende Untersuchung behandelt nur elliptische Gebilde, bei denen komplexe Multiplikation auftritt. Die arithmetische Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels führt bereits zu einem allgemeineren Resultat. Indem man zu ersten „Vollständigkeitssätzen" über Erzeugung der algebraischen Gebilde und Rationalitätsbereiche gelangt, rührt dies Ergebnis an das tiefstliegende Geheimnis der Theorie der algebraischen Funktionen.

(Eingegangen am 20. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 254—257 (1952).

A Note on Entire Functions of Perfectly Regular Growth.

By

S. M. Shah in Aligarh (India).

1. If $f(z)$ be an entire function of order ϱ and if $\log M(r) \sim T r^{\varrho}$ $(0 < T < \infty)$ then [1, pp. 10–11] $\nu(r) \sim \varrho T r^{\varrho}$ and conversely. Here $\nu(r)$ denotes the rank of the maximum term of $f(z)$ for $|z| = r$. Let $L(r)$ be a "slowly changing" function; that is $L(r) > 0$ and continuous for $r > r_0$ and $L(c r) \sim L(r)$ as $r \to \infty$, for every constant $c > 0$. In this note I compare $\log M(r)$ with a more general function $r^{\varrho} L(r)$ and obtain a result which includes the above as a special case.

In a recent paper [2, Th. 3] S. K. Bose proved that if $M^{(s)}(r) = \operatorname{Max}_{|z|=r} |f^{(s)}(z)|$ and if $\varrho < \frac{1}{2}$ then

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M^{(s)}(r)}{\nu(r) \log r} \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\nu(r) \log r} \leq 1. \tag{1}$$

In § 3 I discuss to what extent it is possible to improve (1).

2. When $0 < \varrho < \infty$, let

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{r^{\varrho} L(r)} = \left\{ \begin{matrix} T; \\ t \end{matrix} \right. \qquad \lim_{r\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \delta \end{matrix} \right. .$$

Theorem. (i) *If* $0 < t \leq T < \infty$ *then* $0 < \delta \leq \gamma < \infty$ *and conversely.*

(ii) *If* (i) *holds then*

$$\frac{1}{\varrho\, k} < \lim_{r\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{\nu(r)} < \frac{k}{\varrho} \tag{2}$$

where $x = k$ *is that root of the equation* $e T \log x = x\, t - e T$ *which lies in the interval* (e, ∞).

(iii) *If* $\log M(r) \sim T r^{\varrho} L(r)$ $(0 < T < \infty)$ *then* $\nu(r) \sim \varrho T r^{\varrho} L(r)$ *and conversely.*

Proof. (i) If $a \geq 1$, $\gamma < \infty$ then

$$\log M(r a^{1/\varrho}) \sim O(1) + \left(\int_{r_0}^{r} + \int_{r}^{r a^{1/\varrho}} \right) \frac{\nu(t)}{t}\, dt$$

$$< O(1) + (\gamma + \varepsilon) \int_{r_0}^{r} x^{\varrho - 1} L(x)\, dx + \frac{\nu(r a^{1/\varrho}) \log a}{\varrho}$$

$$\sim (\gamma + \varepsilon) \frac{r^{\varrho}}{\varrho} L(r) + \frac{\nu(r a^{1/\varrho}) \log a}{\varrho}\ ^{1}).$$

[1]) See [3] Lemma 5.

Hence [4, p. 221]

$$\varrho\, a\, T \leq \gamma + \gamma\, a \log a; \qquad \varrho\, a\, t \leq \gamma + \delta\, a \log a \tag{3}$$

which hold also when $\gamma = \infty$. Similarly we get

$$\varrho\, a\, T \geq \delta + \gamma \log a; \qquad \varrho\, a\, t \geq \delta\,(1 + \log a). \tag{4}$$

Suppose now $0 < t \leq T < \infty$. From (4) we get $\gamma < \infty$. Further $\delta > 0$. For if $\delta = 0$ we get from (3) $t \leq \gamma/\varrho\, a$ and since a is arbitrary it follows that $t = 0$. Hence we have a contradiction and so $\delta > 0$.

If $0 < \delta \leq \gamma < \infty$ then we have from (3) $T < \infty$ and from (4) $t > 0$.

(ii) Take $a = \exp((\gamma - \delta)/\gamma)$ in (4). Then

$$\gamma \leq \varrho\, T \exp\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) < \varrho\, T\, e$$

and hence from (3) $\varrho\, a\, t < \varrho\, T\, e + \delta a \log a$. Consider now the equation $e T \log x = x t - e T$. It has one and only one root in the interval (e, ∞). Let it be k. Then taking $a = k$ we get

$$\varrho\,(k t - T e) < \delta\, k \log k$$

or

$$\varrho\, T\, e \log k < \delta k \log k, \qquad \delta > \frac{\varrho\, e\, T}{k}.$$

Further, since $f(z)$ is of finite order,

$$\log M^{(q)}(r) \sim \log M(r) \tag{5}$$

and hence

$$\frac{1}{\varrho\, k} < \frac{\delta}{\gamma\, \varrho} \leq \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{\nu(r)} = \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M^{(q)}(r)}{\nu(r)} \leq \frac{\gamma}{\delta\, \varrho} < \frac{k}{\varrho}. \tag{6}$$

(iii) From (3) and (4) we get $\delta \leq \varrho\, T \leq \gamma$, $\delta \leq \varrho\, t \leq \gamma$ and hence if $\delta = \gamma$, $T = t = \gamma/\varrho$. Suppose now $T = t$, which we may take, without loss of generality, to be unity. We shall show that $\gamma = \delta$. If $0 < \eta < 1$,

$$\log M(r) \sim I(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\nu(t)}{t}\, dt$$

$$\frac{\nu(r)\, \eta\, r}{r + \eta\, r} < \int_{r}^{r + \eta r} \frac{\nu(t)}{t}\, dt = I(r + \eta\, r) - I(r)$$

$$= (r + \eta\, r)^{\varrho} L(r + \eta\, r) - r^{\varrho} L(r) + o(r^{\varrho} L(r)).$$

Hence

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} \leq \varrho(1 + \eta) + H\, \eta(1 + \eta)$$

where H is a constant. Since η is arbitrary we get

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} \leq \varrho.$$

By considering the integral $I(r)-I(r-\eta r)$ we get

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{r^{\varrho}L(r)}\geq\varrho$$

and hence

$$\nu(r)\sim\varrho\, r^{\varrho}L(r).$$

Remark. We can similarly prove the following:

(a) *If* $\gamma=0$ *then* $T=0$ *and conversely.*

(b) *If* $\delta=\infty$ *then* $t=\infty$.

(c) *If* $t=\infty$ *then* $\gamma=\infty$ *but* δ *may not be infinite.*
(See Example 1 below.)

(d) *If* $\delta=0$, $\gamma<\infty$ *then* $t=0$.

(e) *If* $t=0$ *then* $\delta=0$.

Example 1. Let

$$n_1=(10!)!,\quad n_{s+1}=n_s^4\quad(s=1,2,3,\ldots)$$

$$R_n=\begin{cases}\dfrac{n_1}{\log\log n_1}\dfrac{1}{n_1+1-n} & \text{for}\quad 1\leq n<n_1\\[2ex] \dfrac{n}{\log\log n} & \text{for}\quad n_s\leq n<\left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right]\\[2ex] 2\left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right]-\dfrac{1}{n!} & \text{for}\quad \left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right]\leq n<n_{s+1},\end{cases}$$

$$f(z)=\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{R_1R_2\ldots R_n}.$$

Then $f(z)$ is an entire function of order one for which $\gamma=\infty$, $\delta=\frac{1}{2}$, $t=T=\infty$ with respect to the comparison function r. If we take the comparison function $r\log\log r$ then $\gamma=1$, $\delta=0=t$.

3. If $f(z)$ be of any order $\varrho<\infty$ then from (5)

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M^{(s)}(r)}{\nu(r)\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\nu(r)\log r}\leq 1. \tag{7}$$

We cannot replace unity on the right hand side of (7) by any[2]) constant $c<1$, unless we impose some condition on $f(z)$. If, for instance, $f(z)$ is of very regular growth (with respect to the comparison function $r^{\varrho}L(r)$) then we have relation (6).

For functions of infinite order no result of type (1) holds. In fact given any increasing function $\Phi(x)\to\infty$ we can construct a function of infinite order for which[3])

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M^{(s)}(r)}{\Phi(r\,\nu(r))}=\infty.$$

[2]) See [5] Theorem 2.

[3]) See [5] Theorem 3 and [6] p. 35 inequality (2.13).

References.

[1] Pólya, G., u. G. Szegö.
Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Berlin 1925.

[2] Bose, S. K.
On the Maximum Modulus of an Integral Function. Bull. Calcutta Math. Soc. **43**, 25—26 (1951).

[3] Hardy, G. H., and W. W. Rogosinki.
Notes on Fourier Series (III). Quart. J. of Math. (Oxford series) **16**, 49—58 (1945).

[4] Shah, S. M.
The Maximum Term of an Entire Series (III). Quart. J. of Math. (Oxford series) **19**, 220—223 (1948).

[5] Shah, S. M.
The Maximum Term of an Entire Series (VI). J. Indian Math. Soc. **14**, 21—28 (1950).

[6] Valiron, G.
Lectures on the General Theory of Integral Functions. Toulouse 1923.

(Eingegangen am 25. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 258—260 (1952).

Über additive Zerlegungen in lauter verschiedene Glieder einer Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe.

Von

Roland Sprague in Berlin.

Herr RICHERT[1]) hat in Anwendung eines allgemeineren Satzes unter anderem die additive Zerlegbarkeit aller natürlichen Zahlen oberhalb 33 in lauter verschiedene Dreieckszahlen bewiesen. Hier wird auf dasselbe Beispiel ein anderes Verfahren angewandt, das schneller zum Ziel führt, und dann eine Verallgemeinerung gezeigt.

Es sei $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe, n eine natürliche Zahl. Gibt es zu n die Zahlen m_x und n' mit

$$\text{(A)} \qquad m_{x-1} \leq \frac{n}{2} < m_x \leq n = m_x + n', \quad x \geq 1, (m_0 = 0),$$

so heiße n' der (eindeutig bestimmte) „Nachfolger" von n, und n ein „Vorgänger" von n'.

Für die aus n und den sukzessiven Nachfolgern gebildete „Kette" $n = n^{(0)}, n', n'', \ldots$ bestehen zwei Möglichkeiten:

I. Es gibt ein $n^{(\nu)}$ mit

$$n^{(\nu)} = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_\mu}, \qquad i_1 > i_2 > \cdots > i_\mu, \qquad \mu \geq 1, \qquad \nu \geq 0.$$

Dann hat man auch für n in

$$n = (n - n') + (n' - n'') + \cdots + (n^{(\nu-1)} - n^{(\nu)}) + m_{i_1} + \cdots + m_{i_\mu}$$

eine Zerlegung in lauter verschiedene m_k, da jedes der ersten ν Glieder rechts ein m_k ist und die Summe aller folgenden Glieder übertrifft.

II. Es gibt kein solches $n^{(\nu)}$. Die Kette endet mit einer Zahl $n^* > 0$, die wegen $2m_{y-1} \leq n^* < m_y$ keinen Nachfolger hat.

Im Fall der Dreieckszahlen $m_k = \binom{k+1}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$, ist nur $n^* = 2$ möglich. Die Vorgänger von 2 sind $2 + 3 = 5$, $2 + 6 = 8$ und $2 + 10 = 12$; man erhält sie durch Addition eines der nächsthöheren m_k unter Beachtung von (A). Von den Vorgängern der Zahlen 5, 8, 12, nämlich 11, 15, 20 bzw. 18, 23 bzw. 27, 33 brauchen nur 23 und 33 betrachtet zu werden; die andern gehören wegen ihrer Zerlegbarkeit (s. unten) zu I. Dasselbe gilt aber auch für die Vorgänger von 23 und 33, nämlich 51, 59

[1]) HANS-EGON RICHERT, Über Zerlegungen in paarweise verschiedene Zahlen. Norsk mat. Tidsskr. 31, 120—122 (1949).

bzw. 69, 78. Also trifft auf jede Kette $n, n', \ldots$ mit $n > 33$ der Fall I zu, d.h.: jedes $n > 33$ ist in lauter verschiedene Dreieckszahlen zerlegbar.

$$11 = 10 + 1 \qquad 20 = 10 + 6 + 3 + 1 \qquad 59 = 55 + 3 + 1$$
$$15 = 15 \qquad 27 = 21 + 6 \qquad 69 = 66 + 3$$
$$18 = 15 + 3 \qquad 51 = 45 + 6 \qquad 78 = 78;$$

man kommt so mit 9 (statt 45) Zerlegungen aus.

Das angegebene Verfahren vereinfacht die Anwendung des folgenden Satzes:

Es sei $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe, $N \geq -1$ eine ganze Zahl. Ferner sei ein $k \geq 0$ vorhanden mit

$$(1) \qquad 2m_k - m_{k+1} \leq N < m_{k+1} \quad (m_0 = 0)$$

$$(2) \qquad 2m_l - m_{l+1} > N \quad \text{für alle} \quad l > k.$$

Sind dann die Zahlen $N+1, N+2, \ldots, N+m_{k+1}$ sämtlich darstellbar in der Form

$$(3) \qquad \sum_{\nu} a_\nu m_\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu = 0 \text{ oder } 1,$$

so ist jede natürliche Zahl oberhalb N die Summe von paarweis verschiedenen Gliedern der Folge (m_ν).

Beweis. Unter Benutzung der bei (A) definierten Nachfolgerelation braucht nur noch gezeigt zu werden, daß aus $n > N + m_{k+1}$ a) die Existenz von n', b) $n' > N$ folgt.

a) Andernfalls wäre

$$m_{x-1} \leq \frac{n}{2} < n < m_x \quad (x \geq 1),$$

also

$$2m_{x-1} - m_x < 0$$

und wegen (2)

$$x \leq k + 1;$$

das ergäbe

$$n < m_{k+1},$$
$$n \leq N + m_{k+1}$$

gegen die Annahme über n.

b) Für $N = -1$ ist nichts zu beweisen; sei $N \geq 0$. Aus $n > N + m_{k+1}$ und

$$m_{x-1} \leq \frac{n}{2} < m_x$$

sowie, nach (1),

$$m_k \leq \frac{N + m_{k+1}}{2} < m_{k+1} \leq N + m_{k+1}$$

folgt

$$x \geq k + 1.$$

Für $x = k+1$ ist

$$n' = n - m_x = n - m_{k+1} > N;$$

für $x > k+1$

$$n' = n - m_x \geq 2m_{x-1} - m_x > N$$

gemäß (2); w. z. b. w.

Bemerkungen. $N = -1$ ist zugunsten der Folge $m_\nu = 2^{\nu-1}$ einbezogen. In Herrn RICHERTs Satz wird zu (3) noch $a_\nu = 0$ für alle $\nu > k$ verlangt, statt (2) dagegen nur

(2′) $$2m_l - m_{l+1} \geq 0 \quad \text{für alle} \quad l > k$$

$\left(\text{es genügt sogar } m_{k+1} + \sum_{k+1}^{l} m_\nu - m_{l+1} \geq 0 \text{ für alle } l > k\right)$.

Bei den Quadratzahlen erfordert (2) eine längere Serie als (2′), bei den Dreiecks- und Fünfeckszahlen nicht. — Nach dem obigen Verfahren ergab sich die Zerlegbarkeit in lauter verschiedene $m_\nu = \binom{\nu+2}{3}$ für alle Zahlen oberhalb 558.

(Eingegangen am 2. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 261—270 (1952).

Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen.

Von

Claus Müller in Bonn.

Der mathematischen Behandlung elektromagnetischer Schwingungen liegt das System von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \nabla \times \mathfrak{H} + i\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{E} = 0; \qquad \nabla \times \mathfrak{E} - i\,\omega\,\mu\,\mathfrak{H} = 0 \qquad i = \sqrt{-1}$$

zugrunde, dessen Koeffizienten ε, μ und ω in dieser Arbeit positiv reell seien.

Wir betrachten ein reguläres einfach zusammenhängendes Gebiet G, das von einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche F berandet wird, und untersuchen die folgenden Fragestellungen:

I (Innenraumproblem). Gesucht ist ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das im Inneren von G den MAXWELLschen Gleichungen (1) genügt, wobei die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ auf F vorgegebene Werte annehmen.

II (Außenraumproblem). Gesucht ist ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das außerhalb G den MAXWELLschen Gleichungen (1) genügt und die Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{R\to\infty} R\,[\omega\,\varepsilon\,(\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}) - k\,\mathfrak{H}] = 0 \qquad |R\,\mathfrak{E}| \leq c$$

$$\lim_{R\to\infty} R\,[\omega\,\mu\,(\mathfrak{n}\times\mathfrak{H}) + k\,\mathfrak{E}] = 0 \qquad |R\,\mathfrak{H}| \leq c$$

erfüllt, wobei die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ auf F vorgegebene Werte annehmen.

In einer früheren Arbeit [6] gelang es, mit Hilfe der von mir aufgestellten Ausstrahlungsbedingungen die Eindeutigkeit des Außenraumproblems zu beweisen. (SAUNDERS folgerte die Eindeutigkeit später auf einem etwas modifizierten Wege [9].) Im Anschluß an den Existenzbeweis beim allgemeinen Beugungsproblem wurde als Grenzfall auch das Problem der vollkommenen Reflexion behandelt, das einen Spezialfall des hier untersuchten Außenraumproblems insofern darstellt, als nur solche Randwerte vorgeschrieben werden, die als Komponenten der elektrischen Feldstärke einfallender Felder auftreten. Diese Randwerte können auch dadurch gekennzeichnet werden, daß zu ihnen stets Lösungen des Innenraumproblems existieren.

In der vorliegenden Mitteilung gelingt mit den zur Lösung des Beugungsproblems benutzten Ansätzen auch die vollständige Behandlung der

genannten Randwertprobleme[1]). Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, die gesuchten Felder durch Flächenströme zu erzeugen. Als wesentliche Vereinfachung gegenüber dem Beugungsproblem ergibt sich hier, daß die gesuchten Felder im allgemeinen durch „magnetische Ströme" allein dargestellt werden können. Nur dann, wenn das von der Fläche F umschlossene Gebiet Eigenschwingungen zu der betrachteten Frequenz ω besitzt und das Innenraumproblem daher nicht allgemein lösbar wird, müssen zur Lösung des Außenraumproblems zusätzlich Felder benutzt werden, die durch „elektrische Ströme" erzeugt werden.

Die entsprechende Schwierigkeit bei den Randwertproblemen der Potentialtheorie wird für das Außenraumproblem bekanntlich mit Hilfe der sog. Kapazitätsmethode überwunden. Die Übertragung dieser Methode auf die skalare Wellengleichung wurde jüngst von H. Weyl unternommen [1]. Nach dem in einer früheren Mitteilung [10] gegebenen vereinfachten Verfahren wird dieser Vorgang nun auf die Randwertprobleme der elektromagnetischen Schwingungen angewandt. Diese charakteristische Methode der Theorie der Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen wird hier mit den laufend benutzten Ansätzen des Verf. in vollständiger Analogie auf die Randwertprobleme des Systems der Maxwellschen Gleichungen für zeitlich periodische Felder übertragen, so daß diese Ansätze nicht nur aus Gründen der physikalischen Anschaulichkeit, sondern auch wegen ihrer Einfachheit und Abgeschlossenheit für den vorliegenden Problemkreis als naturgemäß erscheinen dürften.

§ 1.

Die Felder von Flächenströmen.

Wir werden die zu bestimmenden Felder durch Flächenströme erzeugen. Bezeichnen wir durch (x) die Abhängigkeit von den Aufpunktskoordinaten und durch (ξ) die Abhängigkeit von den Quellpunktskoordinaten, so stellt (mit den Bezeichnungen der früheren Arbeiten [3, 6])

$$\mathfrak{E}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[i\omega\mu\,\mathfrak{j}\varphi - \mathfrak{j}'\times\nabla\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\varrho\nabla\varphi\right] dF_\xi$$

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[i\omega\varepsilon\,\mathfrak{j}'\varphi + \mathfrak{j}\times\nabla\varphi + \frac{1}{\mu}\varrho'\nabla\varphi\right] dF_\xi \tag{1.1}$$

mit

$$\varphi = \varphi(x,\xi) = r^{-1}e^{ikr}; \qquad r^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2$$

$$\nabla_F\,\mathfrak{j} = i\omega\varrho; \qquad \nabla_F\,\mathfrak{j}' = i\omega\varrho'; \qquad k = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu} > 0 \tag{1.2}$$

eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen dar, die den Ausstrahlungs-

[1]) W. K. Saunders [2], der eine Art Greenschen Tensor konstruiert, um mit dessen Hilfe die Lösung des Außenraumproblems explizit anzugeben, läßt die wesentliche Frage, die Annahme der vorgegebenen Randwerte, unberührt.

bedingungen genügt. Es sei daran erinnert, daß $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ nur Komponenten in Richtung der Tangenten an F haben und ∇ den bezüglich (ξ) angewandten ∇-Operator bezeichnet, während $\nabla_F\,\mathfrak{j}$ und $\nabla_F\,\mathfrak{j}'$ die Flächendivergenz von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ darstellen. Die Fläche F sei dreimal stetig differenzierbar. Sind die Belegungen oder „Ströme" $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ stetig differenzierbar und genügen ihre Ableitungen HÖLDER-Bedingungen, so können $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch die bekannten Grenzübergänge auf der inneren bzw. äußeren Normalen von innen bzw. außen stetig ergänzt werden. Wir bezeichnen diese Grenzwerte in verständlicher Schreibweise mit

$$\mathfrak{E}_i\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\};\qquad \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\};\qquad \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\};\qquad \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\}. \tag{1.3}$$

Stellt $\mathfrak{n}$ die ins Äußere von G weisende Flächennormale dar, so ist auf Grund der Sprungrelationen

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}\times[\mathfrak{E}_i\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\}-\mathfrak{E}_a\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\}]&=\mathfrak{j}'\\ \mathfrak{n}\times[\mathfrak{H}_i\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\}-\mathfrak{H}_a\{\mathfrak{j},\mathfrak{j}'\}]&=-\mathfrak{j}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Das HUYGHENSsche Prinzip liefert in dieser Schreibweise, wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in dem von F umschlossenen Gebiet den MAXWELLschen Gleichungen genügen,

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}_i\{-\mathfrak{n}\times\mathfrak{H}_i,\ \mathfrak{n}\times\mathfrak{E}_i\}&=\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}_i\\ \mathfrak{n}\times\mathfrak{H}_i\{-\mathfrak{n}\times\mathfrak{H}_i,\ \mathfrak{n}\times\mathfrak{E}_i\}&=\mathfrak{n}\times\mathfrak{H}_i.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Wir benötigen noch die für stetige $\mathfrak{f}(\xi)$ gültigen Beziehungen [3]

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}(x)\times\int\limits_{\overrightarrow{F_i}}(\mathfrak{f}\times\nabla\varphi)\,dF_\xi&=-2\pi\,\mathfrak{f}(x)+\int\limits_F\mathfrak{n}(x)\times\big(\mathfrak{f}(\xi)\times\nabla\varphi\big)\,dF_\xi\\ \mathfrak{n}(x)\times\int\limits_{\overrightarrow{F_a}}(\mathfrak{f}\times\nabla\varphi)\,dF_\xi&=2\pi\,\mathfrak{f}(x)+\int\limits_F\mathfrak{n}(x)\times\big(\mathfrak{f}(\xi)\times\nabla\varphi\big)\,dF_\xi,\end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei mit der hier benutzten Schreibweise gemeint ist, daß die Grenzwerte der Integrale zu bilden sind, wenn sich der Aufpunkt (x) auf der inneren bzw. äußeren Normalen der Fläche F nähert.

Wir betrachten nun die homogenen Integralgleichungen

$$\mathfrak{k}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_F\mathfrak{n}(x)\times\big(\mathfrak{k}(\xi)\times\nabla\varphi\big)\,dF_\xi \tag{1.7}$$

und

$$\mathfrak{h}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_F\mathfrak{n}(x)\times\big(\mathfrak{h}(\xi)\times\nabla\varphi\big)\,dF_\xi, \tag{1.8}$$

die wir symbolisch in der Form

$$(E+M)\,\mathfrak{k}=0;\qquad (E-M)\,\mathfrak{h}=0 \tag{1.9}$$

schreiben. Zur Diskussion der transponierten, konjugiert komplexen Gleichungen

$$\mathfrak{t}(E+\overline{M})=0;\qquad \mathfrak{s}(E-\overline{M})=0 \tag{1.10}$$

denken wir uns ein geeignetes System von Flächenkoordinaten eingeführt und setzen

$$\mathfrak{k}(x) = k^r(x)\,\mathfrak{x}_r(x); \qquad \mathfrak{t}(x) = t_j(x)\,\mathfrak{x}^j(x), \tag{1.11}$$

wo

$$\mathfrak{x}_r\,\mathfrak{x}^j = \delta_r^j \tag{1.12}$$

ist. In dieser Schreibweise lautet (1.7)

$$k^r(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \mathfrak{x}^r(x)\,[\mathfrak{n}(x)\times(\mathfrak{x}_j(\xi)\times\nabla\varphi)]\,k^j(\xi)\,dF_\xi, \tag{1.13}$$

so daß wir für das transponierte, konjugiert komplexe System

$$t_j(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \mathfrak{x}^r(\xi)\,[\mathfrak{n}(\xi)\times(\mathfrak{x}_j(x)\times\nabla'\overline{\varphi})]\,t_r(\xi)\,dF_\xi \tag{1.14}$$

erhalten. Hier bezeichnet ∇' die Anwendung des ∇-Operators bezüglich der Aufpunktskoordinaten (x), so daß

$$\nabla'\overline{\varphi} = -\nabla\overline{\varphi} \tag{1.15}$$

ist. Für (1.14) können wir daher

$$\mathfrak{t}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \nabla\overline{\varphi}\times\big(\mathfrak{n}(\xi)\times\mathfrak{t}(\xi)\big)\,dF_\xi \tag{1.16}$$

schreiben[2]). Entsprechend finden wir

$$\mathfrak{s}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_F \nabla\overline{\varphi}\times\big(\mathfrak{n}(\xi)\times\mathfrak{t}(\xi)\big)\,dF_\xi. \tag{1.17}$$

Setzen wir F als dreimal stetig differenzierbar voraus, so sind die Lösungen der Integralgleichungen (1.7), (1.8), (1.16) und (1.17) differenzierbar und ihre Ableitungen genügen HÖLDER-Bedingungen. Die Lösungsgesamtheiten der vier Gleichungen (1.9) und (1.10) bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ und erhalten

Lemma 1: *Für* $\mathfrak{k}\in\mathfrak{N}$, $\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}$; $\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}$ *gilt*

$$\mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{t}}\in\mathfrak{H}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{s}}\in\mathfrak{N}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{h}}\in\mathfrak{T}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{S},$$

wobei die so vermittelten Abbildungen umkehrbar eindeutig sind.

Da $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ bekanntlich gleiche Dimension haben, folgt somit, daß auch $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ die gleiche Dimension besitzen.

[2]) Es sei hier auf ein Versehen des Vorzeichens in [3] S. 376, Formel (27) hingewiesen, die wie (1.16) dieser Note lauten muß. Die dadurch notwendige Modifikation der Lösung des Problems der vollkommenen Reflexion ist in der hier gebrachten Lösung des Außenraumproblems enthalten.

Wir wollen die Lösungen unserer Integralgleichungen nun zu speziellen Feldern in Beziehung setzen und bemerken zunächst, daß mit den zu Beginn eingeführten Abkürzungen nach (1.6) die Gleichungen (1.7) und (1.8)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{0, \mathfrak{k}\} = 0; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = 0 \tag{1.18}$$

bedeuten. Diese Gleichungen sind äquivalent mit

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{0, \mathfrak{k}\} = \mathfrak{k}; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{h}. \tag{1.19}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt dann in Verbindung mit den Sprungrelationen (1.4)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{0, \mathfrak{k}\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{0, \mathfrak{k}\} = 0. \tag{1.20}$$

Ist andererseits $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ ein Feld, das in G den MAXWELLschen Gleichungen genügt und auf F die Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0 = 0$ erfüllt, so wird nach dem HUYGHENSschen Prinzip (1.5)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{0, \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0, \tag{1.21}$$

so daß $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0$ zu $\mathfrak{R}$ gehört. Nun ist aber nach (1.18) $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = 0$ und wir erhalten

Lemma 2: *Durch*

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$$

wird $\mathfrak{H}$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{R}$ abgebildet.

Es ist nämlich wegen (1.21) für alle $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\} \in \mathfrak{R}. \tag{1.22}$$

Wäre nun die Dimension der Gesamtheit aller $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i(\mathfrak{h}, 0)$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{R}$, die gleich der Dimension von $\mathfrak{H}$ ist, so gäbe es ein $\mathfrak{h}^*$ aus $\mathfrak{H}$ mit

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}^*, 0\} = 0. \tag{1.23}$$

Wegen

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}^*, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{h}^*, 0\} = 0 \tag{1.24}$$

folgt aber über den Eindeutigkeitssatz

$$0 = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{h}^*, 0\} = \mathfrak{h}^*, \tag{1.25}$$

so daß das durch $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\}$ vermittelte Bild von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$ liegt und die gleiche Dimension wie $\mathfrak{R}$ hat. Dies ist aber die Aussage von Lemma 2.

Mit (1.5) und (1.19) können wir jedem $\mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{R}$ umkehrbar eindeutig ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zuordnen, das in G den MAXWELLschen Gleichungen und

der Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i = 0$ genügt, wenn wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i$ setzen. Mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ besitzt aber auch $\overline{\mathfrak{E}}$, $-\overline{\mathfrak{H}}$ diese Eigenschaften und wir finden

Lemma 3: *Mit $\mathfrak{k}$ gehört auch $\overline{\mathfrak{k}}$ zu $\mathfrak{K}$, so daß jedem $\mathfrak{k}$ eindeutig ein $\mathfrak{h}$ mit*

$$\overline{\mathfrak{k}} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i \{\mathfrak{h}, 0\}$$

zugeordnet ist.

Wir beweisen nun noch

Lemma 4: *Für alle $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{H}$ ist*

$$Re \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}\, dF \leq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\mathfrak{h} = 0$ gilt.

Wir betrachten zum Beweise das Feld $\mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$, $\mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}$, das den Ausstrahlungsbedingungen genügt und wählen um einen beliebigen festen Mittelpunkt eine Schar von Kugeln mit den Radien R. Das Innere der Kugeln sei $V(R)$ und $F(R)$ die Randfläche. Ist R dann so groß, daß das von uns betrachtete Gebiet G ganz in $V(R)$ liegt, so wird unter Beachtung der Unstetigkeiten des Feldes $\mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$, $\mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}$

$$\begin{aligned} \int_{V(R)} \nabla(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}})\, dV &= \int_{V(R)} i\omega\, [\mu \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{H}} - \varepsilon \mathfrak{E} \overline{\mathfrak{E}}]\, dV \\ &= \int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\, dF + \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\, dF. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen wird daher

$$-Re \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}\, dF = \lim_{R \to \infty} \int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}})\, dF = \frac{k}{\omega \mu} \lim_{R \to 0} \int_{F(R)} |\mathfrak{E}|^2\, dF \geq 0. \tag{1.27}$$

Aus dem Gleichheitszeichen folgt hier nach der Argumentation des Eindeutigkeitssatzes [7, 8]

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a \{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a \{\mathfrak{h}, 0\} = 0 \tag{1.28}$$

und somit wegen (1.19) $\mathfrak{h} = 0$.

Es sei $\mathfrak{h}_\tau$ eine Basis von $\mathfrak{H}$. Dann ist nach Lemma 2

$$\mathfrak{k}_\tau = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\} \tag{1.29}$$

eine Basis von $\mathfrak{K}$. Mit der Basis

$$\mathfrak{t}_\tau = \mathfrak{n} \times \overline{\mathfrak{h}}_\tau \tag{1.30}$$

von $\mathfrak{T}$ bilden wir analog zur Matrix der Strahlungskapazität

$$c_{\tau\sigma} = \int_F (\overline{\mathfrak{t}}_\tau \mathfrak{k}_\sigma)\, dF = \int_F \mathfrak{h}_\tau \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\sigma, 0)\, dF. \tag{1.31}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{E}_\tau = \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\}; \qquad \mathfrak{H}_\tau = \mathfrak{H}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\}, \tag{1.32}$$

so wird mit den Bezeichnungen von (1.26) wegen (1.19)

$$(1.33)\qquad \begin{aligned} 0 &= \int\limits_{V(R)} [V(\mathfrak{E}_\iota \times \mathfrak{H}_\sigma) - V(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)]\, dV \\ &= \int\limits_{F(R)} [\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\tau \times \mathfrak{H}_\sigma) - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)]\, dF + \int\limits_{F} (\mathfrak{h}_\tau \mathfrak{E}_\sigma - \mathfrak{h}_\sigma \mathfrak{E}_\tau)\, dF. \end{aligned}$$

Auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen ist für große R

$$(1.34)\qquad \int\limits_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\tau \times \mathfrak{H}_\sigma)\, dF = \frac{k}{\omega\mu} \int\limits_{F(R)} \mathfrak{E}_\tau \mathfrak{E}_\sigma dF + o(1) = \int\limits_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)\, dF + o(1),$$

so daß wir aus (1.31) die Symmetrie der Matrix $c_{\tau\sigma}$ erhalten. Wir beweisen nun

Lemma 5: *Die Matrix $c_{\tau\sigma}$ ist nicht entartet.*

Wäre nämlich $\det|c_{\tau\sigma}| = 0$, so gäbe es ein nicht triviales $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{N}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$(1.35)\qquad 0 = \int (\bar{\mathfrak{t}}\, \bar{\mathfrak{k}}^*)\, dF = \int (\mathfrak{t}\, \bar{\mathfrak{k}}^*)\, dF$$

ist. Auf Grund von Lemma 3 gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathfrak{h}^* \in \mathfrak{H}$ mit

$$(1.36)\qquad \bar{\mathfrak{k}}^* = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}^*, 0\}.$$

Da nach Lemma 1 $\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{h}}^*$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, wäre somit

$$(1.37)\qquad \int \bar{\mathfrak{h}}^*\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}^*, 0\}\, dF = 0.$$

Daraus folgt aber nach Lemma 4 über (1.36) entgegen der Annahme $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{k}^* = 0$, so daß $\det|c_{\tau\sigma}| \neq 0$ ist.

Damit gibt es zu jedem $\mathfrak{t}^* \in \mathfrak{T}$ ein $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{N}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$(1.38)\qquad \int\limits_{F} (\mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^*)\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF = 0$$

ist.

§ 2.

Die Randwertprobleme.

Bei der Behandlung der Randwertprobleme wollen wir annehmen, daß die vorgegebenen Werte differenzierbar sind und ihre Ableitungen HÖLDER-Bedingungen genügen.

Wir wenden uns zunächst dem Innenraumproblem zu und setzen voraus, es gäbe ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das in G den MAXWELLschen Gleichungen derart genügt, daß auf F $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i = \mathfrak{g}$ ist. Mit $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ bezeichnen wir eine in G stetig differenzierbare Lösung der MAXWELLschen Gleichungen mit $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0 = 0$. Dann ist

$$(2.1)\qquad V \times V \times \mathfrak{E} = k^2\, \mathfrak{E}; \qquad V \times V \times \mathfrak{E}^0 = k^2\, \mathfrak{E}^0,$$

und wir erhalten

$$0 = \int_G [\mathfrak{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{E}^0 - \mathfrak{E}^0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{E}]\, dV$$

$$= \int_F \mathfrak{n} [\mathfrak{E}^0 \times \nabla \times \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \times \nabla \times \mathfrak{E}^0]\, dF, \tag{2.2}$$

so daß

$$0 = \int_F (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}) \cdot \nabla \times \mathfrak{E}^0 dF = -i\omega\mu \int_F (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E})\, \mathfrak{H}^0 dF \tag{2.3}$$

ist. Wegen (1.5) ist aber

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i \{-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\} = 0; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i \{-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0, \tag{2.4}$$

so daß auf Grund der Sprungrelationen (1.4)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a \left(-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\right) = 0 \tag{2.5}$$

folgt. Aus den Darstellungen (1.1) ergibt sich damit, daß $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, während aus dem Huyghensschen Prinzip die Existenz eines Feldes $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ mit $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0 = \mathfrak{k}$ für jedes $\mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{R}$ folgt. Es wird daher wegen (2.3)

$$\int_F \mathfrak{E}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0)\, dF = \int_F \mathfrak{E}\, \mathfrak{k}\, dF = 0. \tag{2.6}$$

Aus Lemma 1 folgt dann wegen $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i = \mathfrak{g}$ für alle $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$

$$\int_F \mathfrak{g}\, \bar{\mathfrak{s}}\, dF = 0, \tag{2.7}$$

so daß diese Bedingung notwendig für die Existenz einer Lösung des zugehörigen Innenraumproblems ist.

Zum Beweis der Existenz der Lösung dieses Problems setzen wir

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\{0, \mathfrak{f}\}; \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\{0, \mathfrak{f}\} \tag{2.8}$$

und erhalten nach (1.6) mit den Bezeichnungen (1.9) zur Bestimmung von $\mathfrak{f}$ die Integralgleichung

$$\tfrac{1}{2}(E - M)\, \mathfrak{f} = \mathfrak{g}. \tag{2.9}$$

Hinreichend für die Existenz einer Lösung ist, daß für alle $\mathfrak{s}$ mit

$$\mathfrak{s}\,(E - \overline{M}) = 0 \tag{2.10}$$

$$\int_F \bar{\mathfrak{s}}\, \mathfrak{g}\, dF = 0 \tag{2.11}$$

ist. Wir finden damit

Satz 1: *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung des Innenraumproblems mit* $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = \mathfrak{g}$ *ist, daß für alle* $\mathfrak{s}$ *aus* $\mathfrak{S}$

$$\int_F \mathfrak{g}\, \bar{\mathfrak{s}}\, dF = 0$$

gilt.

Zur Lösung des Außenraumproblems stellen wir die vorgegebenen Randwerte $\mathfrak{g}$ in der Form

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* + \mathfrak{t}^* \tag{2.12}$$

dar, wo $\mathfrak{t}^* \in \mathfrak{T}$ durch die Bedingungen

$$\int_F \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{t}}\,dF = \int_F \mathfrak{t}^*\,\bar{\mathfrak{t}}\,dF \quad \text{für alle } \mathfrak{t} \in \mathfrak{T} \tag{2.13}$$

eindeutig bestimmt ist. Zu diesem $\mathfrak{t}^*$ gibt es nach (1.38) ein $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{K}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$\int (\mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^*)\,\bar{\mathfrak{t}}\,dF = 0 \tag{2.14}$$

ist. Wir setzen nun

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* + \mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^* + \mathfrak{k}^* = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k}^*, \tag{2.15}$$

wobei nach (2.13) und (2.14)

$$\int_F \mathfrak{g}_0\,\bar{\mathfrak{t}}\,dF = 0 \tag{2.16}$$

ist.

Das Randwertproblem lösen wir durch den Ansatz

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\{0, \mathfrak{f}\} + \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}; \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\{0, \mathfrak{f}\} + \mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}, \tag{2.17}$$

wobei wir nach Lemma 3 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ so bestimmen können, daß

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}(\mathfrak{h}, 0) = \mathfrak{k}^* \tag{2.18}$$

ist. Die Bestimmung von $\mathfrak{f}$ führt über

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{0, \mathfrak{f}\} = \mathfrak{g} \tag{2.19}$$

nach (1.6) zu der Integralgleichung

$$-\tfrac{1}{2}(E + M)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_0, \tag{2.20}$$

die wegen (2.16) eine durch die Zusatzbedingung

$$\int_F \mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{k}}\,dF = 0 \qquad \mathfrak{k} \in \mathfrak{K} \tag{2.21}$$

eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Da diese Lösung differenzierbar ist und ihre Ableitungen HÖLDER-Bedingungen genügen, erhalten wir

Satz 2: *Das Außenraumproblem besitzt für alle* $\mathfrak{g}$ *eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Es sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß die hier vorausgesetzten Differenzierbarkeitsbedingungen für die Randwerte garantieren, daß auch die zugehörigen magnetischen Feldstärken bei Approximation an F stetig bleiben. Die Annahme der Randwerte für $\mathfrak{E}$ ist bereits gewährleistet, wenn wir von $\mathfrak{g}$ nur Stetigkeit verlangen.

Literatur.

[1] Weyl, H.
Math. Z. **55**, 187—198 (1952).
[2] Saunders, W. K.
University of California, Antenna Laboratory, Ser. 7, No. 176. 1951.
[3] Müller, Cl.
Math. Ann. **123**, 345—378 (1951).
[4] Weyl, H.
Crelle **143**, 177—202 (1913).
[5] Weyl, H.
Rend. Circ. Mat. Palermo **39**, 1—45 (1915).
[6] Müller, Cl.
Abh. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Math.-naturwiss. Kl. **1945—46**, Nr. 3.
[7] Magnus, W.
Jahresber. D.M.V. **52**, 177—185 (1942).
[8] Rellich, F.
Jahresber. D.M.V. **53**, 57—65 (1943).
[9] Saunders, W. K.
University of California, Antenna Laboratory, Ser. 7, No. 175. 1950.
[10] Müller, Cl.
Math. Z. 56, 80—83 (1952).

(Eingegangen am 5. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 271—279 (1952).

Zur Verbiegung von Flächen im Großen.

Dem Andenken St. Cohn-Vossens gewidmet.

Von

Eduard Rembs in Berlin.

Ich behandle im folgenden: 1. endliche Verbiegungen des abgeplatteten Rotationsellipsoids, 2. die eindeutige Bestimmtheit der konvexen Flächen mit geschlossenem sphärischem Bild durch das Linienelement, 3. analytische geschlossene unstarre Flächen mit „Taille" und analytische geschlossene durch das Linienelement nicht eindeutig bestimmte Flächen, 4. die bedingte Starrheit konvexer Kalotten.

1. In den Mathematischen Nachrichten [1] habe ich für das abgeplattete Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{1+k^2}+z^2=1$$

die folgende Schar von Biegungsflächen angegeben:

$$x=\sqrt{\frac{C}{\beta}}\,\frac{2V(U\cos u-U'\sin u)}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

$$y=\sqrt{\frac{C}{\beta}}\,\frac{2V(U\sin u+U'\cos u)}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

$$z=v-\frac{2VV'}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

wobei gesetzt ist

$$U=\frac{1}{\sqrt{C}}\,\mathfrak{Cof}\left(u\sqrt{C}\right),\qquad U'=\mathfrak{Sin}\left(u\sqrt{C}\right),$$

$$V=\frac{1}{\sqrt{C+1}}\cos\left(v\sqrt{C+1}\right),\qquad V'=-\sin\left(v\sqrt{C+1}\right),$$

$$\beta=(1+k^2)\,C+k^2,\qquad k_1^2=\frac{k^2}{\beta C}$$

und C den Scharparameter der Flächenschar bedeutet. Mit Benutzung der Dissertation [2] meiner Tochter konnten die Formeln für die Abwicklung auf das abgeplattete Rotationsellipsoid aufgestellt werden.

Hier werden von zwei dieser Flächen Schnitte mit der x, y- und der x, z-Ebene wiedergegeben; k ist gleich 2 gewählt.

Die erstere ergibt sich durch den Grenzübergang $C\to 0$:

$$x=\frac{2k\cos u\cos v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v},$$

$$y=\frac{2k\sin u\cos v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v},$$

$$z=v+\frac{k^2\sin 2v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v}.$$

Mit $-\infty \leq u \leq +\infty$, $-\frac{\pi}{2\sqrt{C+1}} \leq v \leq +\frac{\pi}{2\sqrt{C+1}}$ erhält man eine Fläche, die isometrisch einem ganzen Rotationsellipsoid entspricht. Ein Äquatorstück von der Länge π — die halbe Rotationsachse ist 1 — erscheint zu einer geraden, auf der Fläche natürlich singulären Strecke ausgezogen.

Die Fläche stellt das Endresultat einer Verbiegung des abgeplatteten Rotationsellipsoids mit Geradstreckung eines Äquatorbogens dar; im Gegensatz dazu kann man nach [2] beim verlängerten Rotationsellipsoid diese Verbiegung so weit treiben, bis die gerade Strecke dem halben

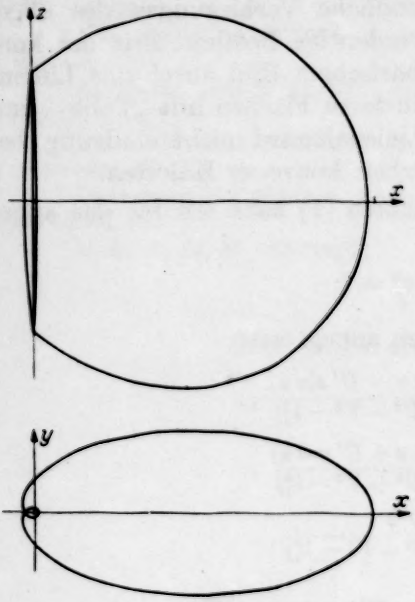


Fig. 1.

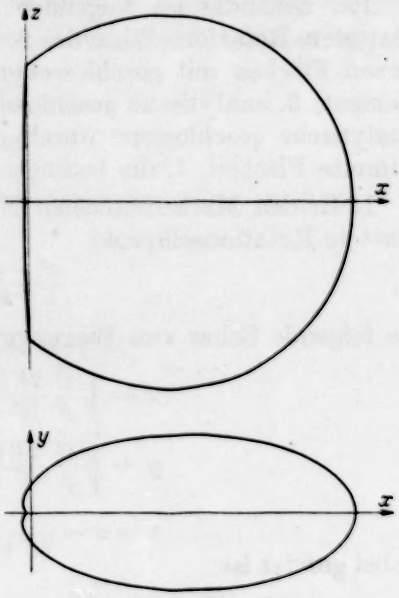


Fig. 2.

Äquator gleich ist, wobei dann natürlich auch die zweite Äquatorhälfte mit dieser geraden Strecke zusammenfällt. Die Grenzfläche war in diesem Fall schon von BIANCHI gefunden worden, während sie für das abgeplattete Ellipsoid erstmals in [1] angegeben wird. Daß die Verbiegung beim abgeplatteten Ellipsoid mit der dargestellten Fläche zum Abschluß kommt, wenn die Fläche als Ganzes erhalten bleiben soll, hat natürlich einen einfachen Grund. Hier ist ein Äquatorbogen, der auch nur wenig größer als π wäre, nicht mehr kürzeste Verbindung seiner Endpunkte auf der Ellipsoidoberfläche.

Man lasse nun in unseren ersten Formeln C kleiner als 0 werden, doch so, daß immer noch $\beta > 0$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß man auch dann noch reelle Flächen erhält. An Stelle der hyperbolischen treten dabei auch für den Parameter u trigonometrische Funktionen. Aber alle diese Flächen haben Rückkehrkanten, und ein durch zwei Rückkehrkanten begrenztes, sonst reguläres Flächenstück entspricht isometrisch nicht mehr dem ganzen Ellipsoid und ist mit einer Aus-

nahme offen. In Fig. 2 ist der Ausnahmefall dargestellt. Der zugehörige Wert von C ist $-\frac{1}{9}$; wegen $\beta > 0$ ist für die Existenz eines solchen Flächenstückes also stets $k^2 > \frac{1}{8}$ vorausgesetzt. Man braucht hier nur die Parameterwerte $|u| \leq \frac{3\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Die Rückkehrkante $u = \pm\frac{3\pi}{2}$ erscheint im Schnitt mit der x, y-Ebene als Spitze. Mittels der Abwicklungsformeln von [1] kann genau das symmetrisch zu einem gewissen Äquatorbogen gelegene Zweieck der Ellipsoidfläche bestimmt werden, das man herauszuschneiden hat, so daß man durch Zug an den Winkeln des Ausschnittes und Einbiegen der Ränder zu dieser geschlossenen Fläche mit Rückkehrkante gelangt.

2. Der Satz von Herglotz [3] für die eindeutige Bestimmtheit der Eiflächen durch das Linienelement gründet sich auf eine Integralformel ([4] oder [5]) für zwei isometrische Flächen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$, die folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\oint \{(\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_1)(\bar{\omega}_1 - \omega_1) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_2)(\bar{\omega}_2 - \omega_2)\} =$$
$$\int \{[\sigma_1, \bar{\omega}_1 - \omega_1] + [\sigma_2, \bar{\omega}_2 - \omega_2]\} - \int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_3)[\bar{\omega}_1 - \omega_1, \bar{\omega}_2 - \omega_2].$$

Hier sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ Tangentenvektoren an die Kurven eines rechtwinkligen Netzes auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_3$ ist Normalenvektor, es bedeuten

$$\sigma_1 = (d\,\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_1), \quad \sigma_2 = (d\,\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_2), \quad \omega_1 = (d\,\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3), \quad \omega_2 = (d\,\mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_1), \quad \omega_3 = (d\,\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2)$$

Pfaff-Cartansche Formen, runde Klammern Skalarprodukte, eckige Klammern alternierende Produkte, und die entsprechenden Größen für $\bar{\mathfrak{x}}$ sind durch einen Strich gekennzeichnet.

Der Beweis der Kongruenz isometrischer Eiflächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ folgt daraus, daß bei Anwendung der Formel auf Eiflächen, bei geeigneter Lage der Flächen zum Nullpunkt und geeigneter Wahl der Normalenrichtungen der letzte Integrand durchweg ≤ 0 sein muß, während alle Randintegrale verschwinden.

Nun seien $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ nicht Eiflächen, sondern offene konvexe Flächen mit solchen ebenen parabolischen Rändern, daß das sphärische Bild geschlossen ist. Die Starrheit dieser Flächen habe ich früher bewiesen [6]. Ich will zeigen, daß aus der Formel von Herglotz auch in Anwendung auf solche isometrischen Flächen die Kongruenz unmittelbar folgt. Hier treten zwar Randintegrale auf, aber es ergibt sich leicht, daß alle Integranden verschwinden. Es ist nämlich

$$\omega_1\, \mathfrak{a}_1 + \omega_2\, \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 \times (\omega_2\, \mathfrak{a}_1 - \omega_1\, \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_3 \times d\,\mathfrak{a}_3,$$

und das ist 0 wegen $\mathfrak{a}_3 = \text{const}$ an jedem Rande. $\bar{\omega}_1\, \mathfrak{a}_1 + \bar{\omega}_2\, \mathfrak{a}_2$ ist ferner derjenige in der Tangentialebene von $\mathfrak{x}$ gelegene Vektor, der dem Vektor $\bar{\omega}_1\, \bar{\mathfrak{a}}_1 + \bar{\omega}_2\, \bar{\mathfrak{a}}_2 = \bar{\mathfrak{a}}_3 \times d\,\bar{\mathfrak{a}}_3$ in der Isometrie entspricht. Er muß also an den Rändern der Nullvektor sein, weil auch an den Rändern der zweiten Fläche $\bar{\mathfrak{a}}_3 = \text{const}$, $\bar{\mathfrak{a}}_3 \times d\,\bar{\mathfrak{a}}_3$ der Nullvektor ist.

3. Cohn-Vossen [7] hat gezeigt, wie man aus Rotationseiflächen, die ja starr sind, durch Anbringen einer beliebig kleinen Rinne unstarre geschlossene Flächen bilden kann. Bei den erhaltenen Flächen bestand zwar noch Stetigkeit der zweiten Ableitungen, also der Krümmungen, aber nicht mehr der höheren Ableitungen. Man könnte denken, daß die Unstarrheit eine Folge dieser Unstetigkeiten wäre. Es wird daher gut sein, Beispiele geschlossener, sogar analytischer und durchweg regulärer Flächen anzugeben, die unstarr sind.

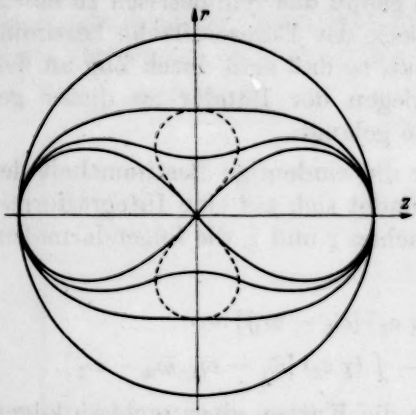


Fig. 3. Scharkurven für $c^2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, 0$; Wendepunktskurve gestrichelt.

Dazu betrachte ich die Kurvenschar

$$(r^2 + z^2)^2 + 2c^2(r^2 - z^2) = 1 - 2c^2,$$

$$\tfrac{1}{2} \geq c^2 \geq 0.$$

Für $c^2 = \frac{1}{2}$ liegt eine Lemniskate, für $c^2 = 0$ ein Kreis vor. Alle Kurven haben die Koordinatenachsen als Symmetrieachsen, für $c^2 < \frac{1}{3}$ hat man es mit Eilinien zu tun; die Kurven, die hier besonders von Interesse sind, mit $\frac{1}{2} > c^2 > \frac{1}{3}$ besitzen Wendepunkte; bei ihrer Rotation um die z-Achse erhält man Flächen „mit Taille", unter denen sich unstarre befinden, die Flächen mit $c^2 < \frac{1}{3}$ sind Eiflächen. Es sei noch bemerkt, daß die Wendepunktskurve sich einfach durch folgende Gleichungen darstellen läßt:

$$(r^2 + z^2)^2 = c^2(r^2 - z^2) = \frac{1 - 2c^2}{3}.$$

$r = r(z)$ bedeute die durch die Kurvengleichung definierte Funktion,

$$\mathfrak{x}(z, v) = (r\cos v,\ r\sin v,\ z)$$

also die zugehörige Rotationsfläche. Ich betrachte infinitesimale Verbiegungen

$$\mathfrak{x}(z, v) + t\,\mathfrak{z}(z, v)$$

von $\mathfrak{x}(z, v)$ mit

$$\mathfrak{z}(z, v) = (R_n(z)\{n\cos n v\cos v + \sin n v\sin v\},$$

$$R_n(z)\{n\cos n v\sin v - \sin n v\cos v\},\qquad nZ_n(z)\cos n v),$$

wo n eine ganze Zahl ≥ 2 bedeutet.

Die Isometriebedingung

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} = 0$$

führt zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$r' R_n' + Z_n' = 0,\qquad (n^2 - 1)\,r' R_n + r R_n' + n^2 Z_n = 0,$$

aus denen sich die Gleichung 2. Ordnung für R_n

$$r R_n'' + (n^2 - 1) r'' R_n = 0$$

ergibt. (Vgl. [7], [8], [9].)

Für das Verhalten von R_n in den Endpunkten $z = \pm 1$ unseres Intervalls, in denen die Meridiankurven auf der z-Achse senkrecht stehen, während $r = 0$ ist, findet man z. B. nach Transformation auf r als unabhängige Veränderliche, daß R_n dort Integrale besitzt, die sich wie r^{1+n} bzw. r^{1-n} verhalten. Das letztere Integral wird also dort unendlich, das erstere ist regulär.

Weiter werde nun die vorstehende Gleichung mit z als unabhängiger Veränderlicher betrachtet.

Für die Flächen mit Taille kann ich im mittleren Intervall ($r'' > 0$) ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das nicht bis zu den Wendepunkten reicht, herausgreifen und das Minimum von r''/r in Betracht ziehen. Wie klein dies Minimum auch sein möge, kann ich doch, indem ich n genügend groß wähle, erreichen, daß jedes Integral R_n dort eine Zahl von Nullstellen hat, die größer ist als jede vorgeschriebene Zahl, wie der übliche Vergleich mit der Gleichung $R_n'' + \lambda^2 R_n = 0$ ($\lambda = \text{const}$) lehrt.

In den beiden äußeren Intervallen ist $r'' < 0$. Aus der Differentialgleichung folgt: kein R_n kann dort ein positives Maximum ($R_n > 0$, $R_n'' \leq 0$) oder negatives Minimum haben, und dasselbe gilt im ganzen Intervallinneren $-1 < z < +1$, wenn als $r(z, c)$ in der Differentialgleichung eine der Eilinien $c^2 < \frac{1}{3}$ genommen wird. In einem solchen Intervall kann also R_n höchstens eine Nullstelle haben; für sie verschwindet zugleich R_n''. Auf Grund dieser Bemerkungen kann man sich den Verlauf der Integralkurven durchaus verdeutlichen.

Zum Beweis unserer Behauptung wähle man nun irgendeine Fläche mit $\frac{1}{2} > c^2 > \frac{1}{3}$ und betrachte im folgenden etwa stets ein Integral unserer Gleichung, das für $z = -1$ regulär ist. Außerdem möge n so groß gewählt sein, daß mindestens noch eine Nullstelle von R_n in $-1 < z \leq 0$ vorhanden ist[1]). Dieses n halte man fest, lasse aber c stetig abnehmen. Für genügend kleines c gibt es keine Nullstellen mehr in $-1 < z \leq 0$. Waren anfangs etwa k Nullstellen vorhanden, so betrachte man die untere Grenze der Werte c, für die k Nullstellen existieren. Für dieses c muß eine Nullstelle in $z = 0$ liegen, und wegen der Symmetrieverhältnisse ist die Fortsetzung dieser Lösung auch in $z = +1$ regulär. Damit ist für dieses c die Existenz eines Integrals erwiesen, das an beiden Rändern regulär ist, nämlich sich wie r^{1+n} verhält. Dies aber ist die einzige

[1]) Indem ich das Halbintervall betrachte, folge ich einem Vorschlag des Herrn F. Schäfke. Er bringt überdies die Differentialgleichung von vornherein auf die Gestalt

$$(1 - z^2)^2 R_n''(z, c^2) - (n^2 - 1) \varphi(z^2, c^2) R_n(z, c^2) = 0,$$

$\varphi(z^2, c^2)$ für $-1 \leq z \leq +1$ und $0 \leq c^2 < \frac{1}{2}$ regulär analytisch in z^2, c^2, $\varphi(1, c^2) = 1$

Forderung, die an R_n zu stellen ist, damit sich aus ihm eine infinitesimale Verbiegung der ganzen betreffenden Fläche ableiten läßt.

Sind noch weitere Nullstellen in $-1<z<0$, so kann man durch Anwendung derselben Schlußweise die Existenz weiterer, zu kleineren c gehöriger infinitesimal verbiegbarer Flächen der Schar nachweisen. Endlich muß es auch solche c geben, für die $R_n(z)$ eine gerade Funktion von z ist. Man hat dazu nur die untere Grenze der c zu wählen, für die eine feste Zahl von Nullstellen der Ableitung $R_n'(z)$ im Halbintervall vorhanden ist. Da ferner n beliebig groß gewählt werden kann, so ergibt sich, daß in unserer Flächenschar abzählbar unendlich viele unstarre Flächen enthalten sind[2]).

Bisher wurde $\mathfrak{x}+t\,\mathfrak{z}$ als infinitesimale Verbiegung von $\mathfrak{x}$ angesehen. Statt dessen will ich nun die Flächen

$$\mathfrak{x}+t\,\mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}-t\,\mathfrak{z}$$

betrachten. Sie besitzen wegen $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z}=0$ dasselbe Linienelement

$$d\mathfrak{x}^2+t^2\,d\mathfrak{z}^2,$$

sind also isometrisch aufeinander so abgebildet, daß entsprechende Punkte zu gleichen Parameterwerten z, v gehören. Aber diese Isometrie ist keine Kongruenz. Die beiden Polpaare der Flächen entsprechen sich nämlich; wählt man aber $z=\text{const}$ so, daß dafür $R_n=0$, $r\neq 0$ ist, so folgt: $Z_n\neq 0$. Die beiden Kurven haben also in entsprechenden Punkten dieselben Werte von x_1, x_2, nämlich die der Fläche $\mathfrak{x}$, während außer für $\cos n\,v=0$ die x_3-Werte verschieden voneinander sind. Während also eine Eifläche durch ihr Linienelement eindeutig bestimmt ist, haben wir hier Paare geschlossener isometrisch aufeinander bezogener Flächen, für welche die Isometrie keine Kongruenz bedeutet; für genügend kleines t sind die Flächen natürlich auch singularitätenfrei.

Ich möchte noch auf die Kurven mit $Z_n=0$ hinweisen. Unsere Differentialgleichungen zeigen, daß zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von R_n', bei gleichem Vorzeichen von r', stets eine Nullstelle von Z_n liegen muß. Damit lassen sich mannigfach Kalotten und Zonen angeben, die infinitesimale Gleitverbiegungen gestatten. Die Frage der Verbiegbarkeit in höherer Ordnung habe ich nicht untersucht.

4. Zuletzt soll eine gelegentlich von Herrn W. Süss aufgeworfene Frage beantwortet werden. Die Frage lautet: Vorgelegt sei eine durchweg konvexe Flächenkalotte, deren Rand bei Abbildung durch parallele Normalen auf die Kugel einen Großkreis als Bildkreis hat, mit anderen Worten, deren Rand Eigenschattengrenze bei Parallelbeleuchtung ist: kann die Kalotte so verbogen werden, daß der Rand Eigenschattengrenze bleibt?

[2]) Das Ergebnis steht meines Erachtens im Widerspruch zur Dissertation des Herrn F. Rubin [10], in der die Starrheit aller geschlossenen analytischen regulären und flachpunktfreien Flächen vom Geschlecht 0 behauptet wird.

Ich behaupte, daß die Kalotte bei dieser Nebenbedingung starr ist.

Die Lichtrichtung stimme mit der 3-Achse überein. $\mathfrak{a}_3$ sei der Einheitsvektor der positiven 3-Achse. Das Normalenbild überdecke die „nördliche" Halbkugel. Für die Randelemente muß die 3. Komponente des Normalenvektors ξ gleich 0 sein: $(\xi\,\mathfrak{a}_3)=0$. Das soll sich bei der infinitesimalen Verbiegung $\mathfrak{x}\to\mathfrak{x}+t\mathfrak{z}$ nicht ändern; wenigstens kann ich dies ohne Einschränkung der Allgemeinheit fordern. Es sei $\mathfrak{y}(u,v)$ der Drehvektor der Verbiegung; dann geht ξ in $\xi+t(\mathfrak{y}\times\xi)$ über. Wir fordern also, daß die 3. Komponente von $\mathfrak{y}\times\xi$ am Rande verschwindet: $(\mathfrak{y}\;\xi\;\mathfrak{a}_3)=0$.

Ich behandle zunächst die Annahme $\mathfrak{y}=\lambda\,\mathfrak{a}_3$ am Rande. Dann ist $d\,\mathfrak{y}=d\lambda\,\mathfrak{a}_3$. Nun gilt die folgende Formel [11]

$$\oint(\mathfrak{x}\,d\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y})=2\iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,du\,dv,$$

wobei das Integral rechts über die ganze Kalotte, das linke über den Rand zu erstrecken ist. In unserm Fall verschwindet das Randintegral. Dann läßt sich aber die Starrheit ebenso wie im Fall der Eiflächen folgern, wenn man noch annimmt, daß der Nullpunkt im Innern des Lichtzylinders liegt, und zwar in dem Teil, dem die Kalotte ihre hohle Seite zukehrt.

Nunmehr nehme ich an, es sei nicht am Rande $\mathfrak{y}=\lambda\,\mathfrak{a}_3$. Dann konstruiere ich den Drehriß, indem ich alle Drehvektoren $\mathfrak{y}(u,v)$ im Nullpunkt anhefte; dieses $\mathfrak{y}(u,v)$ ist der Ortsvektor des Drehrisses. Fläche und Drehriß haben aber in entsprechenden Punkten parallele Normalen bzw. Tangentialebenen. Für die Randelemente des Drehrisses liegen ferner wegen $(\mathfrak{y}\;\xi\;\mathfrak{a}_3)=0$ der Ortsvektor, der Normalenvektor und die 3-Achse in einer Ebene, und da die Randelemente des Drehrisses zu den Ebenen dieses Büschels durch die 3-Achse normal sein müssen, so muß der Randstreifen auf einem Rotationszylinder mit der 3-Achse als Rotationsachse liegen. Die Weingartensche Funktion der Verbiegung $\varphi=(\mathfrak{y}\;\xi)$, d.i. der Abstand des Nullpunktes von den Tangentialebenen des Drehrisses, müßte für alle Randelemente einen von 0 verschiedenen, konstanten Wert haben.

Vom Drehriß eines positiv gekrümmten Flächenstücks ist aber noch mehr bekannt ([6], ausführlicher [12]). In inneren Punkten kann keine Komponente des Drehvektors $\mathfrak{y}$ nach irgendeiner festen Richtung ein Maximum oder Minimum haben. Daraus folgt, daß der Drehriß unserer Kalotte, der sich nicht ins Unendliche erstrecken darf, bis auf die Randpunkte ganz im Innern des Rotationszylinders liegen müßte. Ja noch mehr: Die „höchsten" Punkte M (in Richtung der 3-Achse) und die tiefsten m müssen Randpunkte sein; der Drehriß müßte bis auf den Rand ganz im Innern des Zylinderabschnitts zwischen den „Horizontalebenen" durch M und m gelegen sein.

Aber einen Drehriß unserer Kalotte, der alle diese Forderungen erfüllt, gibt es nicht. Man kann z.B. so schließen: M_1 und m_1 seien die

Bildpunkte eines Punktes M bzw. m auf der Normalenkugel, P_1 der Nordpol, P sein Bildpunkt auf dem Drehriß. Man betrachte auf der Kugel die zylindrischen Streifen von M_1 bis P_1 einerseits und von m_1 bis P_1 andererseits und ihre Bildstreifen auf dem Drehriß. Diese Bildstreifen liegen auf Zylindern, deren senkrechte Durchschnitte Spitzen haben können, aber keine Wendepunkte, da, abgesehen vom Rande, nicht zwei parallele Tangentialebenen an unserem Drehriß auftreten können. Rollt daher die Tangentialebene von M längs des ersten Bildstreifens ab, so wird ihre anfängliche (der Achse zugewandte) Innenseite zum Schluß nach oben gerichtet sein, die der Tangentialebene von m beim entsprechenden Vorgang nach unten. Beim Abrollen von M über P nach m wird zum Schluß die Ebene ihre ursprüngliche Innenseite nach außen wenden. Der Abstand vom Nullpunkt muß für beide Lagen entgegengesetztes Vorzeichen haben; er kann nicht am ganzen Rande konstant sein.

Indem also auch die Annahme $\eta = \lambda\, a_3$ am Rande ausscheidet, ist die Starrheit der Kalotte mit der angegebenen Nebenbedingung bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[1] Rembs, E.
Reelle Biegungsflächen des abgeplatteten Rotationsellipsoids. Math. Nachr. **5**, 237—239 (1951).

[2] Rembs, J.
Neue Biegungsflächen des verlängerten Rotationsellipsoids. Math. Nachr. **3**, 152—175 (1950).

[3] Herglotz, G.
Über die Starrheit der Eiflächen. Abh. d. math. Sem. d. Hans. Univ. **15**, 127—129 (1943).

[4] Blaschke, W.
Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin 1950, S. 103—109.

[5] Rembs, E.
Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. **7**, 61—64 (1952).

[6] Rembs, E.
Unverbiegbare offene Flächen. Ber. d. Akad. d. Wiss. Berlin 1930, S. 123—133.

[7] Cohn-Vossen, St.
Unstarre geschlossene Flächen. Math. Ann. **102**, 10—29 (1929).

[8] Rembs, E.
Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. Math. Zeitschr. **35**, 529—535 (1932).

[9] Rembs, E.
Zur Verbiegung von Torusflächen. Phys.-Mediz. Sozietät Erlangen, Bd. 67/68, S. 4—12. 1935.

[10] Rubin, F.
Zur Deformation singularitätenfreier Flächen. Diss. Zürich 1950.

[11] Blaschke, W.
Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl. Berlin 1930, S. 199.

[12] Rembs, E.
Zur Verbiegung konvexer Flächen mit geschlossenem sphärischem Bild. Diss. Bonn 1918.

Anmerkung bei der Korrektur. Inzwischen erhielt ich Kenntnis von den Arbeiten

[13] STOKER, J. J.
On the Uniqueness Theorems for the Embedding of Convex Surfaces in Three-Dimensional Space. Commun. on Pure a. Appl. Math. **3**, 231—257 (1950).

[14] COHN-VOSSEN, ST.
Verbiegbarkeit der Flächen im Großen. Usp. mat. nauk **1**, 33—76 (1936). [Russisch.]

In [13] wird bereits das Verschwinden der Randintegrale für die Flächen unseres Abschnitts 2 erwähnt. — Nach [14] gäbe es nichtstarre geschlossene analytische Flächen unter den Parallelflächen aller analytischen geschlossenen Rotationsflächen vom Geschlecht 0, die eine Zone mit negativer GAUSSscher Krümmung haben. Der Beweis wurde nicht angegeben.

(Eingegangen am 7. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 280—288 (1952).

On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series.

By

B. N. Prasad and U. N. Singh in Allahabad (India).

1.1. A series

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \tag{1.11}$$

is said to be strongly summable (C, 1) or summable [C, 1] to the sum s, if

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu - s| = o(n), \quad \text{as } n \to \infty, \tag{1.12}$$

s_ν being the sum of the first $(\nu+1)$ terms of the series (1.11). The series is said to be strongly summable (C, 1) with index k $(k > 0)$, or simply summable H_k, to the sum s, if

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu - s|^k = o(n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.13}$$

The series is further said to be strongly summable (R, 1), [(R, 1) indicating RIESZ's logarithmic mean of order 1] or simply summable [R, 1] to the sum s, if

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu - s|}{\nu} = o(\log n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.14}$$

It is strongly summable (R, 1) with index $k > 0$ to the sum s, if

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu - s|^k}{\nu} = o(\log n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.15}$$

1.2. Let $f(t)$ be a periodic function of bounded variation with period 2π. Let the Fourier series corresponding to $f(t)$ be

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n t + b_n \sin n t). \tag{1.21}$$

The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos n t - a_n \sin n t) \tag{1.22}$$

which is obtained by differentiating the series (1.21) term by term, is called the first derived series or the derived Fourier series of $f(t)$. The series conjugate to (1.22) is

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \sin n t + a_n \cos n t). \tag{1.23}$$

2. It has been proved by one of the authors [1], by considering an example, that the derived series of a Fourier series associated with a function of bounded variation is not necessarily summable [C, 1] or summable [R, 1] at a point where the first differential coefficient not only exists, but is continuous also. The same example further shows that the derived series may not be summable H_2, nor indeed summable (R, 1) with index 2, anywhere in the interval of periodicity. The function considered in proving these results is the simplest function of bounded variation with just one jump in the whole interval of periodicity and is also absolutely continuous except at the origin. This shows that for strong summability of the derived series it will be necessary to impose some further restrictions upon the behaviour of the function. In the subsequent section we shall investigate the strong summability of the derived series.

Denoting by $\sigma_n(x)$ the sum of the first n terms of the series (1.22) at $t=x$, we get

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d}{dx}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin\frac{1}{2}(x-u)}\right\}f(u)\,du \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\left\{\frac{d}{du}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin\frac{1}{2}(x-u)}\right\}du \qquad (2.1)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}dt.\end{aligned}$$

Now integrating by parts the right hand side of (2.1), we obtain

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,d\{f(x+t)-f(x-t)\} \qquad (2.2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dg(t)+f'(x),\end{aligned}$$

where $f'(x)$ denotes the first generalised differential coefficient of $f(t)$ at $t=x$ and

$$g(t)=g(x,t)=f(x+t)-f(x-t)-2t\,f'(x).$$

We shall prove the following theorem.

Theorem A. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation and if for some value of x and for some $\varepsilon>0$*

$$\int_0^t |dg(u)| = o\left\{\frac{t}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right\}, \quad \text{as } t\to 0, \qquad (2.3)$$

then

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\sigma_\nu(x)-f'(x)| = o(n), \qquad (2.4)$$

that is, the derived series of $f(t)$ is summable [C, 1] *to the sum $f'(x)$ at $t=x$, provided that $f'(x)$ exists.*

In order to prove this theorem we shall require the following lemma:

Lemma. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation and a_n, b_n are its Fourier coefficients, then*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(|a_\nu| + |b_\nu|) = o(n). \tag{2.5}$$

This is a simple corollary of the following result[1]) of WIENER.

If $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, $\varrho_n \geq 0$, then a necessary and sufficient condition that $f(t)$, a function of bounded variation, be continuous is that

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu = o(n).$$

Now, as $f(t)$ is a continuous function of bounded variation, we have

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu = o(n).$$

But

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, |a_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu,$$

as also

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, |b_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu;$$

hence

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, (|a_\nu| + |b_\nu|) = o(n).$$

3. Proof of Theorem A.

From (2.2) we get

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu(x) - f'(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \frac{\sin(\nu + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} \right) dg(t),$$

where $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu(x) = \pm 1$ in such a way as to make

$$\varepsilon_\nu \{\sigma_\nu(x) - f'(x)\} \geq 0 \qquad \text{for } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Putting

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t = \cos\frac{1}{2} t \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin \nu t + \sin\frac{t}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \cos \nu t,$$

we get

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu(x) - f'(x)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\cot\frac{t}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin \nu t \right) dg(t) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \cos \nu t \right) dg(t) = P + Q. \end{aligned} \tag{3.1}$$

[1]) ZYGMUND, A. [2], p. 221.

Now

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t \cdot dg(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t\, d\{f(x+t) - f(x-t)\} + o(1)$$

$$= \left[\frac{\cos \nu t}{\pi}\{f(x+t) - f(x-t)\}\right]_0^\pi + \frac{\nu}{\pi}\int_0^\pi \sin \nu t\{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt + o(1)$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_0^\pi \sin \nu t\{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt + o(1)$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \sin \nu (u - x)\, du + o(1)$$

$$= \nu (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) + o(1),$$

where a_ν and b_ν are the Fourier coefficients of $f(t)$. Hence

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t\, dg(t)\right| \leq \nu |a_\nu| + \nu |b_\nu|,$$

so that

$$|Q| = \left|\frac{1}{2}\sum_1^n \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon_\nu \cos \nu t\, dg(t)\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos \nu t\, dg(t)\right| \tag{3.2}$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\sum_1^n \nu (|a_\nu| + |b_\nu|)$$

$$= o(n) \quad \text{by (2.5).}$$

To evaluate P we observe that under the condition (2.3) we have

$$G(t) \equiv \int_0^t |dg(u)| = o(t), \quad \text{as } t \to 0. \tag{3.3}$$

Now

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\pi\right) \cot \frac{1}{2} t \cdot \lambda_n(t)\, dg(t) \tag{3.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(P_1 + P_2),$$

where

$$\lambda_n(t) = \sum_1^n \varepsilon_\nu \sin \nu t.$$

But, as

$$|\lambda_n(t)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \cdot |\sin t|,$$

we have

$$|P_1| \leq \int_0^{1/n} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \sin t \frac{\cos \frac{1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot |dg(t)|$$

$$= \int_0^{1/n} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2}t \cos^2 \frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} |dg(t)| \tag{3.5}$$

$$\leq n(n+1) \int_0^{1/n} |dg(t)|$$

$$= o(n) \quad \text{by (3.3).}$$

Again, since

$$|\lambda_n(t)| \leq n,$$

$$|P_2| \leq n \int_{1/n}^{\pi} \cot \tfrac{1}{2}t \, |dg(t)|.$$

But

$$\int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{t}{2} \cdot |dg(t)| = \left[G(t) \cot \frac{1}{2}t\right]_{1/n}^{\pi} + \int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}t \, G(t) \, dt$$

$$= -G\left(\frac{1}{n}\right) \cot \frac{1}{2n} + \int_{1/n}^{\pi} 2 \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{G(t)}{t^2} dt$$

$$= -\frac{G\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n}} 2 \cos \frac{1}{2n} + o\left(\int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}} \cdot dt\right), \text{ by (2.3)}$$

$$= o(1) + o\left(\int_{\log \frac{1}{\pi}}^{\log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$= o(1).$$

Hence

$$P_2 = o(n). \tag{3.6}$$

Theorem A now follows from (3.1)—(3.6).

It will be observed that the condition (2.3) of Theorem A can be replaced by

$$\int_0^t |dg(u)| = o\left(\frac{t}{\xi(t)}\right), \quad \text{as } t \to 0, \tag{3.7}$$

where $\xi(t)$ is any of the functions

$$\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \quad \log \frac{1}{t}\left(\log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon},$$

$$\log \frac{1}{t} \log \log \frac{1}{t}\left(\log \log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \ldots; \quad (\varepsilon > 0).$$

For under the condition (3.7), $G(t)=o(t)$, and hence P_1 of (3.4) is $o(n)$, and

$$P_2 = o(n) + o\left(n \int_{\log\log\ldots\log\frac{1}{\pi}}^{\log\log\ldots\log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$= o(n).$$

4. Conjugate derived series. It can be shown by considering the same example as was taken in connection with the derived Fourier series [1] that the conjugate derived series, as will naturally be expected, may not be summable H_2 anywhere in the open interval of periodicity and also that it may not be summable [C, 1] or [R, 1] at a point where $f'(x)$ exists. We shall now investigate the conditions under which the conjugate derived series is strongly summable.

Denoting by $\bar{\sigma}_n(x)$ the sum of the first n terms of the series (1.23), at $t=x$, we have

$$\bar{\sigma}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\sum_1^n \sin v(u-x)\right)du$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{dt}\cdot\left[\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right]\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt \tag{4.1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dh(t),$$

where

$$h(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

The sum associated with the conjugate derived series is

$$H(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,dt\right\}. \tag{4.2}$$

We shall denote the integral

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{1/n}^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\cdot dt$$

by $H_n(x)$.

If the function $f(x)$ is of bounded variation, then $H(x)$ exists for almost all values of x [2, p. 146].

We shall now prove a theorem concerning the conjugate derived series analogous to Theorem A of § 2.

Theorem B. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation with period 2π, and if for a value of x, where $f'(x)$ exists and for some $\varepsilon>0$, we have*

$$\chi(t) \equiv \int_0^t |dh(u)| = o\left(\frac{t}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right), \quad \text{as } t\to 0, \tag{4.3}$$

then

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = o(n).$$

5. Proof of Theorem B.

It is evident that under the conditions (4.3)

$$\int_0^t |dh(u)| = o(t), \quad \text{as } t \to 0. \tag{5.1}$$

From (4.1) we get

$$\bar{\sigma}_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\pi}\right\} \cot\frac{1}{2}t\,(1-\cos\nu t)\,dh(t)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\nu t\,dh(t), \quad (\nu < n) \tag{5.2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(P+Q+R).$$

But

$$|P| \leq \int_0^{1/n} \left|\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot 2\sin^2\frac{\nu t}{2}\right| |dh(t)|$$

$$\leq 2\nu\int_0^{1/n} |dh(t)| = o(1)$$

and

$$-\frac{1}{2\pi}Q = -\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,(1-\cos\nu t)\,dh(t)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,dh(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cot\frac{1}{2}t\,h(t)\right]_{1/n}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,h(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\cdot dh(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n}h\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2n}} + H_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t)$$

$$= o(1) + H_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t);$$

for $\frac{h(t)}{t} \to 0$ with t, as $f'(x)$ exists.

Hence

$$|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,\varepsilon_\nu \cos\nu t\,dh(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_\nu \sin\nu t\,dh(t) + o(1),$$

where $\varepsilon_\nu = \pm 1$ in such a way that $\varepsilon_\nu\{\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)\} \geq 0$ for $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Thus

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi}\cot\frac{1}{2}t\left(\sum_1^n \varepsilon_\nu\cos\nu t\right)dh(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_1^n \varepsilon_\nu \sin\nu t\right)dh(t) + o(n) = I + J + o(n). \tag{5.3}$$

But

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,dh(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,d\{f(x+t)+f(x-t)\}$$
$$= \frac{\nu}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\nu t\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt$$
$$= \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos\nu(u-x)\,du$$
$$= \nu(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x),$$

where a_ν and b_ν are the Fourier coefficients of $f(t)$.

Thus

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,dh(t)\right| \leq \nu(|b_\nu| + |a_\nu|).$$

Hence

$$|J| = \frac{1}{2}\left|\sum_1^n\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_\nu\sin\nu t\,dh(t)\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_1^n\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\cdot dh(t)\right| \tag{5.4}$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_1^n \nu(|a_\nu| + |b_\nu|)$$
$$= o(n), \quad \text{by the lemma of § 2.}$$

Therefore

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| \leq I + o(n). \tag{5.5}$$

But, as

$$\left|\sum_1^n \varepsilon_\nu \cos \nu t\right| \leq n,$$

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} n \int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{1}{2} t \, |dh(t)|.$$

Now,

$$\int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{1}{2} t \, |dh(t)| = \left[\cot \frac{1}{2} t \, \varkappa(t)\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{1/n}^{\pi} \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2} \cdot \varkappa(t) \, dt$$

$$= -\frac{\cos \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n}} \cdot \varkappa\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \int_{1/n}^{\pi} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{\varkappa(t)}{t^2} \cdot dt$$

$$= o(1) + o\left\{\int_{1/n}^{\pi} \frac{dt}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right\}, \quad \text{by (4.3)}$$

$$= o(1) + o\left\{\int_{\log \frac{1}{\pi}}^{\log n} \frac{d\nu}{\nu^{1+\varepsilon}}\right\}$$

$$= o(1).$$

Hence

$$I = o(n). \tag{5.6}$$

Theorem B now follows from (5.3)—(5.6).

It will be observed that Theorem B will hold if the condition (4.3) is replaced by

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\xi(t)}\right), \quad \text{as } t \to o, \tag{5.7}$$

where $\xi(t)$ is any of the functions

$$\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad \log \frac{1}{t}\left(\log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon},$$

$$\log \frac{1}{t} \log \log \frac{1}{t}\left(\log \log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \ldots; \quad (\varepsilon > 0).$$

For, under the condition (5.7), $\varkappa(t) = o(t)$ and hence P of (5.2) is $o(1)$, and I of (5.3)

$$= o(n) + o\left(n \int_{\log \log \ldots \log \frac{1}{\pi}}^{\log \log \ldots \log n} \frac{d\nu}{\nu^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$= o(n).$$

References.

[1] Singh, U. N.
On the strong summability of the derived series of a Fourier series. Proc. Nat. Acad. Sci. India **15**, 63—72 (1946).

[2] Zygmund, A.
Trigonometrical Series. Warsaw 1935.

(Eingegangen am 22. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 289—295 (1952).

On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals.

By

Lennart Carleson, Uppsala (Schweden).

1. Let $\{z_\nu\}$, $0<|z_\nu|<1$, be a given sequence of points on the unit circle. Then there exists a function, bounded and analytic in $|z|<1$ and satisfying the conditions $f(z_\nu)=0$ and $f(0)=1$, if and only if the series $\sum(1-|z_\nu|)$ converges. This is a condition on $|z_\nu|$ alone. For the class D of functions with bounded DIRICHLET integrals, the situation is different, and necessary and sufficient conditions on $\{z_\nu\}$ are not known[1]). Nevertheless, it is here natural to pose the two following questions: given a sequence of real numbers r_ν, $0<r_\nu<1$, when does there exist a function f in the class D satisfying the conditions

$$\text{(C)} \qquad f(0)=1, \qquad f(z_\nu)=0, \qquad z_\nu=r_\nu e^{i\Theta_\nu},$$

either for *some* choice of the arguments Θ_ν or for *every* choice? We shall here prove the following theorem.

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition that there exist a function f with bounded* DIRICHLET *integral and satisfying* (C) *for some choice of $\{\Theta_\nu\}$ is that the series*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}(1-r_\nu)$$

converges. A sufficient condition that f exist for every choice of $\{\Theta_\nu\}$ is that for some $\varepsilon>0$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1+\varepsilon}<\infty.$$

A necessary condition is that

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1-\varepsilon}<\infty \quad \textit{for every} \quad \varepsilon>0.$$

The first part of this theorem is trivial. If the series (1) diverges, $f(z)$ vanishes identically according to a general theorem, and this contradicts the condition $f(0)=1$. If (1) converges, we choose $\Theta_\nu=0$, $\nu=1, 2, \ldots,$

[1]) The theorem given in O. LOKKI: Über analytische Funktionen, deren DIRICHLET-Integral endlich ist und die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, Ann.Acad. Sci. Fenn. (A) **39** (1947), p. 47, is not true; the deduction on p. 49 is incorrect.

and form the BLASCHKE product

$$h(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_\nu-z}{1-z\,r_\nu}\cdot$$

We obtain

$$|h'(z)|\leq\sum_{1}^{\infty}\frac{1-r_\nu^2}{|1-z\,r_\nu|^2}=O\Big(\frac{1}{|z-1|^2}\Big).$$

The function $f(z)=a(z-1)^2h(z)$ has a bounded derivative and satisfies the condition $f(0)=1$ for a suitable constant a.

2. The rest of the paper will be devoted to the proof of the second part of theorem 1. We first introduce some notations. Let $D(f,g)$ be the mixed DIRICHLET integral,

$$D(f,g)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}f'(z)\overline{g'(z)}\,dx\,dy\,,\qquad z=x+i\,y;$$

we write $D(f)=D(f,f)$. Let C denote the subclass of D of functions satisfying condition (C). We define

$$M=M(z_1,z_2,\ldots)=\inf_{f\in C}D(f)\quad(\leq\infty)$$

and make the convention that $M=\infty$ if C is void. We shall need a new representation of M which we formulate in the following theorem.

Theorem 2. *For a given sequence* $\{z_\nu\}$ *such that* $\sum_1^\infty(1-|z_\nu|)<\infty$ *let*

$$F(\Theta)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}\cdot$$

If we define $M^*=M^*(z_1,z_2,\ldots)\,(\leq\infty)$ *by*

$$M^*=\inf_{g\in D}I(g)=\inf_{g\in D}\left\{D(g)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\Theta)\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta\right\},\tag{4}$$

$$g(0)=\Big\{\prod_1^\infty|z_\nu|\Big\}^{-1},$$

then $M=M^*$.

Let us first assume that the sequence $\{z_\nu\}_1^n$ is finite. A function $f(z)$ in C can be written

$$f(z)=\prod_1^n\frac{z-z_\nu}{1-z\,\bar z_\nu}\,g(z)=\frac{z-z_1}{1-z\,\bar z_1}\,g_1(z)=h_1(z)\,g_1(z),$$

where $|g(z)|=|g_1(z)|$ for $|z|=1$. If we assume that $g'(z)$ is continuous on $|z|=1$, a partial integration shows that

$$D(f,f)=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\overline{f(z)}\,df(z)=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\bar g_1\,\bar h_1(h_1\,dg_1+g_1\,dh_1)$$

$$=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\bar g_1\,dg_1-\frac{i}{2\pi}\int_{|z|=1}|g_1|^2\,\frac{dh_1}{h_1}\cdot$$

Since

$$\frac{dh_1(z)}{h_1(z)} = i\,\frac{1-|z_1|^2}{1-e^{i\Theta}\bar{z}_1|^2}\,d\Theta, \qquad z = e^{i\Theta},$$

and $|g| = |g_1|$ on $|z| = 1$, this yields

$$D(f) = D(g_1) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\Theta}-z_1|^2}\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

This formula then holds for an arbitrary function g in D. We use the same argument on the function g_1, and finally obtain the desired formula for the finite sequence $\{z_\nu\}$.

Let us now consider the general case and suppose first that M is finite. There exists an extremal function in the class C, i.e. a function f for which $D(f) = M$, and

$$f(z) = g(z)\prod_1^\infty \frac{z_\nu - z}{1-z\bar{z}_\nu}\,\frac{\bar{z}_\nu}{|z_\nu|} = g_n(z)\,\pi_n(z),$$

where $\pi_n(z)$ is the product with $1 \le \nu \le n$. The above argument yields

$$D(f) = D(g_n) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

If we observe that $\lim_{n=\infty} D(g_n) \ge D(g)$, we obtain the inequality $M^* \le M$. Suppose that $I(g^*) \le M^* + \delta$, $\delta > 0$, where g^* belongs to D and $g^*(0) = \left\{\prod_1^\infty |z_\nu|\right\}^{-1}$. Then if $f_n(z) = \pi_n(z)\,g^*(z)$, we obtain

$$D(f_n) = D(g^*) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}\,|g^*(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

Hence $M \le \lim_{n=\infty} D(f_n) \le M^* + \delta$. If we let $\delta \to 0$, we get $M \le M^*$, and so $M = M^*$.

Conversely, if M^* is finite, the last part of the above proof gives $M \le M^*$. Thus M is finite and theorem 2 is proved.

3. The proof that condition (2) is sufficient depends on the following potential-theoretic lemma.

Lemma 1. *Let $I_1, I_2, \ldots, I_\nu, \ldots$ be a sequence of closed subintervals of $(0, 1)$, which may have common points, and suppose that their lengths a_ν decrease to zero. Suppose furthermore that there is a sequence $\{l_\nu\}$ such that $l_\nu \ge 1$ and*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l_\nu^2}{\log\frac{1}{a_\nu}} < \infty. \tag{5}$$

Then, for every $n \ge 1$, there exists a potential $U_n(x)$,

$$U_n(x) = \int_0^1 \log\frac{1}{|x-t|}\,d\sigma_n(t), \quad \sigma_n \ge 0,$$

such that $U_n(x) \geq l_\nu$ *for* x *in* I_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *and such that*

$$J(U_n) = \int_0^1 \int_0^1 \log \frac{1}{|x-t|}\, d\sigma_n(x)\, d\sigma_n(t) < A,$$

where A *is independent of* n.

We prove this by induction. We use the notation $b_\nu = \dfrac{l_\nu}{a_\nu \log \dfrac{1}{a_\nu}}$ and choose

$$U_1(x) = K b_1 \int_{I_1} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt.$$

For a suitable constant K, which may be chosen independently of a_1, $U_1(x) \geq l_1$ for $x \in I_1$. Suppose that $U_{n-1}(x)$ is constructed, $n \geq 2$, and choose

$$U_n(x) = U_{n-1}(x) + \alpha \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt,$$

where α is a constant to be determined later. This means that σ_n, for every n, is concentrated on the intervals I_ν, $\nu \leq n$. Since a_ν is a decreasing sequence, there exists a constant λ such that if $U_{n-1}(x) \geq \lambda l_n$ at one point of I_n, then $U_{n-1}(x) \geq l_n$ throughout I_n. We now distinguish two cases.

I. If $U_{n-1}(x) \geq \lambda l_n$ at one point of I_n, we choose $\alpha = 0$, so that $U_n(x) = U_{n-1}(x)$. This choice is permissible and we have $J(U_n) = J(U_{n-1})$.

II. If $U_{n-1}(x) < \lambda l_n$ for $x \in I_n$, we choose $\alpha = K b_n$. Evidently, $U_n(x) \geq U_{n-1}(x) \geq l_\nu$ for $x \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ and

$$U_n(x) \geq K b_n \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt \geq l_n \quad \text{for} \quad x \in I_n.$$

We now have to estimate $J(U_n)$:

$$J(U_n) = J(U_{n-1}) + \alpha^2 \int_{I_n} \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dx\, dt + 2\alpha \int_{I_n} U_{n-1}(x)\, dx.$$

Hence, if e.g. $a_n < \frac{1}{3}$,

$$J(U_n) \leq J(U_{n-1}) + 3\alpha^2 a_n^2 \log \frac{1}{a_n} + 2\alpha \lambda l_n a_n.$$

If we insert the value of α, we find that there exists a constant C such that

$$J(U_n) \leq J(U_{n-1}) + C \frac{l_n^2}{\log \dfrac{1}{a_n}}.$$

Thus, if

$$J(U_{n-1}) \leq C \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{l_\nu^2}{\log \dfrac{1}{a_\nu}}$$

(which is certainly true for $n=2$ if C is large enough) the same inequality holds for $J(U_n)$, and the lemma follows from assumption (5).

4. Let us now assume that (2) holds. In the interval $(0, 2\pi)$, considered on the unit circle, we exclude intervals I_ν around Θ_ν of lengths a_ν^4, $a_\nu = 1-r_\nu$. For every n, there exists by lemma 1 a potential $U_n(\Theta)$ such that

$$U_n(\Theta) \geq \log\log\frac{1}{a_\nu}, \quad \Theta \in I_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

and

$$J(U_n) < A.$$

In particular, the total mass of σ_n is bounded. Let $h_n(z)$ be an analytic function in $|z|<1$ whose real part on $|z|=1$ equals $U_n(\Theta)$, and form

$$g_n(z) = e^{-h_n(z)}.$$

Then

$$|g_n(e^{i\Theta})| \leq \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-1}, \quad \Theta \in I_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{6}$$

$$|g_n(0)| \geq a > 0; \tag{7}$$

$$D(g_n) < A'; \tag{8}$$

here a and A' are independent of n. Furthermore, the functions $g_n(z)$ are uniformly bounded.

In view of theorem 2, we can establish the sufficiency of condition (2) by proving that

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{1-r_\nu^2}{|e^{i\Theta} - z_\nu|^2} |g_n(e^{i\Theta})|^2 \, d\Theta$$

is bounded independently of n. Let A_1 and A_2 be the integrals of the ν-th term of the sum over the intervals I_ν and $(0, 2\pi) - I_\nu$, respectively. Then, from (6) we infer that

$$A_1 \leq \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-2} \int_0^{2\pi} \frac{1-r_\nu^2}{|e^{i\Theta} - z_\nu|^2} \, d\Theta = 2\pi \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-2},$$

and, since $|\Theta - \Theta_\nu| \geq a_\nu^4$ on $(0, 2\pi) - I_\nu$, we obtain $A_2 \leq$ Const. a_ν^4. Thus for all n we have

$$B_n \leq \text{Const.} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\left(\log\frac{1}{a_\nu}\right)^{-2} + a_\nu^4\right\} < \infty,$$

which proves our assertion.

5. To prove that (3) is necessary, we need the following lemma[2]).

Lemma 2. *If E is a closed set of positive capacity, there exists a sequence $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_0^\infty$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \to 0$, $\lambda_0 = 0$, such that the arithmetic sum*

[2]) A similar argument is used in L. Carleson: Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta Math. 87 (1952).

F of Λ and E, $F=\{x+\lambda_\nu,\ x\in E,\ \nu=0,1,2,\ldots\}$, is a set of uniqueness for the class D, i.e. if $f\in D$ and

$$\lim_{r\to 1} f(r e^{i\Theta})=0,\quad \Theta\in F,$$

wherever the limit exists, then $f(z)\equiv 0$.

Since E has positive capacity, there exists a distribution μ of unit mass on E with FOURIER-STIELTJES coefficients c_n such that $\sum |c_n|^2 |n|^{-1}<\infty$. With a given function $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ in D, we associate another function $\varphi(\zeta)$, $|\zeta|<1$, defined by

$$\varphi(\zeta)=\int_E f(\zeta e^{it})\,d\mu(t)=\sum_0^\infty A_n\zeta^n,$$

where $A_n=a_n\cdot c_{-n}$. Since $\sum n|a_n|^2<\infty$, the TAYLOR series of $\varphi(\zeta)$ converges absolutely on $|\zeta|=1$, and there exists a function $\omega(s)$ *which depends only on the sequence* $\{c_n\}$, such that

$$|\varphi(e^{ix})-\varphi(e^{iy})|\le \text{Const.}\,\omega(s),\quad |x-y|\le s,$$

and for which $\lim_{s\to 0}\omega(s)=0$. The function $\omega(s)$ being defined, we choose the sequence $\{\lambda_\nu\}$ so that the series $\sum_2^\infty l_\nu\log\omega(l_\nu)$ diverges, where $l_\nu=\lambda_{\nu-1}-\lambda_\nu$, $\nu\ge 2$.

If now $\lim_{r\to 1} f(re^{i\Theta})=0$ for $\Theta\in F$ wherever the limit exists, then it follows that $\varphi(e^{i\lambda_\nu})=0$, $\nu=0,1,2,\ldots$ Hence there is a constant M such that

$$|\varphi(e^{i\Theta})|\le M\,\omega(l_\nu),\quad \lambda_{\nu-1}\ge\Theta\ge\lambda_\nu,\ \nu\ge 2.$$

From this it follows that

$$\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\Theta})|\,d\Theta\le \text{Const.}+\log M\sum_2^\infty l_\nu+\sum_2^\infty l_\nu\log\omega(l_\nu)=-\infty.$$

This yields $\varphi(\zeta)\equiv 0$, and in particular $a_0=0$. If we use the same argument on $z^{-1}f(z)$, we obtain $a_1=0$ etc. and finally $f(z)\equiv 0$.

6. As before, let us set $a_\nu=\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1}$ to simplify the notations and let us assume that the series $\sum a_\nu^{1+\varepsilon}$ diverges for some $\varepsilon>0$. If $N(t)$ denotes the number of a_ν's such that $a_\nu>t$, then

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\,t^{1+\delta}N(t)=\infty,\quad 0<\delta<\varepsilon.$$

We choose a CANTOR set E of positive capacity[3]) and denote by E_n the set obtained after n steps in the construction of E. E_n consists of m_n intervals of lengths $\exp\left(-\frac{1}{\varrho_n}\right)$. The numbers ϱ_n and m_n may be assumed

[3]) For the connection between CANTOR sets and capacity, see R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, p. 145ff.

to satisfy the following conditions:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varrho_n^{1+\delta} N(\varrho_n) = \infty \quad \text{for some} \quad \delta > 0 \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n \varrho_n^{1+\delta'} = 0, \quad 0 < \delta' < \delta. \tag{10}$$

We associate with E a sequence $\{\lambda_\nu\}$ and a set F such that the conclusion of lemma 2 is valid. Let $E_n^{(\nu)}$ be the set E_n after translation by λ_ν. Let n_i be a sequence of integers to be determined later. We choose for Θ_k the midpoints of the intervals which constitute the sets E_{n_i}, $E_{n_i}^{(1)}, \ldots, E_{n_i}^{(p_i)}$, where p_i is the largest index that can be chosen when we assume $\varrho_{n_i} < a_k \leq \varrho_{n_{i-1}}$. On account of (9) and (10), $p_i \to \infty$ if the sequence $n_i \to \infty$ rapidly enough and $\lim_{i\to\infty} \varrho_{n_i}^{1+\delta} N(\varrho_{n_i}) = \infty$.

Let us now suppose that $f(z_k) = 0$ for some $f \in D$. If Θ belongs to F, there are an infinity of numbers z_k such that

$$\frac{1-|z_k|}{|e^{i\Theta} - z_k|} \geq \frac{1}{2}.$$

Since $|f'(z)| = o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $|z| \to 1$, we infer that

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\Theta}) = 0, \quad \Theta \in F.$$

By our choice of $\{\lambda_\nu\}$, this implies $f(z) \equiv 0$, and theorem 1 is completely proved.

We remark that our methods yield better conditions than (2) and (3). We have, however, preferred not to push them further as we wish to keep the proofs reasonably simple. We also observe that it is an easy consequence of theorem 2 that the class C may be empty even if $\sum(1-|z_\nu|)$ converges. We need only use the fact that the series defining $F(\Theta)$ may diverge for every Θ if only $\sum(1-|z_\nu|)^{\frac{1}{2}}$ diverges. To obtain this result it is therefore unnecessary to use the above argument which however gives the much sharper result of theorem 1.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 296—311 (1952).

Stetige Abbildungen topologischer Räume auf endliche abstrakte Komplexe.

Von

Wolfhart Zimmermann in Göttingen.

Einleitung.

In Arbeiten von FREUDENTHAL[1]) und ALEXANDROFF[2]) wurde gezeigt, daß sich jede kompakte Teilmenge T des R_n als Limesraum eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ abstrakter Komplexe darstellen läßt. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit für die Homologietheorie der kompakten Teilmengen des R_n, da die inverse Limesbildung sich als geeignetes Mittel erweist, einige topologische Eigenschaften dieser Räume auf die Eigenschaften der abstrakten Komplexe zurückzuführen. Ersetzt man nämlich in dem Spektrum $\mathfrak{S}$ jeden Komplex durch seine Homologiegruppe, und jede Projektion durch den entsprechenden Homomorphismus, so entsteht ein inverses Spektrum von Homologiegruppen, dessen Limesgruppe von der gewählten Darstellung des Raumes T unabhängig ist, also eine topologische Invariante von T ist. Es gelingt so, die Homologieeigenschaften der Komplexe — also spezieller topologischer Räume, die kombinatorischen Methoden leicht zugänglich sind — vermöge der inversen Limesbildung auf die kompakten Teilmengen des R_n zu übertragen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, dieses Verfahren auf *alle* Räume R auszudehnen, die sich als Limesräume inverser Spektren auffassen lassen, so daß die Homologietheorie dieser Räume als eine „Fortsetzung" der Homologietheorie der abstrakten Komplexe erscheint.

Zur Erreichung dieses Zieles ist es zweckmäßig, den Begriff der „stetigen Abbildung eines topologischen Raumes auf einen abstrakten Komplex" in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu stellen, und zwar aus folgendem Grund: Die Gesamtheit aller stetigen Abbildungen eines beliebigen topologischen Raumes auf abstrakte Komplexe läßt sich in einem inversen Spektrum, dem „*Abbildungsschema*" von R, zusammenfassen, welches zum Ausdruck bringt, wie R durch die Möglichkeit stetiger Abbildung zur Gesamtheit der abstrakten Komplexe in Beziehung gesetzt ist. So erlaubt z. B. das Abbildungsschema zu entscheiden, wann ein topologischer Raum als Limesraum eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe dargestellt werden kann.

---

[1]) FREUDENTHAL, H.: Über die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. Proc. Acad. Amsterdam **38**, 414—418 (1935).

[2]) ALEXANDROFF, P.: Untersuchung über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. Ann. of Math. (2) **30**, 101—187 (1928).

Ein zweiter wichtiger Begriff ist das *topologische Gebilde*, seine Bedeutung geht wohl am besten aus der nun folgenden Inhaltsübersicht hervor.

Die „Vorbemerkungen" enthalten Definition und einfachste Eigenschaften inverser Spektren topologischer Räume.

In Abschnitt I wird das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ als ein topologischer Raum R definiert, in welchem eine Basis $\mathfrak{B}$ des Systems der offenen Mengen ausgezeichnet ist, die mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt und Vereinigung enthält. Die Begriffe stetige Abbildung, topologische Abbildung, inverses Spektrum, und Limesgebilde eines inversen Spektrums werden ganz analog wie für topologische Räume definiert.

In Abschnitt II wird gezeigt, daß die Begriffe „stetige Abbildung eines topologischen Gebildes auf einen abstrakten Komplex" und „endliche offene (abgeschlossene) Überdeckung eines topologischen Gebildes" äquivalent sind.

Mit Hilfe des Abbildungsschemas, das als inverses Spektrum abstrakter Komplexe, gebildet aus allen stetigen Abbildungen eines topologischen Gebildes auf abstrakte Komplexe, definiert ist, wird in Abschnitt III folgendes bewiesen:

1. Jeder T_0-Raum R kann in den Limesraum des Abbildungsschemas eines seiner topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{S})$ eingebettet werden (Satz 2).

2. Ein topologisches Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ ist dann und nur dann Limesgebilde eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe, wenn $(R, \mathfrak{B})$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist (Satz 3 und 4).

3. Ist $\mathfrak{S}$ ein inverses Spektrum topologischer Gebilde, in welchem jedes Gebilde dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist, so ist auch das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph (Satz 5).

Mit Hilfe dieser Sätze wird in Abschnitt IV gezeigt, wie die Homologie- bzw. Cohomologietheorie derjenigen topologischen Gebilde, die sich als Limesgebilde inverser Spektren abstrakter Komplexe darstellen lassen, in eindeutiger Weise aus der Homologie- bzw. Cohomologietheorie der abstrakten Komplexe hervorgeht.

Im letzten Abschnitt wird der Übergang von topologischen Gebilden zu topologischen Räumen durch folgenden „Invarianzbeweis" vollzogen: Ist R Limesraum eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ abstrakter Komplexe, und $(R, \mathfrak{B})$ ein topologisches Gebilde, welches Limesgebilde eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe ist (z. B. das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$), so ist die nach IV erklärte n-te Homologiegruppe des Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$, also eine topologische Invariante von R.

Ist allgemein R ein beliebiger topologischer Raum und $(L, \mathfrak{L})$ das Limesgebilde des Abbildungsschemas von R, so kann die n-te Homologiegruppe von $(L, \mathfrak{L})$ dem Raum R als n-te Homologiegruppe zugesprochen

werden. Diese ist aber gerade der von ČECH eingeführten n-ten Homologiegruppe von R isomorph, womit die Brücke zur Homologietheorie von ČECH geschlagen ist.

Vorbemerkungen.

Ein *inverses Spektrum* $\mathfrak{S}$ topologischer Räume[3]) ist durch folgende Bestimmungsstücke definiert[4]):

1. Die Indexmenge I von $\mathfrak{S}$.

2. Eine Ordnungsrelation $\leq$ in I, welche transitiv und reflexiv ist, und außerdem folgende Bedingung erfüllt: Zu je zwei Indizes $\alpha \in I$ und $\beta \in I$ gibt es einen Index $\gamma \in I$ mit $\gamma \geq \alpha$ und $\gamma \geq \beta$.

(Dabei kann auch der Fall $\alpha \geq \beta$, $\beta \geq \alpha$, $\alpha \neq \beta$ eintreten, siehe dazu Punkt 3 und 4.)

3. Eine Familie $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit I als Indexmenge. Ist $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$, so sei $R_\alpha \approx R_\beta$[5]).

4. Zu je zwei Indizes $\alpha \geq \beta$ gehört eine Familie von stetigen Abbildungen $(\pi_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$ von R_α in R_β, die Familie der *Projektionen*. Ist $\alpha \geq \beta$ und $\beta \geq \alpha$, so gehöre mindestens eine topologische Abbildung von R_α auf R_β zu den Projektionen von α in β.

Ein inverses Spektrum $\mathfrak{S}'$ [mit der Indexmenge I', der Ordnungsrelation $\leq'$, der Familie $(R'_\alpha)_{\alpha \in I'}$ topologischer Räume und den Projektionen $(\pi'_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$] heißt ein Teilspektrum des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$, wenn

$$I' < I$$

ist, die Ordnung $\leq'$ durch die Ordnung $\leq$ in I' induziert wird,

$$R'_\alpha = R_\alpha \qquad (\alpha \in I')$$

und für $\alpha \geq \beta$, $\alpha \in I'$, $\beta \in I'$:

$$(\pi'_i)_{i \in I'(\alpha, \beta)} = (\pi_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$$

ist.

Ein Teilspektrum $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ heißt vollständig, wenn es zu jedem $\alpha \in I$ ein $\alpha' \in I'$ gibt mit

$$\alpha' \geq \alpha.$$

Ein inverses Spektrum heißt einfach, wenn es für jedes Indexpaar $\alpha \geq \beta$ nur eine Projektion von α in β gibt. Diese Projektion wollen wir mit $\pi_{\alpha\beta}$ bezeichnen.

Die Definition des Limesraums eines inversen Spektrums benötigen wir nur für einfache Spektren: Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches inverses Spektrum, so besteht der Limesraum $R = \varprojlim \mathfrak{S}$ aus allen Familien $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$, mit

$$p_\alpha \in R_\alpha \quad \text{und} \quad p_\alpha = \pi_{\beta\alpha} p_\beta \quad \text{für} \quad \beta \geq \alpha.$$

[3]) Zu allen Grundbegriffen der Topologie vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I. Berlin 1935 und N. BOURBAKI, Topologie générale, Paris 1940.

[4]) Zur Definition der Spektren topologischer Räume und Gruppen vgl. J. BRACONNIER, Spectres d'espaces. Portugaliae Math. 7, 93—111 (1948).

[5]) $R_\alpha \approx R_\beta$ bedeutet: R_α und R_β sind homöomorph.

Die Topologie von R sei die am wenigsten feine, für welche jede Abbildung f_α von R in R_α stetig ist, wenn f_α durch

$$f_\alpha\{(p_\alpha)_{\alpha\in I}\} = p_\alpha$$

definiert ist.

$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien einfache, inverse Spektren topologischer Räume, die ein-eindeutige Abbildung h der Indexmenge $I(\mathfrak{S})$ *auf* die Indexmenge $I(\mathfrak{T})$ heißt eine Isomorphie von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$, wenn es zu jedem Index $\alpha\in I(\mathfrak{S})$ eine topologische Abbildung a_α von R_α auf $R_{h\alpha}$ gibt, so daß für jedes Indexpaar

$$\pi_{h\alpha,\,h\beta} = a_\beta \circ \pi_{\alpha\beta} \circ a_\alpha^{-1}$$

ist.

Gibt es eine Isomorphie von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$, so sind offenbar die Limesräume von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ homöomorph:

$$\varprojlim \mathfrak{S} \approx \varprojlim \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien einfache, inverse Spektren mit den Indexmengen $I(\mathfrak{S})$ und $I(\mathfrak{T})$, I' eine Teilmenge von $I(\mathfrak{T})$, dann induziert $\mathfrak{T}$ in der Menge I' ein inverses Teilspektrum $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$. Die eindeutige Abbildung k von $I(\mathfrak{S})$ *in* $I(\mathfrak{T})$ mit der Bildmenge $I' = kI(\mathfrak{S})$ heiße eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$, wenn k das Spektrum $\mathfrak{S}$ *auf* das Spektrum $\mathfrak{T}'$ isomorph abbildet.

Eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ definiert eine stetige Abbildung s von $\varprojlim \mathfrak{T}$ in $\varprojlim \mathfrak{S}$: Ist $p = (p_\alpha)_{\alpha\in I(\mathfrak{T})}$ ein Punkt von $\varprojlim \mathfrak{T}$, so sei der Bildpunkt von p

$$s\,p = (q_\alpha)_{\alpha\in I(\mathfrak{S})}$$

durch

$$q_\alpha = p_{k\alpha}$$

festgelegt. Es ist nun leicht nachzuprüfen, daß s tatsächlich stetig ist.

In den beiden folgenden Fällen haben die Spektren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ bekanntlich homöomorphe Limesräume:

1. Ist $\mathfrak{S}'$ vollständiges Teilspektrum eines einfachen inversen Spektrums $\mathfrak{S}$, so folgt:

$$\varprojlim \mathfrak{S}' \approx \varprojlim \mathfrak{S}.$$

2. $\mathfrak{S}$ sei ein einfaches, inverses Teilspektrum mit der Indexmenge I und der Ordnungsrelation $\leq$. Die Ordnungsrelation $\leq'$ in I sei Teilordnung von $\leq$, d.h. aus $\alpha \leq' \beta$ folgt stets $\alpha \leq \beta$. Außerdem existiere zu jedem Indexpaar α, β ein Index γ mit $\gamma \geq' \alpha$ und $\gamma \geq' \beta$. Dann induziert $\mathfrak{S}$ in der Indexmenge I mit der Ordnung $\leq'$ ein Spektrum $\mathfrak{S}'$ mit $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ als Familie topologischer Räume und den Projektionen

$$\pi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha\in I,\ \beta\in I,\ \alpha \geq' \beta)$$

und es ist:

$$\varprojlim \mathfrak{S} \approx \varprojlim \mathfrak{S}'.$$

Außer in Abschnitt V ist, wenn von inversen Spektren topologischer Räume die Rede ist, immer vorausgesetzt, daß sie einfach sind und jede Projektion $\pi_{\alpha\beta}$ eine Abbildung von R_α *auf* R_β ist.

I. Topologische Gebilde.

Definition 1. *Ein topologisches Gebilde* $(R, \mathfrak{B})$ *besteht aus einem topologischen Raum* R *und einem System* $\mathfrak{B}$ *offener Mengen in* R *mit folgenden Eigenschaften:*

1. Aus $U_1 \in \mathfrak{B}$ und $U_2 \in \mathfrak{B}$ folgt $U_1 \cup U_2 \in \mathfrak{B}$ und $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{B}$.

2. Jede offene Menge in R ist Vereinigungsmenge einer Mengenfamilie aus $\mathfrak{B}$.

Die Mengen des Systems $\mathfrak{B}$ heißen $\mathfrak{B}$-offen. Die Komplementärmenge einer $\mathfrak{B}$-offenen Menge heißt $\mathfrak{B}$-abgeschlossen. Die Gesamtheit $\tilde{\mathfrak{B}}$ der $\mathfrak{B}$-abgeschlossenen Mengen genügt den beiden Bedingungen:

1. Aus $U_1 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ und $U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ folgt $U_1 \cap U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ und $U_1 \cup U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

2. Jede abgeschlossene Menge in R ist Durchschnitt einer Mengenfamilie aus $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Hat R nur endlich viele Punkte, so gibt es zu R nur *ein* topologisches Gebilde, nämlich $(R, \mathfrak{O}(R))$, wenn $\mathfrak{O}(R)$ das System aller offenen Mengen von R bezeichnet.

Eine Abbildung f eines topologischen Raumes R' in einen Raum R heißt eine stetige Abbildung des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, wenn das Urbild jeder $\mathfrak{B}'$-offenen Menge $\mathfrak{B}$-offen ist. Nach dieser Definition ist jede stetige Abbildung von $(R', \mathfrak{B}')$ in $(R, \mathfrak{B})$ eine stetige Abbildung von R' in R und jede stetige Abbildung von R' in R eine stetige Abbildung von $(R', \mathfrak{O}(R'))$ in $(R, \mathfrak{O}(R))$, wenn $\mathfrak{O}(R)$ das System aller offenen Mengen von R bezeichnet.

Eine ein-eindeutige und umkehrbar-stetige Abbildung f des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ auf das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ heißt eine topologische Abbildung von $(R', \mathfrak{B}')$ auf $(R, \mathfrak{B})$. $(R', \mathfrak{B}')$ und $(R, \mathfrak{B})$ nennen wir in diesem Fall homöomorph: $(R', \mathfrak{B}') \approx (R, \mathfrak{B})$.

Definition 2. *Ein inverses Spektrum* $\mathfrak{S}$ *topologischer Gebilde hat folgende Bestimmungsstücke:*

1. Ein inverses Spektrum $\mathfrak{S}$ topologischer Räume.

[Wir bezeichnen die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Familie topologischer Räume mit $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ und die Projektion von α in β mit $\pi_{\alpha\beta}$.]

2. Eine Familie $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ topologischer Gebilde, für welche die Abbildung $\pi_{\alpha\beta}$ $(\alpha \geq \beta)$ von R_α in R_β eine stetige Abbildung von $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ in $(R_\beta, \mathfrak{B}_\beta)$ ist.

Das Limesgebilde $(R, \mathfrak{B}) = \varprojlim \mathfrak{S}$ eines inversen Spektrums topologischer Gebilde ist so erklärt: R ist der Limesraum des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{B}$ besteht aus allen Teilmengen U von R, zu welchen es ein

$\alpha \in I$ und eine offene Menge V von R_α gibt mit

$$U = f_\alpha^{-1} V.$$

Nach Definition des Limesraumes R erfüllt $(R, \mathfrak{B})$ die Eigenschaften (1) und (2) eines topologischen Gebildes.

Die in den Vorbemerkungen angegebenen Eigenschaften inverser Spektren lassen sich ohne weiteres auf inverse Spektren topologischer Gebilde übertragen.

Jedes inverse Spektrum $\mathfrak{S}$ topologischer Räume läßt sich auf triviale Weise zu einem Spektrum topologischer Gebilde ergänzen: Jeder Raum R_α wird einfach durch das topologische Gebilde $(R_\alpha, \mathfrak{O}(R_\alpha))$ ersetzt, und die Projektionen $\pi_{\alpha\beta}$ bleiben ungeändert. Ist $\mathfrak{S}$ ein Spektrum endlicher Räume, so ist dies offenbar die einzige Erweiterungsmöglichkeit.

II. Komplexe und Überdeckungen.

Definition 3. *Ein (endlicher) abstrakter Komplex K ist ein beliebiges endliches System endlicher Mengen. Die Elemente von K heißen Simplexe von K, die Elemente der Simplexe von K heißen Eckpunkte von K.*

Ein abstrakter Komplex ist durch die Relation $<$ teilweise geordnet. Zu $<$ gehört eine Rechtstopologie $\mathcal{T}_0$ und eine Linkstopologie $\mathcal{T}_a$. Die entsprechenden topologischen Räume nennen wir K_0 und K_a.

Eine Abbildung h eines abstrakten Komplexes L in den Komplex K ist dann und nur dann eine stetige Abbildung von L_0 in K_0 bzw. von L_a in K_a, wenn aus $t_1 < t_2$ stets folgt: $ht_1 < ht_2$[6]).

Ist K ein abstrakter Komplex, so bezeichne $\bar{K}$ denjenigen Komplex, der aus allen Mengen s besteht, welche in wenigstens einem Simplex von K enthalten sind. Ist h eine stetige Abbildung des Komplexes L_0 in den Komplex K_0, so sei die Abbildung $\bar{h}$ von $\bar{L}$ in $\bar{K}$ folgendermaßen definiert: Ist $\bar{s}$ Simplex von $\bar{L}$, so werde $\bar{s}$ der Durchschnitt

$$\bar{t} = \bigcap_{s \supset \bar{s}} h\, s$$

zugeordnet, in welchem s alle Simplexe von L durchläuft, welche $\bar{s}$ enthalten. $\bar{h}$ ist eine stetige Abbildung von $\bar{L}_0$ in $\bar{K}_0$.

Definition 4. *Eine endliche offene Überdeckung eines topologischen Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{B}$-offener Mengen, deren Indexmenge endlich und deren Vereinigungsmenge*

$$\bigcup_{i \in I} U_i = R$$

ist.

Wir wollen jetzt einen ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen den stetigen Abbildungen eines Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe K_0

[6]) Vgl. hierzu ALEXANDROFF, P.: Diskrete Räume. Rec. math. Moscou (2) **2**, 501—519 (1937).

einerseits und den endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$ andererseits herstellen.

g sei eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ auf K_0. Die zu g gehörige endliche offene Überdeckung $\mathfrak{U}_g$ erklären wir folgendermaßen: Jedem Eckpunkt $a \in \mathfrak{K}$[7]) ordnen wir die (offene) Menge $U(a)$ von K_0 zu, welche aus allen Simplexen s mit $a \in s$ besteht. Jeder Menge $U(a)$ ordnen wir die $\mathfrak{B}$-offene Menge $g^{-1}U(a)$ zu und erhalten so mit

$$\mathfrak{U}_g = \{g^{-1}U(a)\}_{a \in \mathfrak{K}}$$

eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$. Der Nerv von $\mathfrak{U}_g$ ist dem Komplex $\bar{K}$ isomorph.

Umgekehrt sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$. Die zu $\mathfrak{U}$ gehörige stetige Abbildung $g_{\mathfrak{U}}$ von $(R, \mathfrak{B})$ auf einen abstrakten Komplex K_0 erklären wir folgendermaßen: $g_{\mathfrak{U}}$ sei diejenige Abbildung von R in den Nerven $N(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$, welche jedem $p \in R$ die Menge aller $U_i (i \in I)$ zuordnet, die p enthalten. $g_{\mathfrak{U}}$ ist eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ in $N(\mathfrak{U})$ und eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ *auf* $K = g_{\mathfrak{U}} R \subset N(\mathfrak{U})$. Die Überdeckung $\mathfrak{U}_{g_{\mathfrak{U}}}$ ist der Überdeckung $\mathfrak{U}$ isomorph[8]). ebenso ist die Abbildung g zur Abbildung $g_{\mathfrak{U}_g}$ äquivalent, der Zusammenhang $\mathfrak{U} \to g_{\mathfrak{U}}$ zwischen den endlichen offenen Überdeckungen und den stetigen Abbildungen topologischer Gebilde auf abstrakte Komplexe K_0 ist also ein-eindeutig.

Ein genau entsprechender Zusammenhang besteht zwischen den stetigen Abbildungen von $(R, \mathfrak{B})$ auf Komplexe K_a und den endlichen abgeschlossenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

Zu je zwei Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ von $(R, \mathfrak{B})$ definieren wir eine Überdeckung $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ von $(R, \mathfrak{B})$: Ihre Indexmenge sei $I \times J$ und jedem Indexpaar (i, j) sei die Menge $U_i \cap V_j$ zugeordnet. Die Operation $\times$ ist kommutativ und assoziativ. $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ sei diejenige Abbildung von $N(\mathfrak{W})$ in $N(\mathfrak{U})$, für welche das Simplex $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} t$ aus allen U_i $(i \in I)$ besteht, zu welchen es ein $W_q \in t$ gibt mit $W_q \subset U_i$.

Nach Definition hat $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ folgende Eigenschaft:

Satz 1. *Sind* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{V}$ *zwei endliche offene Überdeckungen eines topologischen Gebildes* $(R, \mathfrak{B})$ *und* $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$, *so gilt:*

$$g_{\mathfrak{U}} = g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} \circ g_{\mathfrak{W}}.$$

$g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ *ist eine stetige Abbildung von* $g_{\mathfrak{W}} R$ *auf* $g_{\mathfrak{U}} R$.

Analog definiert man $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ und $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ für endliche abgeschlossene Überdeckungen.

---

[7]) $\mathfrak{K}$ sei die Menge aller Eckpunkte von K.

[8]) Zwei Überdeckungen heißen isomorph, wenn sich die Indexmengen so aufeinander ein-eindeutig beziehen lassen, daß entsprechenden Indizes die gleiche offene Menge zugeordnet ist.

III. Das Abbildungsschema.

Wir wollen die Gesamtheit der stetigen Abbildungen eines topologischen Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe K_0 in einem inversen Spektrum zusammenfassen. Um mengentheoretische Schwierigkeiten von vorneherein auszuschließen, beschränken wir uns auf ganz bestimmte Komplexe: Wir denken uns eine abzählbar unendliche Menge von Dingen $E = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, bilden die Menge B aller abstrakten Komplexe, deren sämtliche Eckpunkte aus E stammen und kommen überein unter abstrakten Komplexen künftig nur Komplexe aus B zu verstehen. B_0 bezeichne die Menge aller mit Rechtstopologie versehenen Komplexe aus B, B_a die Menge aller mit Linkstopologie versehenen Komplexe aus B.

Definition 5. *$(R, \mathfrak{B})$ sei ein topologisches Gebilde. Das Abbildungsschema von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 ist ein inverses Spektrum topologischer Räume mit folgenden Bestimmungsstücken:*

1. *Indexmenge I ist die Gesamtheit aller stetigen Abbildungen von $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe mit Rechtstopologie.*

2. *I sei durch die folgende Relation $\leq$ teilweise geordnet: Es sei $g' \geq g$, wenn es eine stetige Abbildung s von $g'R$ auf gR gibt, welche $g = s \circ g'$ erfüllt.*

(Nach Satz 1 gibt es zu je zwei Abbildungen $g_1 \in I$ und $g_2 \in I$ eine Abbildung g mit $g \geq g_1$ und $g \geq g_2$.)

3. *Jeder Abbildung g wird als topologischer Raum der abstrakte Komplex gR (mit Rechtstopologie) zugeordnet.*

4. *Ist $g' \geq g$, so sei die stetige Abbildung s mit $g = s \circ g'$ von $g'R$ auf gR Projektion von g' in g.*

(Die Abbildung s ist eindeutig bestimmt, denn g und g' sind Abbildungen auf gR und $g'R$, weshalb aus $g = s_1 \circ g'$ und $g = s_2 \circ g'$ die Gleichheit $s_1 = s_2$ folgen muß.)

Analog lautet die Definition des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_a.

Nach Abschnitt I können wir das Abbildungsschema ebensogut als inverses Spektrum topologischer Gebilde auffassen.

Entsprechend dem ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen endlichen Überdeckungen und stetigen Abbildungen auf abstrakte Komplexe führen wir jetzt das Abbildungsschema auf ein inverses Spektrum von Überdeckungsnerven zurück:

Das *Schema der endlichen offenen Überdeckungen des topologischen Gebildes* $(R, \mathfrak{B})$ definieren wir[9]) durch die Bestimmungsstücke:

1. Indexmenge J sei die Menge aller endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

2. Es sei $\mathfrak{V} >' \mathfrak{U}$, wenn es eine Überdeckung $\mathfrak{V}$ gibt, so daß $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ ist. (Die Relation $<'$ ist transitiv, da $\times$ assoziativ ist.)

[9]) Analog definiert man das Schema der endlichen abgeschlossenen Überdeckungen.

3. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U} \in J$ wird der Komplex $g_{\mathfrak{U}} R$ zugeordnet.

4. Ist $\mathfrak{W} >' \mathfrak{U}$, so sei $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ Projektion von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}$, so sei die identische Abbildung Projektion von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$.

Das Limesgebilde dieses Schemas ist homöomorph dem Limesgebilde des Abbildungsschemas. Denn ersetzt man in dem Abbildungsschema jede stetige Abbildung durch die entsprechende Überdeckung, so entsteht ein neues Spektrum mit der Indexmenge J und einer Ordnungsrelation $\leq$, welches in J mit der Teilordnung[10]) $\leq'$ von $\leq$ das Überdeckungsschema induziert.

s sei eine stetige Abbildung des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$. Die Abbildung k, welche jeder stetigen Abbildung f von $(R, \mathfrak{B})$ auf einen abstrakten Komplex die stetige Abbildung

$$g = f \circ s$$

von $(R', \mathfrak{B}')$ auf denselben Komplex zuordnet, ist eine kanonische Abbildung des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ in das Abbildungsschema von $(R', \mathfrak{B}')$, sie heißt die von s erzeugte kanonische Abbildung.

Es sei R ein beliebiger T_0-Raum, $\mathfrak{B}$ ein System offener Mengen von R mit den Eigenschaften 1 und 2 aus Definition 1. In welcher Beziehung steht nun R zu dem Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$? Darüber gibt folgender Satz Auskunft:

Satz 2. *Ist R ein T_0-Raum, $(R, \mathfrak{B})$ ein topologisches Gebilde, L der Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 oder der Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_a, so kann R in L eingebettet werden.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall des Abbildungsschemas relativ zu B_0, der Beweis verläuft für B_a analog, wenn man nur sinngemäß das System $\mathfrak{B}$ durch das System der $\mathfrak{B}$-abgeschlossenen Mengen, Komplexe K_0 durch K_a und offene Überdeckungen durch abgeschlossene ersetzt.

1. Zuerst konstruieren wir eine ein-eindeutige Abbildung $\mathfrak{J}$ von R auf eine Teilmenge Q von L. Jedem $p \in R$ wird das durch

$$q_g = g\,p \qquad (g \in I)$$

definierte Element $\mathfrak{J}\,p$ von L zugeordnet. Es sei $Q = \mathfrak{J} R$.

Aus $p \neq q$ folgt $\mathfrak{J}\,p \neq \mathfrak{J}\,q$. Denn es gibt eine offene Menge $O \in \mathfrak{B}$, welche einen der beiden Punkte p, q nicht enthält. Sei $\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$, welche O enthält, so muß $g_{\mathfrak{U}}\,p \neq g_{\mathfrak{U}}\,q$, also $\mathfrak{J}\,p \neq \mathfrak{J}\,q$ sein. $\mathfrak{J}$ ist also eine ein-eindeutige Abbildung von R auf Q.

2. Wir zeigen, daß $\mathfrak{J}$ eine topologische Abbildung von R auf den Teilraum $Q \subset L$ ist. Die Topologie $\mathcal{T}$ von R ist die am wenigsten feine, für welche jede Abbildung $g \in I$ stetig ist. Denn ist $\mathcal{T}'$ eine weniger feine Topologie derselben Eigenschaft, O eine beliebige $\mathfrak{B}$-offene Menge und

[10]) Nach Satz 1 ist $\leq'$ Teilordnung von $\leq$.

$\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$, welche O enthält, dann muß die Abbildung $g_{\mathfrak{U}}$ nach Voraussetzung auch für $\mathcal{T}'$ stetig sein. Das bedeutet aber, daß O auch für $\mathcal{T}'$ eine offene Menge ist. Also ist, da O beliebig aus B gewählt wurde, $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$.

Andererseits ist aber nach Definition des Limesraumes die Topologie S von Q die am wenigsten feine Topologie, für welche jede Abbildung f_ν stetig ist.

Wegen

$$g = f_\nu \circ \mathfrak{Z}$$

muß $\mathfrak{Z}$ eine topologische Abbildung sein.

Besonderes Interesse verdienen nun solche Räume, zu welchen ein System $\mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft $R \approx L$ existiert. Es wird sich herausstellen, daß Räume dieser Art — in ihrer Gesamtheit — durch inverse Limesbildung aus den abstrakten Komplexen gewonnen werden können.

Zur Vermeidung mengentheoretischer Widersprüche müssen wir uns aber zunächst — ähnlich wie bei den Komplexen — auf eine wohldefinierte Gesamtheit topologischer Räume festlegen.

Wir denken uns eine Menge M beliebig, aber ein für allemal fest vorgegeben und betrachten die Menge $\mathfrak{M}$ aller Räume, deren Punkte aus M stammen. Zu dieser Menge $\mathfrak{M}$ nehmen wir noch die Mengen B_0 und B_a aller abstrakten Komplexe hinzu und erhalten so einen Vorrat $\mathfrak{B}$ topologischer Räume, der je nach Wahl der Mächtigkeit α von M bis auf Homöomorphie alle topologischen Räume enthält, deren Mächtigkeit α nicht übersteigt. Wir kommen überein, unter topologischen Räumen künftig nur Räume aus $\mathfrak{B}$ zu verstehen und lassen nur solche topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ zu, für welche R aus $\mathfrak{B}$ stammt.

Eine beliebige Menge topologischer Räume bzw. topologischer Gebilde nennen wir einen Bereich. Ein Bereich B heißt inverse Basis eines Bereichs Ω, wenn jeder Raum von Ω dem Limesraum eines inversen Spektrums über B[11]) homöomorph ist und jeder Limesraum eines inversen Spektrums über B zu Ω gehört. Ein Bereich Ω heißt invers abgeschlossen, wenn jeder Limesraum eines inversen Spektrums über Ω auch zu Ω gehört.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{T}$ ein inverses Spektrum abstrakter Komplexe mit Rechtstopologie (bzw. Linkstopologie) und $(R, \mathfrak{B})$ das Limesgebilde von $\mathfrak{T}$, dann ist $(R, \mathfrak{B})$ dem Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 (bzw. B_a) homöomorph.*

Beweis. Wir beweisen, daß das Spektrum $\mathfrak{T}$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas relativ B_0 ist[12]).

Sei g eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ auf einen abstrakten Komplex K_0 und $(U_i)_{i \in I}$ die offene Überdeckung $\mathfrak{U}_g$ von $(R, \mathfrak{B})$. Zu jedem

[11]) Das heißt ein inverses Spektrum, dessen topologische Räume zu B gehören.

[12]) Dieser Beweis, sowie die Beweise von Satz 4, 5 und 6 sind nur für den Bereich B_0 geführt, da die entsprechenden Beweise für B_a analog verlaufen.

Index $i \in I$ gibt es in der Indexmenge von $\mathfrak{T}$ einen Index $\gamma(i)$, für welchen eine offene Menge $O_i \in K_{\gamma(i)}$ existiert mit $U_i = f^{-1}_{\gamma(i)} O_i$. Wir denken uns zu jedem Überdeckungselement U_i von $\mathfrak{U}_g$ einen Index $\gamma(i)$ ausgewählt. Wir bestimmen nun in der Indexmenge von $\mathfrak{T}$ einen Index γ, der größer ist als alle $\gamma(i)$ $(i \in I)$. In $K_{\gamma 0}$ gibt es zu jedem U_i eine offene Menge Q_i mit

$$U_i = f_\gamma^{-1} Q_i.$$

Die identische Abbildung von I auf sich bildet die Überdeckung $\mathfrak{U}_g = (U_i)_{i \in I}$ isomorph auf die Überdeckung $(Q_i)_{i \in I}$ von $K_{\gamma 0}$ ab. Also existiert eine stetige Abbildung s von $K_{\gamma 0}$ auf K_0, welche $g = s \circ f_\gamma$ erfüllt, womit gezeigt ist, daß $\mathfrak{T}$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas ist.

Definition 6. *Ω_0 (bzw. Ω_a) bezeichne den Bereich aller topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, welche mit dem Limesgebilde ihres Abbildungsschemas relativ zu B_0 (bzw. B_a) homöomorph sind. Ebenfalls bezeichnen wir mit Ω_0 (bzw. Ω_a) den Bereich aller topologischen Räume R, zu welchen ein topologisches Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ existiert, welches Ω_0 (bzw. Ω_a) angehört.*

Satz 4. *B_0 ist eine Basis von Ω_0. B_a ist eine Basis von Ω_a.*

Beweis. Wir fassen B_0 und Ω_0 als Bereiche topologischer Gebilde auf. Ist $\mathfrak{S}$ ein inverses Spektrum abstrakter Komplexe mit Rechtstopologie, so gehört das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$ nach Satz 3 zu Ω_0. Ist $(R, \mathfrak{B})$ ein Gebilde aus Ω_0, so muß nach Definition $(R, \mathfrak{B})$ homöomorph dem Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0 sein.

Der Satz gilt natürlich ebenso, wenn B_0 und Ω_0 als Bereiche topologischer *Räume* aufgefaßt werden.

Satz 5. *Die Bereiche Ω_0 und Ω_a sind invers abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}$ ein inverses Spektrum topologischer Gebilde über Ω_0, I seine Indexmenge. $(R, \mathfrak{B})$ sei das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$.

Wir greifen aus der Indexmenge J des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0 eine Teilmenge J' heraus: Sie bestehe aus all den stetigen Abbildungen g von R auf abstrakte Komplexe, die sich in der Form

$$g = s \circ f_\alpha \qquad (\alpha \in I)$$

darstellen lassen, in welcher s eine stetige Abbildung von $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ auf einen abstrakten Komplex ist. Diese Menge J' definiert ein Teilspektrum $\mathfrak{A}'$ des Abbildungsschemas. Seinen Limesraum bezeichnen wir mit $(L, \mathfrak{L})$.

$(R, \mathfrak{B})$ und $(L, \mathfrak{L})$ sind homöomorph. Zum Beweis dieser Behauptung stellen wir zunächst die Eigenschaften der Punkte von L und R fest:

Die Punkte von R sind als Familien

$$(p_\alpha)_{\alpha \in I} \qquad p_\alpha \in R_\alpha$$

definiert, welche für jedes Paar $\alpha > \beta$ die Relation

$$p_\alpha = \pi_{\beta\alpha} p_\beta \tag{1}$$

erfüllen.

Die Punkte von L sind als Familien

$$(q_g)_{g\in J'} \qquad q_g \in g\,L$$

definiert, welche

$$q_g = r_{hg}\,q_h \tag{2}$$

erfüllen, wenn

$$g = r_{hg} \circ h$$

ist und r_{hg} eine stetige Abbildung von hR auf gR ist.

Jedem Punkt $p=(p_\alpha)_{\alpha\in I}\in R$ ordnen wir einen Punkt $\mathfrak{J}\,p=(q_g)_{g\in J'}$ von L zu durch

$$q_g = s\,p_\alpha,$$

wenn $g = s\circ f_\alpha$ ist ($\alpha\in I$, s stetige Abbildung von R_α auf $gR=sR_\alpha$).

q_g ist von der gewählten Zerlegung $g=s\circ f_\alpha$ unabhängig und $(q_g)_{g\in J'}$ erfüllt Bedingung (2).

Umgekehrt sei $q=(q_g)_{g\in J'}$ ein Punkt von L. Wir definieren zu q einen Punkt $\mathfrak{J}'q=(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ von R:

p_α soll derjenige Punkt von R_α sein, welcher für jede stetige Abbildung s von R_α auf einen Komplex sR_α

$$s\,p_\alpha = q_g \qquad (g = s\circ f_\alpha)$$

erfüllt. $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ existiert, da $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist, und (q_g) Bedingung (2) gehorcht.

Offenbar ist $\mathfrak{J}'=\mathfrak{J}^{-1}$, $\mathfrak{J}$ ist also eine ein-eindeutige Abbildung von R *auf* L.

$\mathfrak{J}$ ist aber auch eine topologische Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ auf $(L, \mathfrak{L})$. Um das zu beweisen, vergleichen wir die Systeme $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}^{-1}\,\mathfrak{L}$ offener Mengen in R:

Zu jeder $\mathfrak{B}$-offenen Menge U von R gibt es einen Index $\alpha\in I$ und eine offene Menge O von R_α, so daß

$$U = f_\alpha^{-1}O$$

ist. Zu O wiederum gibt es eine stetige Abbildung s von R_α auf einen abstrakten Komplex sR_α und eine offene Menge V von sR_α, so daß

$$O = s^{-1}V$$

und somit

$$U = (s\circ f_\alpha)^{-1}V \tag{3}$$

ist. $\mathfrak{B}$ besteht aus allen Mengen U, die sich in der Form (3) darstellen lassen.

Zu jeder $\mathfrak{J}^{-1}\,\mathfrak{L}$-offenen Menge in R gibt es eine stetige Abbildung $g\in J'$ von R auf einen abstrakten Komplex gR, so daß

$$U = g^{-1}\,V$$

ist. Zu g gibt es einen Index $\alpha \in I$ und eine stetige Abbildung s von R_α auf $gR = sR_\alpha$ mit

$$g = s \circ f_\alpha,$$

so daß

$$U = (s \circ f_\alpha)^{-1} V \tag{4}$$

ist. Also ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{L}$, und $\mathfrak{J}$ eine topologische Abbildung.

IV. Direkte und inverse Gruppenfunktionen.

Definition 7. *Eine inverse (direkte) Gruppenfunktion F über einem Bereich B topologischer Gebilde ordnet jedem topologischem Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ aus B eine Gruppe $F(R, \mathfrak{B})$ und jeder stetigen Abbildung s eines Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in ein Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ einen Homomorphismus $F(s)$ von $F(R', \mathfrak{B}')$ in $F(R, \mathfrak{B})$ (bzw. einen Homomorphismus von $F(R, \mathfrak{B})$ in $F(R', \mathfrak{B}')$) zu, der folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Aus $s = s_1 \circ s_2$ folgt $F(s) = F(s_1) \circ F(s_2)$ bzw. $F(s) = F(s_2) \circ F(s_1)$.*
2. *Ist s eine topologische Abbildung, so ist $F(s)$ eine Isomorphie.*
3. *Aus $s_1 \approx s_2$ folgt $F(s_1) \approx F(s_2)$*[13]*.*

F liefert zu jedem inversen Spektrum $\mathfrak{S}$ über B ein inverses Gruppenspektrum $F(\mathfrak{S})$ mit folgenden Bestimmungsstücken[14]:

1. und 2. Die Indexmenge von $F(\mathfrak{S})$ und deren Ordnung stimmen mit der Indexmenge I von $\mathfrak{S}$ und deren Ordnung überein.

3. Dem Index $\alpha \in I$ wird die Gruppe $F(R_\alpha)$ zugeordnet.

4. Für jedes Indexpaar $\alpha \geq \beta$ aus I ist $F(\pi_{\alpha\beta})$ Projektion von α in β.

Ist k eine kanonische Abbildung des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ über B in das inverse Spektrum $\mathfrak{T}$ über B, also auch kanonische Abbildung von $F(\mathfrak{S})$ in $F(\mathfrak{T})$, so bezeichne $F(k)$ den zu k gehörigen Homomorphismus von $\varprojlim F(\mathfrak{T})$ in $\varprojlim F(\mathfrak{S})$.

Eine Gruppenfunktion F über B heißt stetig, wenn

1. für jedes inverse Spektrum $\mathfrak{S}$ über B, dessen Limesgebilde zu B gehört[15],

$$F(\varprojlim \mathfrak{S}) \approx \varprojlim F(\mathfrak{S})$$

ist,

2. für jede kanonische Abbildung k eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ über B ($\varprojlim \mathfrak{S} \in B$)[15] in ein inverses Spektrum $\mathfrak{T}$ über B ($\varprojlim \mathfrak{T} \in B$)[15] die

[13] s_1 sei eine stetige Abbildung des Raumes R_1' in den Raum R, s_2 eine stetige Abbildung des Raumes R_2' in den Raum R. s_1 heißt äquivalent zu s_2, in Zeichen $s_1 \approx s_2$, wenn es eine topologische Abbildung J' von R_1' auf R_2' und eine topologische Abbildung J von R auf R gibt, so daß $s_2 = J \circ s_2 \circ J'^{-1}$ ist: Analog für topologische Gebilde und Gruppen.

[14] Diese Definition wenden wir im letzten Abschnitt auch auf nichteinfache Spektren an.

[15] Diese Bedingung ist überflüssig, falls B abgeschlossen ist.

zugehörige Abbildung s von $\varprojlim \mathfrak{T}$ in $\varprojlim \mathfrak{S}$ die Bedingung

$$F(s) \approx F(k)$$

erfüllt.

Satz 6. *Jede inverse (direkte) Gruppenfunktion über B_0 (bzw. B_a) läßt sich bis auf Isomorphie auf eine und nur eine Weise in eine stetige inverse (direkte) Gruppenfunktion über Ω_0 (bzw. Ω_a) fortsetzen.*

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß eine inverse Gruppenfunktion F über B_0 nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden kann:

Jedes Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ aus Ω_0 ist dem Limesgebilde des Abbildungsschemas $\mathfrak{A}$ von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 homöomorph. Also muß $F(R, \mathfrak{B})$ der Limesgruppe des inversen Spektrums $F(\mathfrak{A})$ isomorph sein.

s sei eine stetige Abbildung des Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$ seien die Abbildungsschemen von $(R', \mathfrak{B}')$ und $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0. s definiert eine kanonische Abbildung k von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, welche ihrerseits eine stetige Abbildung h von $\varprojlim \mathfrak{A}'$ in $\varprojlim \mathfrak{A}$ hervorruft, deren Homomorphismus $F(h)$ nach Bedingung (2) durch $F(k)$ bis auf Äquivalenz festgelegt ist. Wegen $s \approx h$ folgt aber $F(s) \approx F(h)$, womit die Eindeutigkeit von F bis auf Isomorphie in allen Stücken bewiesen ist.

Wir müssen noch zeigen, daß die durch

$$F(R, \mathfrak{B}) = \varprojlim F(\mathfrak{A}),$$
$$F(s) = F(k)$$

definierte inverse Gruppenfunktion über Ω_0 tatsächlich stetig ist:

$\mathfrak{S}$ sei ein inverses Spektrum über Ω_0, $(R, \mathfrak{B})$ das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{A}$ sei das Abbildungsschema von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0, $\mathfrak{A}'$ und $(L, \mathfrak{L})$ haben im folgenden dieselbe Bedeutung wie im Beweis von Satz 5. Dann ist nach Definition von $\mathfrak{A}'$:

$$\varprojlim F(\mathfrak{A}') \approx \varprojlim F(\mathfrak{S}).$$

Da nach dem Beweis von Satz 3 $\mathfrak{A}'$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas $\mathfrak{A}$ ist, folgt:

$$\varprojlim F(\mathfrak{A}') \approx \varprojlim F(\mathfrak{A}) = F(R, \mathfrak{B}).$$

Also ist

$$\varprojlim F(\mathfrak{S}) \approx F(R, \mathfrak{B}).$$

Ebenso einfach beweist man die Stetigkeit von F für jede stetige Abbildung s.

Der entsprechende Beweis für direkte Gruppenfunktionen verläuft analog.

Definition 8. *Wir erklären eine inverse Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ (eine direkte Gruppenfunktion $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0$) über dem Bereich $B_0 (n \geq 1)$. $\mathfrak{H}_n^0(K_0)$ $(\tilde{\mathfrak{H}}_n^0(K_0))$ sei durch die in der üblichen Weise eingeführte n-te Homologiegruppe (Cohomologiegruppe) des Komplexes $\bar{K}$ gegeben. Ist s eine stetige Abbildung des abstrakten Komplexes L_0 in den abstrakten Komplex K_0, so*

sei $\mathfrak{H}_n^0(s)$ $(\tilde{\mathfrak{H}}_n^0(s))$ *der durch* $\bar{s}$ *hervorgerufene Homomorphismus von* $\mathfrak{H}_n^0(L_0)$ *in* $\mathfrak{H}_n^0(K_0)$ *(von* $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0(K_0)$ *in* $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0(L_0)$*)* [16].

Diese inverse Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ über B_0 (direkte Gruppenfunktion $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0$ über B_0) läßt sich nach Satz 6 in eindeutiger Weise in eine stetige Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ (direkte Gruppenfunktion $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0$) über dem Bereich Ω_0 fortsetzen. Ist $(R, \mathfrak{B})$ ein Gebilde aus Ω_0, so nennen wir $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ die n-te Homologiegruppe von $(R, \mathfrak{B})$.

Das gleiche gilt für die Bereiche B_a und Ω_a.

Damit sind zunächst nur Invarianten topologischer Gebilde gewonnen, es wird aber im nächsten Abschnitt bewiesen, daß für jeden Raum $R \in \Omega_0$ die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$ ganz unabhängig ist, womit dann die eigentliche topologische Invarianz der Homologiegruppen gezeigt ist.

V. Invarianz der Homologie- und Cohomologiegruppen.

Um die Invarianz der Homologiegruppen (Cohomologiegruppen) zu beweisen, nehmen wir das von Čech eingeführte Spektrum $\mathfrak{T}_0$ der endlichen offenen Überdeckungen eines topologischen Gebildes zu Hilfe. $\mathfrak{T}_0$ hat folgende Bestimmungsstücke:

1. Die Indexmenge J besteht aus allen endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

2. $\mathfrak{B}$ heißt Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, in Zeichen $\mathfrak{B} \geq'' \mathfrak{U}$, wenn es zu jedem Überdeckungselement V_i von $\mathfrak{B}$ ein Überdeckungselement U_j von $\mathfrak{U}$ gibt mit $V_i < U_j$.

3. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ wird ihr Nerv $N(\mathfrak{U})$ zugeordnet.

4. Für $\mathfrak{B} \geq'' \mathfrak{U}$ ist jede simpliziale Abbildung π von $N(\mathfrak{B})$ in $N(\mathfrak{U})$ mit $V < \pi V$ Projektion von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{U}$.

Dieses Spektrum ist im allgemeinen nicht einfach, da in der Regel mehrere Projektionsmöglichkeiten existieren. Sein Limesraum ist im allgemeinen dem Limesraum des Abbildungsschemas *nicht* homöomorph. Jedoch ist das aus $\mathfrak{T}_0$ abgeleitete Gruppenspektrum $\mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0)$ einfach, da — nach einem bekannten Satz der kombinatorischen Topologie — der zu einer Projektion π gehörige Homomorphismus von der Wahl der Projektion π unabhängig ist.

Da aus $\mathfrak{B} \geq' \mathfrak{U}$ stets $\mathfrak{B} \geq'' \mathfrak{U}$ folgt, ist

$$\varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0) \approx \varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{S}) \quad (\mathfrak{S} \text{ sei das Abbildungsschema relativ } B_0)$$

also

$$\varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0) \approx \mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B}).$$

Satz 7. *Für jeden Raum* $R \in \Omega_0$ *ist* $\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})$ *vollständiges Teilspektrum von* $\mathfrak{T}(R, \mathfrak{D}(R))$.

Beweis. R ist als Limesraum eines inversen Spektrums endlicher Räume bikompakt, also gibt es zu jeder endlichen offenen Überdeckung

[16]) Genau entsprechend lautet die Definition für die Bereiche B_a und Ω_a.

von $(R, \mathfrak{O}(R))$ unter den endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$ eine Verfeinerung.

Es ist also auch das Gruppenspektrum $\mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ vollständiges Teilspektrum von $\mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{O}(R))]$, womit die Invarianz bewiesen ist:

Satz 8. *Ist R ein beliebiger topologischer Raum aus dem Bereich Ω_0, und sind $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ zwei topologische Gebilde aus Ω_0, so sind die n-ten Homologie- bzw. Cohomologiegruppen relativ B_0 von $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ isomorph. Die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ ist also eine topologische Invariante von R.*

Wir beweisen den entsprechenden Satz für die Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^a$:

Satz 8'. *Ist R ein beliebiger Raum aus dem Bereich Ω_a, und sind $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ zwei topologische Gebilde aus Ω_a, so sind die n-ten Homologie- und Cohomologiegruppen relativ zu B_a von $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ isomorph.*

Beweis. Satz 7 gilt nicht in der analogen Form für abgeschlossene Überdeckungen. Wir müssen deshalb anders vorgehen: R ist bikompakt, also läßt sich aus jeder Familie abgeschlossener Mengen von R, deren Durchschnitt leer ist, eine endliche Teilfamilie auswählen, deren Durchschnitt ebenfalls leer ist. Da jede abgeschlossene Menge von R Durchschnitt einer Familie $\mathfrak{B}$-abgeschlossener Mengen ist, gibt es zu jeder endlichen abgeschlossenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $(R, \mathfrak{O}(R))$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{U}'$ von $(R, \mathfrak{B})$, so daß $\mathfrak{U} \geq'' \mathfrak{U}'$ ist und eine Projektion von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{U}'$ existiert, welche $N(\mathfrak{U})$ auf $N(\mathfrak{U}')$ isomorph abbildet. Ist ferner die endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ und π eine Projektion von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$, so gibt es eine $\mathfrak{B}$-abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{V}'$ mit $\mathfrak{V} \geq'' \mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}' \geq'' \mathfrak{U}'$ und einer zu π äquivalenten Projektion π' von $\mathfrak{V}'$ in $\mathfrak{U}'$.

Die identische Abbildung von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ auf $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})] < \mathfrak{H}_n^a(R, \mathfrak{O}(R))$, aufgefaßt als kanonische Abbildung, bildet also die Limesgruppe von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{O}(R))]$ isomorph auf die Limesgruppe von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ ab.

R sei ein beliebiger topologischer Raum, $(L, \mathfrak{L})$ das Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{O}(R))$ relativ B_0, dann können wir die n-te Homologiegruppe von $(L, \mathfrak{L}) \in \Omega_0$ als n-te Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R)$ von R bezeichnen. Denn sie ist topologisch invariant und liefert für $R \in \Omega_0$ die durch Satz 8 erklärte n-te Homologiegruppe von R. $\mathfrak{H}_n^0(R)$ ist offenbar der von Čech eingeführten Homologiegruppe $\varprojlim \mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{O}(R))]$ isomorph. Aus Satz 2 ergibt sich noch:

Satz 9. *Ein beliebiger T_0-Raum R läßt sich in einen bikompakten Raum L so einbetten, daß L und R isomorphe* Čech*-Homologiegruppen besitzen.*

(Eingegangen am 7. September 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 312—325 (1952).

Über reduzierte freie Liesche Ringe.

Von

Franz Wever in Mainz.

Einleitung.

§ 1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein freier Ring aus k freien Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ über dem Körper der rationalen Zahlen als Koeffizientenbereich. In $\mathfrak{A}$ sollen beide assoziative Gesetze gelten, das kommutative nur bezüglich der Addition. Die Erzeugenden a_i sollen hinsichtlich der Multiplikation mit ihren Koeffizienten, aber nicht untereinander, vertauschbar sein. Ferner gelte das distributive Gesetz. $\mathfrak{A}$ heiße kurz *assoziativer Ring*.

In $\mathfrak{A}$ werde nun noch eine Liesche *Multiplikation* eingeführt durch

$$[r\,s] = r\,s - s\,r.$$

Alle Polynome in $\mathfrak{A}$, die sich allein durch Addition und diese Liesche Multiplikation aus den Erzeugenden mit rationalen Koeffizienten bilden lassen, sollen Liesche *Polynome* in $\mathfrak{A}$ heißen. In dem Modul $\mathfrak{L}$ aller Lieschen Polynome aus $\mathfrak{A}$ gelten die Identitäten

$$[r\,s] + [s\,r] = 0, \tag{1}$$

$$[[r\,s]\,t] + [[s\,t]\,r] + [[t\,r]\,s] = 0, \tag{2}$$

$$[r\,r] = 0. \tag{3}$$

Wie Magnus [1] gezeigt hat, kann $\mathfrak{L}$ dann bezüglich Addition und Liescher Multiplikation als ein freier Liescher Ring in den Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ angesehen werden. Die Bezeichnung „frei" soll dabei besagen, daß in $\mathfrak{L}$ keine weiteren Identitäten gelten als solche, die aus (1), (2) und (3) folgen.

Mit $\mathfrak{A}_m$ werde der Modul aller Polynome in $\mathfrak{A}$ bezeichnet, die homogen vom Grade m in den Erzeugenden sind, mit $\mathfrak{L}_m$ der Modul aller Lieschen Polynome in $\mathfrak{A}_m$. Im ersten Teil wird gezeigt, daß $\mathfrak{L}_m$ in $\mathfrak{A}_m$ durch Benutzung von Operatoren gebildet werden kann, die sich als Elemente des Gruppenringes $\mathfrak{s}_m$ der symmetrischen Gruppe von m Gegenständen deuten lassen, und zwar bilden diese Operatoren ein Rechtsideal Ω_m innerhalb der halbeinfachen Algebra $\mathfrak{s}_m$.

In $\mathfrak{L}$ werden nun auf folgende Weise *vollinvariante Ideale* definiert. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Ideal in $\mathfrak{L}$, d.h. mit p, q in $\mathfrak{M}$, liege auch $\lambda p + \mu q$ für rationale λ, μ in $\mathfrak{M}$ und mit p in $\mathfrak{M}$, w beliebig aus $\mathfrak{L}$, liege auch $[p\,w]$ in $\mathfrak{M}$. Es sei noch $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}_m$ für $m = 1, 2, \ldots$. Das Ideal $\mathfrak{M}$ heiße dann vollinvariant in $\mathfrak{L}$, wenn noch gilt:

(a) Jede lineare Transformation U der Erzeugenden von $\mathfrak{L}$ bildet jeden Teilmodul $\mathfrak{M}_m$ in sich ab, d.h., es ist $U\mathfrak{M}_m \subseteq \mathfrak{M}_m$.

(b) Jede homomorphe Abbildung S von $\mathfrak{L}$ bildet jeden Teilmodul $\mathfrak{M}_m$ in das von $\mathfrak{M}_m$ in $\mathfrak{L}$ erzeugte Ideal $\{\mathfrak{M}_m\}$ ab, d. h., es ist $S\ \mathfrak{M}_m \subseteq \{\mathfrak{M}_m\}$.

Der Faktorring $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ des LIEschen Ringes $\mathfrak{L}$ nach einem solchen vollinvarianten Ideal $\mathfrak{M}$ heiße dann ein *reduzierter freier* LIE*scher Ring*.

Diese Definition ist handlich für die hier beabsichtigte Untersuchung. Sie läßt sich aber ersetzen durch eine andere, die Eigenschaften von L unmittelbar benutzt. Es sei $p(a_1, \ldots, a_k)$ ein LIEsches Polynom aus $\mathfrak{L}$. das in einem vollinvarianten Ideal $\mathfrak{M}$ liege. Dann liegt wegen der Vollinvarianz von $\mathfrak{M}$ auch jedes LIEsche Polynom $p(u_1, \ldots, u_k)$ in $\mathfrak{M}$, das aus $p(a_1, \ldots, a_k)$ entsteht, wenn die Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{L}$ durch beliebige Elemente $u_1, \ldots, u_k$ aus $\mathfrak{L}$ ersetzt werden. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß im reduzierten freien LIEschen Ring $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ das Polynom $p(x_1, \ldots, x_k)$ für alle x_i aus L nur den Wert Null annimmt. Ein Polynom mit der Eigenschaft $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle x_i aus L heiße eine *Regel* in L. Die oben genannte Definition ist dann gleichbedeutend mit der folgenden: Ein LIEscher Ring heißt reduziert frei, wenn jede Relation zwischen den Erzeugenden eine Regel ist.

Im zweiten Teil wird bewiesen, daß die Teilmoduln $\mathfrak{M}_m$ in $\mathfrak{L}_m$ für jedes m durch Operatoren aus $\mathfrak{s}_m$ gebildet werden können, die in einem Rechtsideal Ψ_m von $\mathfrak{s}_m$ liegen, das Unterideal von Ω_m ist.

MAGNUS [1] hat gezeigt, daß die freien LIEschen Ringe ein wirksames Hilfsmittel bei der Untersuchung freier Gruppen sind (siehe dazu auch WEVER [2]). BAER [3] nennt eine Gruppe reduziert frei, wenn sie sich als Faktorgruppe einer freien Gruppe nach einer vollinvarianten Untergruppe darstellen läßt. Es sind dies also solche Gruppen, in denen jede Relation zwischen den Erzeugenden eine Regel (identische Relation) ist, wenn der Begriff der Regel entsprechend für Gruppen definiert wird. Diese Bezeichnung ist hier auf LIEsche Ringe übertragen, da ein reduzierter freier LIEscher Ring einer reduzierten freien Gruppe zugeordnet werden kann. Hierbei entspricht das vollinvariante Ideal gerade der vollinvarianten Untergruppe.

Die hier mitgeteilten Ergebnisse sind im Hinblick auf ihre gruppentheoretische Anwendbarkeit entstanden, die gruppentheoretischen Schlüsse sollen in dieser Arbeit jedoch nicht weiter ausgeführt werden. Eine kurze Bemerkung darüber befindet sich noch im Schlußabsatz.

SPECHT [4, 5] behandelt allgemein Ringe mit Regeln, die er „Gesetze" nennt. Einige der dort abgeleiteten Sätze decken sich mit den hier gefundenen; im folgenden ist darauf stets hingewiesen.

I. Freie Liesche Ringe.

§ 2. Die in der Einleitung angedeutete Konstruktion der Moduln $\mathfrak{L}_m$ des LIEschen Ringes $\mathfrak{L}$ innerhalb der Moduln $\mathfrak{A}_m$ des assoziativen Ringes $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von Operatoren soll jetzt ausführlich dargestellt werden.

Es sei $\mathfrak{S}_m$ die symmetrische Gruppe von der Ordnung $m!$ und σ_μ ($\mu = 1, \ldots, m!$) seien ihre Elemente, wobei $\varepsilon = \sigma_1$ stets die Identität bezeichne. Dann besteht der Gruppenring $\mathfrak{s}_m$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$ über dem Körper der rationalen Zahlen aus allen Linearverbindungen

$$\varrho = \sum_{\mu=1}^{m!} r_\mu \sigma_\mu, \qquad r_\mu \text{ rational}.$$

Es ist zweckmäßig, nichtkommutative Unbestimmte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ einzuführen. $\sigma(\xi) = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ bezeichne dann das Produkt der ξ_i in einer Reihenfolge, die die Permutation σ aus der Grundanordnung $\xi_1, \ldots, \xi_m$ durch Vertauschung der *Stellen* bewirkt. Zum Beispiel ist für $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ dieses Produkt $\sigma(\xi) = \xi_4\, \xi_1\, \xi_2\, \xi_3$. Der durch alle linear unabhängigen Produkte $\sigma_\mu(\xi)$, $\mu = 1, \ldots, m!$ erzeugte Modul werde mit Ξ_m bezeichnet. Jedes Polynom $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ in Ξ_m ist dann eine Linearverbindung von Produkten der ξ_i, und zwar kommt jede Variable in jedem Summanden genau einmal vor. Zu jedem $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ gehört eindeutig umkehrbar ein Operator φ aus $\mathfrak{s}_m$, so daß $p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi(\xi)$. Allgemein bedeute $\varrho(\varphi(\xi)) = \varrho\varphi(\xi)$, $\mathfrak{s}_m$ ist damit als ein Ring von Stellenoperatoren auf Ξ_m erklärt. Wir schreiben dafür kurz

$$\Xi_m = \mathfrak{s}_m(\xi). \tag{4}$$

Der Modul $\mathfrak{A}_m$ entsteht aus Ξ_m, wenn die $\xi_1, \ldots, \xi_m$ in allen möglichen Anordnungen durch die Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{A}$ ersetzt werden, wobei auch an die Stelle verschiedener ξ_i das gleiche a_j treten darf. Der Weg, über den ein bestimmtes Polynom in $\mathfrak{A}_m$ gebildet werden kann, ist dann natürlich nicht eindeutig festgelegt. Werden die Operatoren aus $\mathfrak{s}_m$ jetzt auch als Stellenoperatoren auf $\mathfrak{A}_m$ zugelassen, dann ist $\mathfrak{A}_m$ invariant gegenüber $\mathfrak{s}_m$, es ist

$$\mathfrak{s}_m(\mathfrak{A}_m) = \mathfrak{A}_m. \tag{5}$$

Nach MAGNUS [1] werden nun für jedes $m = 1, 2, \ldots$ Operatoren ω_m eingeführt, die einer mündlichen Mitteilung von GRÜN zu verdanken sind:

$$\omega_1 = \varepsilon,$$

$$\omega_2 = \varepsilon - \pi_2,$$

$$\ldots$$

$$\omega_m = (\varepsilon - \pi_m)(\varepsilon - \pi_{m-1}) \ldots (\varepsilon - \pi_2).$$

Darin steht π_h für den Zyklus $(1\ 2 \ldots h)$. Es ist dann

$$\omega_1(\xi) = \xi_1,$$

$$\omega_2(\xi) = \xi_1\, \xi_2 - \xi_2\, \xi_1 = [\xi_1 \xi_2]$$

und für $m \geq 3$

$$\omega_m(\xi) = [\ldots [[\xi_1\, \xi_2]\, \xi_3] \ldots \xi_m].$$

Das heißt, der Operator ω_m erzeugt, auf das Produkt $\xi_1, \ldots, \xi_m$ angewandt, gerade das LIEsche Produkt der Unbestimmten ξ_i, in dem alle Klammern die ersten beiden der in der Reihenfolge ihrer Indizes hingeschriebenen Unbestimmten umschließen. Ein Produkt mit dieser Klammerung heiße *linksnormiert*, es soll für diesen Ausdruck auch die abgekürzte Schreibweise

$$\omega_m(\xi) = [\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m]$$

zugelassen sein. Allgemein bedeutet $\omega_m \varrho(\xi)$, worin ϱ einen beliebigen Operator aus $\mathfrak{S}_m$ bezeichnet, die Summe linksnormierter Produkte, die durch Anwendung von ω_m auf $\varrho(\xi)$ entsteht. Andererseits lassen sich bekanntlich alle LIEschen Produkte mit beliebiger Klammerung als Summen linksnormierter schreiben. Bezeichnen wir also mit Λ_m den Modul aller LIEschen Formen in Ξ_m und mit Ω_m das von ω_m in $\mathfrak{S}_m$ erzeugte Rechtsideal, dann ist

$$\Lambda_m = \Omega_m(\xi). \tag{6}$$

Entsprechend der Definition von Ξ_m enthält Λ_m alle Summen LIEscher Produkte, die vom Grade m in den Unbestimmten ξ_i sind und in denen jede dieser Unbestimmten genau einmal vorkommt.

Der LIEsche Modul $\mathfrak{L}_m$ aus $\mathfrak{A}_m$ entsteht, wenn nun noch in Λ_m die ξ_i in allen möglichen Anordnungen mit Wiederholungen durch die Erzeugenden a_j von $\mathfrak{A}$ ersetzt werden. Dies ist auch schon bei WEVER [6] bewiesen, siehe dort Satz 2. Zu jedem LIEschen Polynom $f(a)$ aus $\mathfrak{L}_m$ gibt es danach ein Polynom $g(a)$ in $\mathfrak{A}_m$, so daß $f(a) = \omega_m g(a)$. Allgemein ist

$$\mathfrak{L}_m = \Omega_m(\mathfrak{A}_m). \tag{7}$$

Es würde genügen, statt (7) nur zu schreiben

$$\mathfrak{L}_m = \omega_m(\mathfrak{A}_m),$$

wie es in der eben zitierten Arbeit bewiesen ist und wie es auch aus (5) folgt. Es ist aber hier gerade der wesentliche Gedanke, nicht den Operator ω_m für sich zu betrachten sondern das von ihm in $\mathfrak{S}_m$ erzeugte Rechtsideal Ω_m. Werden alle Operatoren aus dem Rechtsideal Ω_m auf $\mathfrak{L}_m$ angewandt, also auf Polynome, die schon LIEsche Polynome sind, dann wird dadurch $\mathfrak{L}_m$ in sich übergeführt, es ist

$$\Omega_m(\mathfrak{L}_m) = \mathfrak{L}_m. \tag{8}$$

Nach der zitierten Arbeit ist nämlich

$$(\omega_m)^2 = m \cdot \omega_m, \tag{9}$$

und das bedeutet, daß für jedes LIEsche Polynom die Beziehung

$$\omega_m f(a) = m \cdot f(a)$$

gilt. Die Formel (9) ist mit anderen Hilfsmitteln auch von SPECHT [4] und DYNKIN [7] bewiesen worden.

Es soll jetzt für das von ω_m in $\mathfrak{s}_m$ erzeugte Rechtsideal Ω_m eine Basis angegeben werden. Es gilt

Satz 1: *Alle Produkte* $\omega_m \tau_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, (m-1)!)$, *worin die* τ_ν *alle Permutationen bedeuten, denen gegenüber die Stelle 1 festbleibt, bilden eine Basis von* Ω_m.

Daraus folgt sofort das

Corollar zu Satz 1: *Alle linksnormierten Produkte* $[\xi_1 \xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_m}]$, *in denen die Unbestimmte* ξ_1 *an erster Stelle steht, bilden eine Basis von* Λ_m.

Der Beweis ist in einem allgemeineren Zusammenhang bereits von SPECHT [5] geführt worden, soll aber hier noch einmal allein durch Rechnung in $\mathfrak{s}_m$ wiederholt werden.

Der Operator ω_m sei geschrieben in der Form

$$\omega_m = \sum_{\mu=1}^{m!} l_\mu \sigma_\mu .$$

Als Koeffizienten l_μ treten dabei nur $0, \pm 1$ auf, und zwar ist der Koeffizient der Identität $l_1 = 1$. Von allen wirklich in ω_m vorkommenden Permutationen σ_μ, d. h. für die $l_\mu \neq 0$, ist ε die einzige Permutation, der gegenüber die Stelle 1 unverändert bleibt. Werden der Reihe nach alle Produkte $\omega_m \tau_\nu$, $\nu = 1, \ldots, (m-1)!$ hingeschrieben, so kommt in jedem dieser Produkte der Summand $\varepsilon \tau_\nu = \tau_\nu$ genau einmal vor. τ_ν kann aber in $\omega_m \tau_{\nu'}$, $\nu' \neq \nu$ nicht enthalten sein. Alle Produkte $\omega_m \tau_\nu$ sind also linear unabhängig. Die Gleichung (9) gestattet es, nach RUTHERFORD ([8], Satz 28) die Anzahl der linear unabhängigen η in $\mathfrak{s}_m$ mit $\omega_m \eta \neq 0$ anzugeben. ω_m/m ist idempotent und hat den Koeffizienten $1/m$ bei ε. Ω_m muß danach eine Basis vom Rang $(m-1)!$ haben und damit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Der Gruppenring $\mathfrak{s}_m$ ist direkte Summe von minimalen Rechtsidealen. Es sei $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ mit $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_h > 0$ und $\sum \alpha_i = m$ eine *Zerlegung* von m in natürliche Zahlen. Dann gehören zu jeder Zerlegung α genau f^α Rechtsideale, die als lineare Moduln je den Rang f^α haben. Diese Ideale seien mit ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^\alpha$, $r = 1, 2, \ldots, f^\alpha$ bezeichnet. Jedes dieser Ideale vermittelt eine irreduzible Matrizendarstellung von $\mathfrak{S}_m$ vom Grade f^α, und zwar sind alle Darstellungen zur gleichen Zerlegung äquivalent. Ein kurzer Abriß dieser Darstellungstheorie findet sich bei VAN DER WAERDEN [9], § 129, eine ausführliche Darstellung, auf die hier zurückgegriffen wird, bei RUTHERFORD [8]. Die Zerlegung von $\mathfrak{s}_m$ in seine minimalen Rechtsideale ist bereits im Körper der rationalen Zahlen möglich, eine algebraische Erweiterung des Koeffizientenbereichs ist also nicht nötig. Darstellungstheoretisch stimmt das damit überein, daß die regulären Darstellungen einer symmetrischen Gruppe im Körper der rationalen Zahlen vollständig reduzibel sind.

Das von ω_m erzeugte Rechtsideal Ω_m ist direkte Summe von minimalen Rechtsidealen

$$\Omega_m = {}^{(r_1)}\mathfrak{s}_m^{\alpha} + {}^{(r_2)}\mathfrak{s}_m^{\alpha} + \cdots + {}^{(r_1)}\mathfrak{s}_m^{\alpha'} + \cdots . \tag{10}$$

Die Vielfachheit, mit der minimale Rechtsideale zur Zerlegung α auftreten, sei ν^{α}. Eine explizite Formel für ν^{α} ist nach WEVER [2], Satz 5

$$\nu^{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha/m} \mu(d)\, \chi^{\alpha}_{(d,\, d,\, \ldots,\, d)} . \tag{11}$$

Es wird summiert über alle Teiler d von m, $\mu(d)$ bedeutet die MÖBIUSsche Funktion und $\chi^{\alpha}_{(d,\, d,\, \ldots,\, d)}$ den Charakter der Permutationen aus m/d Zyklen der Länge d in der Darstellung zur Zerlegung α.

Alle Permutationen τ_ν, $\nu = 1, \ldots, (m-1)!$ aus $\mathfrak{S}_m$, denen gegenüber die Ziffer 1 invariant ist, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_m$, die zu $\mathfrak{S}_{m-1}$ isomorph ist. Der durch alle τ_ν in $\mathfrak{s}_m$ aufgespannte Teilmodul heiße $\mathfrak{t}_{m-1}$, er bildet eine Unteralgebra von $\mathfrak{s}_m$, die zu $\mathfrak{s}_{m-1}$ isomorph ist. $\mathfrak{t}_{m-1}$ ist daher auch die direkte Summe von minimalen Rechtsidealen, die mit ${}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$ bezeichnet werden sollen. Sie sind gekennzeichnet durch Zerlegungen β von $m-1$, zu jeder Zerlegung durchläuft s die Werte $1, \ldots, f^{\beta}$.

Satz 1 kann daher auch durch die Gleichung

$$\Omega_m = \omega_m \mathfrak{t}_{m-1} \tag{12}$$

ausgedrückt werden, die besagt, daß durch Rechtsmultiplikation mit $\mathfrak{t}_{m-1}$ das Ideal Ω_m aus ω_m entsteht. Dieser Sachverhalt läßt sich ausnutzen, um für die ν^{α} noch eine andere Beziehung herzustellen.

Satz 2: *Für die Vielfachheiten ν^{α} der minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ zur Zerlegung α in Ω_m gilt das Gleichungssystem*

$$\sum_{\bar{\alpha}=\beta} \nu^{\alpha} = f^{\beta}$$

für alle Zerlegungen β von $m-1$. Für ein festes β ist dabei über alle α zu summieren, für die $\bar{\alpha}^i = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_h] = \beta$ mit $i = 1, \ldots, h$, $i \neq j$ für $\alpha_j = \alpha_{j+1}$. Für die ν^{α} gilt die Ungleichung

$$0 \leq \nu^{\alpha} \leq \operatorname{Min}(f^{\beta}) \quad \text{für alle } \beta = \bar{\alpha}^i .$$

Beweis: Satz 1 gestattet es, zu der Zerfällung (10) des Rechtsideals Ω_m in minimale Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ noch eine Zerfällung

$$\Omega_m = \sum_{\beta,\, s} \omega_m\, {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1} \tag{13}$$

anzugeben. Auf der rechten Seite ist über alle β und für jedes β über alle s zu summieren. Die Zerfällung (13) bedeutet eine Verfeinerung von (10), denn jedes minimale Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ ist invariant gegenüber allen Rechtsoperatoren aus $\mathfrak{s}_m$ und damit erst recht auch denen aus $\mathfrak{t}_{m-1}$. Jedes ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$, das in Ω_m liegt, ist also direkte Summe von Moduln

$\omega_m {}^{(r)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$, die in $\mathfrak{s}_m$ natürlich keine Rechtsideale mehr sind. Nach der Darstellungstheorie kann leicht ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Zerfällungen hergestellt werden. Jedes Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_{m}$, das in Ω_m enthalten ist, zerfällt in Teilmoduln

$$(14) \qquad {}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_{m} = \sum_{\beta=\bar{\alpha}} \omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1},$$

und zwar ist auf der rechten Seite zu summieren über alle β, die aus dem festen α durch den Prozeß $\bar{\alpha}^i = \beta$, $i = 1, \ldots, h$ gewonnen werden können. Es sind der Reihe nach alle Summanden α_i von α um eins zu vermindern mit Ausnahme derjenigen, für die $\alpha_j = \alpha_{j+1}$ ist. Zu jedem so entstehenden $\beta = \bar{\alpha}^i$ gibt es genau einen Modul $\omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$, dessen s bestimmt werden kann. RUTHERFORD ([8], Satz 15) zeigt nämlich, daß eine Matrix U^{α}_{X}, die ein Element X aus $\mathfrak{s}_m$ in einer Darstellung zur Zerlegung α darstellt, direkte Summe von Matrizes, geeignete Transformation vorausgesetzt,

$$U^{\alpha}_{X} = U^{\bar{\alpha}^1}_{X} + U^{\bar{\alpha}^2}_{X} + \cdots + U^{\bar{\alpha}^h}_{X}$$

ist, wenn X gegenüber eine Ziffer festbleibt. Die linearen Transformationen, die U_X bewirkt, entsprechen in $\mathfrak{s}_m$ einer Rechtsmultiplikation mit X. Geht man in (10) und (13) von den Darstellungen zu deren Graden über, so ergibt sich

$$\sum_{\alpha} \nu^{\alpha} f^{\alpha} = (m-1)!$$

und

$$\sum_{\beta} (f^{\beta})^2 = (m-1)!$$

Da jede Darstellung ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_{m}$ aus Ω_m zu jedem $\beta = \bar{\alpha}$ genau eine Darstellung $\omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$ enthält, folgt daraus sofort die Behauptung. Die Ungleichung ist damit ebenfalls bewiesen, denn die ν^{α} können nach ihrer Definition nicht negativ sein.

Als Aussage über die Struktur des Rechtsideals Ω_m soll noch ein Satz angefügt werden.

Satz 3: *In Ω_m für $m \geq 3$ kommen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_{m}$ mit $\alpha = [m-1, 1]$ und $\alpha = [2, 1, \ldots, 1]$ je genau einmal vor.*

Es ist nämlich $f^{\beta} = 1$ für $\beta = [m-1]$ und $\beta = [1, \ldots, 1]$. Die genannten Ideale können also höchstens einmal vorkommen. Sie müssen aber auch mindestens einmal auftreten, denn nach WEVER ([6], Hilfssatz 1) können Rechtsideale zu den Zerlegungen $\alpha = [m]$ und $\alpha = [1, \ldots, 1]$ in Ω_m nicht vorkommen.

Satz 2 soll noch durch ein Beispiel erläutert werden. Für $m = 4$ hat das Gleichungssystem die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \nu^{[31]} &= f^{[3]} = 1, \\ \nu^{[31]} + \nu^{[22]} + \nu^{[211]} &= f^{[21]} = 2, \\ \nu^{[211]} &= f^{[111]} = 1. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten ν^{α} für $\alpha = [4]$ und $\alpha = [1, \ldots, 1]$ sind nach Satz 3 gleich Null und deshalb fortgelassen.

Aus den entsprechenden Gleichungen können die ν^α für alle $m \leq 5$ berechnet werden. Bei $m > 5$ übersteigt die Anzahl der Unbekannten die Anzahl der Gleichungen. Es ist nicht untersucht, ob die Bestimmung der ν^α dann unter den Nebenbedingungen, ganz und nicht negativ zu sein und der Ungleichung aus Satz 2 zu gehorchen, eindeutig möglich ist.

§ 4. Der Übergang von Ξ_m zu $\mathfrak{A}_m$ beziehungsweise von Λ_m zu $\mathfrak{L}_m$ verlangt die Heranziehung der Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe $GL(k,R)$ des k-dimensionalen Vektorraumes. Wie bisher soll der Koeffizientenkörper der Körper R der rationalen Zahlen sein. k bezeichnet wie auch oben die Anzahl der Erzeugenden von $\mathfrak{A}$. Jede lineare Transformation $a = (a_{\varkappa,\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, k$ der Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{A}$ induziert eine lineare Transformation $A(a) = (A_{\sigma,\varrho})$, $\varrho, \sigma = 1, \ldots, N$ der $N = k^m$ Basiselemente von $\mathfrak{A}_m$. Die Matrizes A bilden eine Darstellung der Matrizes a, diese Darstellung wird üblicherweise eine *Darstellung m-ter Stufe* von $GL(k,R)$ genannt, $\mathfrak{A}_m$ heißt dann auch Darstellungsmodul m-ter Stufe.

Einen ausführlichen Bericht über die Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppen findet man bei VAN DER WAERDEN [10] in § 22. Für die vorliegende Aufgabe ist es dabei wesentlich, daß die Gruppenalgebra $\mathfrak{s}_m$ ein wichtiges Hilfsmittel bei Aussagen über die Struktur der Darstellungsmoduln m-ter Stufe bildet. Danach ist die Darstellung m-ter Stufe der $GL(k,R)$ durch Matrizes $A(a)$ im allgemeinen nicht irreduzibel. $\mathfrak{A}_m$ zerfällt als Darstellungsmodul in irreduzible Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m(\mathfrak{A}_m)$, die bei allen linearen Transformationen in sich übergehen und keinen echten Untermodul mit dieser Eigenschaft enthalten. Sie lassen sich dadurch erzeugen, daß alle Operatoren eines minimalen Rechtsideals ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m$ aus $\mathfrak{s}_m$ als Stellenoperatoren auf $\mathfrak{A}_m$ angewendet werden. Es ist hier wieder wesentlich, daß die Aufspaltung der $\mathfrak{A}_m$ in irreduzible Darstellungsmoduln ohne algebraische Erweiterung von R möglich ist. Dabei ist noch zu bemerken, daß

$$ {}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m(\mathfrak{A}_m) \equiv 0 \quad \text{mit } \alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_h], \quad h > k, $$

d. h., ein Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m$ anulliert den Modul $\mathfrak{A}_m$, wenn die Anzahl h der positiven Summanden in α größer ist als die Anzahl k der Erzeugenden von $\mathfrak{A}$. Um alle irreduziblen Darstellungsmoduln in $\mathfrak{A}_m$ zu erhalten, genügt es also, sich auf die minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m$ aus $\mathfrak{s}_m$ zu beschränken, in deren Zerlegung höchstens k Summanden vorkommen.

Die Vielfachheit ν^α der minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m$ in Ω_m und die Vielfachheit ν'^α der irreduziblen Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}^\alpha_m(\mathfrak{A}_m)$ in $\mathfrak{L}_m$ jeweils zur Zerlegung α stehen damit in einfacher Beziehung. Es ist

$$ \nu'^\alpha = \nu^\alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad \text{mit } h \leq k $$

$$ \nu'^\alpha = 0 \quad \text{für alle } \alpha \quad \text{mit } h > k. $$

Da ${}^{(1)}\mathfrak{g}_m^{[1,1,\ldots,1]}$ in Ω_m nicht vorkommt, sind zur Bildung von $\mathfrak{L}_m$ für $m \leq k-1$ immer alle minimalen Rechtsideale aus Ω_m nötig.

Corollar zu Satz 3: *In $\mathfrak{L}_m$ kommt ein irreduzibler Darstellungsmodul ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^{[m-1,1]}(\mathfrak{A}_m)$ immer genau einmal vor.* $(m \geq 2)$.

Ein irreduzibler Darstellungsmodul ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^{[2,1,\ldots,1]}(\mathfrak{A}_m)$ kommt dann genau einmal vor, wenn $\mathfrak{A}$ wenigstens $k = m-1$ Erzeugende besitzt. $(m \geq 3)$.

In Λ_m gibt es zu jedem Polynom $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ genau einen Operator φ aus $\mathfrak{s}_m$, so daß $p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \omega_m \varphi(\xi)$. Dabei ist φ als eine Linearverbindung von Permutationen definiert, die als Stellenoperatoren wirken sollen. Ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Ziffern $1, \ldots, m$, so bedeutet danach

$$\sigma(\xi) = \xi_{l_1} \xi_{l_2} \ldots \xi_{l_m}.$$

Der Übergang zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe verlangt, auch Permutationen der Variablen ξ_i zuzulassen, und zwar soll $\bar{\sigma}$: eine solche Substitution bezeichnen, durch die ξ_i in ξ_{k_i} übergeht. Dann ist

$$\bar{\sigma}: (\xi) = \xi_{k_1} \xi_{k_2} \ldots \xi_{k_m}.$$

Auf das Produkt $\xi_1, \ldots, \xi_m$ der Unbestimmten in ihrer natürlichen Reihenfolge haben also $\bar{\sigma}$: als Permutation der Variablen und σ^{-1} als Permutation der Stellen die gleiche Wirkung, es ist

$$\bar{\sigma}: (\xi) = \sigma^{-1}(\xi).$$

Allgemein gilt dann

$$\bar{\sigma}: p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \bar{\sigma}: \omega_m \varphi(\xi) = \omega_m \varphi \sigma^{-1}(\xi).$$

Das bedeutet aber, daß die Teilmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\varkappa}(\xi)$ nicht nur invariant gegenüber allen Stellenvertauschungen sondern auch gegenüber allen Permutationen der ξ_i sind.

II. Reduzierte freie Liesche Ringe.

§ 5. Die in dem ersten Teil entwickelte Darstellungstheorie der freien Lieschen Ringe soll jetzt dazu verwendet werden, um reduzierte freie Liesche Ringe zu konstruieren.

Es sei L ein reduzierter freier Liescher Ring, der bestimmt sei durch die Vorgabe der Anzahl k seiner Erzeugenden und eines Systems von Regeln $p^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Die linken Seiten dieser Regeln spannen das vollinvariante Ideal $\mathfrak{M}$ auf, wenn die x_i durch alle Elemente aus $\mathfrak{L}$ ersetzt werden. Es ergibt sich dann sofort

Satz 4: *Alle Regeln in einem reduzierten freien* Lieschen *Ring* $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ *lassen sich ersetzen durch ein System von Regeln*

$$\psi_m(\xi) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

d. h., es gibt zu jedem m *eine Regel* $\psi_m(\xi) = 0$, *deren linke Seite in* Λ_m *liegt, und aus der alle Regeln folgen, die in* $L_m \cong \mathfrak{L}_m/\mathfrak{M}_m$ *gelten.*

Zum Beweis wird die Eigenschaft (a) des vollinvarianten Ideals $\mathfrak{M}$ benutzt; danach muß jeder Modul $\mathfrak{M}_m$ die direkte Summe von irreduziblen Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\varkappa}(\mathfrak{A}_m)$ sein, die in $\mathfrak{L}_m$ liegen. Dann gibt es aber ein Rechtsideal Ψ_m in $\mathfrak{s}_m$, das Unterideal von Ω_m ist, mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_m = \Psi_m(\mathfrak{A}_m) \subseteq \mathfrak{L}_m.$$

Wegen der Halbeinfachheit von $\mathfrak{s}_m$ gibt es dann aber ein Element ψ_m in Ω_m, das Ψ_m erzeugt, es ist also

$$\Psi_m = \{\psi_m\}.$$

Der Operator ψ_m kann noch idempotent gewählt werden. $\psi_m(\xi)$ liegt dann in Λ_m und ist die Regel, aus der alle anderen folgen. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieses Ergebnis ist in einem allgemeineren Zusammenhang auch von Specht bewiesen worden ([5], Satz 10).

Da der Operator ψ_m in Ω_m liegt, kann er nach Satz 1 auch in die Gestalt $\omega_m \vartheta$ gebracht werden, worin ϑ einen Operator aus $\mathfrak{t}_{m-1}$ bedeutet. Dem Corollar zu Satz 1 entspricht dann

Satz 5: *Die Regeln* $\psi_m(\xi) = 0$ *in* L_m *können als Summen von linksnormierten Produkten* $[\xi_1 \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_m}]$ *geschrieben werden, in denen jedesmal* ξ_1 *an erster Stelle steht.*

Die Eigenschaft (b) hat zur Folge, daß die Regeln $\psi_m(\xi) = 0$ für die verschiedenen m nicht voneinander unabhängig sind. Aus jeder Regel $\psi_m(\xi) = 0$ folgen Regeln $\psi'_{m+l}(\xi) = 0$, $l = 1, 2, \ldots$ deren Operatoren ψ'_{m+l} jeweils in Ψ_{m+l} liegen. Es kann dabei der Fall eintreten, daß von einem gewissen m ab alle Ideale Ψ_{m+l} bereits durch die Operatoren ψ'_{m+l} erzeugt werden. Alle Regeln in L_{m+l} folgen dann bereits aus der einen Regel von L_m. Insbesondere ist das dann der Fall, wenn L nilpotent ist, d. h., wenn $L_m = L_{m+1} = \cdots = 0$ ist. Dann ist $\psi_m = \omega_m$ und daraus folgt $\psi_{m+l} = \omega_{m+l}$ für $l = 1, 2, \ldots$. In einem solchen Fall ist der reduzierte freie Liesche Ring L also durch die Angabe von endlich vielen Regeln bestimmt. Es ist bisher unbekannt, ob jeder reduzierte freie Liesche Ring schon durch endlich viele Regeln definiert ist.

In Satz 4 ist lediglich die Existenz einer Regel für jeden Teilmodul L_m bewiesen, aus der alle anderen Regeln in L_m folgen. Es soll kurz gezeigt werden, daß es leicht möglich ist, zu einem beliebig vorgegebenem System von Regeln $p^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ das System $\psi_m(\xi) = 0$,

$m = 1, 2, \ldots$ zu konstruieren. Dazu verwendet man zweckmäßig die Differentiation nach HAUSDORFF [11]. Das Symbol $u\frac{\partial}{\partial x_i}$ ist danach definiert durch die Gleichung

$$p(x_1, \ldots, x_i + \lambda u, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot u \frac{\partial}{\partial x_i} p(x_1, \ldots, x_n).$$

Es sei jetzt $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Regel, die homogen vom Grade m in den Unbestimmten x_i sein soll, und zwar soll jede Unbestimmte in jedem Summanden mit dem gleichen Grad vorkommen. Es sei $n < m$. Dann ist

$$\overline{p}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

eine Regel, die mit $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gleichbedeutend ist, d. h., aus $p(x) = 0$ folgt $\overline{p}(x) = 0$ und umgekehrt. Dieser Prozeß muß $m-n$-mal in geeigneter Reihenfolge wiederholt werden. Man erhält dann eine Regel $q(x_1, \ldots, x_m) = 0$, die mit $p = 0$ gleichbedeutend ist. Sie ist homogen vom Grade m und enthält jede Unbestimmte in jedem Summanden genau einmal. Nach geeigneter Umschreibung liegt die linke Seite $q(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ dann in Λ_m und es gibt dazu einen Operator φ in $\mathfrak{s}_m$, so daß $q(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi(\xi)$ ist.

Die zu Anfang eingeführte Bedingung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ist nämlich $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Regel, in deren linker Seite Summanden vorkommen, die eine Unbestimmte x_i mit verschiedenem Grad enthalten, so spaltet mehrfache Differentiation nach x_i die Regel $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ auf, d. h., es ist $p(x_1, \ldots, x_n) = p'(x_1, \ldots, x_n) + p''(x_1, \ldots, x_n) = 0$ und jeder der Summanden auf der linken Seite ist eine Regel für sich. Insbesondere ergibt sich daraus auch, daß Regeln, die in ihren Variablen nicht homogen sind, sofort in homogene Summanden zerlegt werden können, deren jeder eine Regel für sich bildet.

Sind schließlich auf diese Weise mehrere Operatoren φ_i gefunden, die zu Regeln $q^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ in L_m gehören, so ist es nur noch nötig ein ψ_m aufzusuchen mit der Eigenschaft $\psi_m \eta = 0$ für alle η, für die auch $\varphi_i \eta = 0$ ist. Diese Aufgabe, die Auffindung des „master idempotent", ist von RUTHERFORD ([8], § 40) allgemein gelöst worden. $\psi_m(\xi) = 0$ ist dann die Regel in L_m, aus der alle anderen folgen.

§ 6. Satz 5 gestattet es, eine systematische Übersicht über alle reduzierten freien LIEschen Ringe zu gewinnen. Mit seiner Hilfe läßt sich die Frage beantworten, ob zwei verschiedene Systeme von Regeln bei gleicher Zahl der Erzeugenden isomorphe reduzierte freie LIEsche Ringe definieren. Andererseits ist die Form $\psi_m(\xi) = 0$ nicht in allen Fällen die einfachste Schreibweise für eine Regel.

Die einfachste Regel, die im Modul L_m eines reduzierten freien LIEschen Ringes L gelten kann, ist $\psi_m(\xi) = \omega_m(\xi) = [\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m] = 0$. Der durch die Werte der linken Seite im freien LIEschen Ring bestimmte Modul $\mathfrak{M}_m$ fällt dann mit $\mathfrak{L}_m$ zusammen und es ist daher $L_m = 0$.

Für $1 \leq m \leq 3$ ist sogar jede Regel $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ in L_m, deren linke Seite nicht schon in den x_i identisch Null wird, mit $\omega_m(\xi) = 0$ gleichbedeutend. Der Modul $\mathfrak{L}_m$ im freien LIEschen Ring $\mathfrak{L}$ enthält bei $k \geq 2$ Erzeugenden für diese m jeweils nur einen einzigen irreduziblen Darstellungsmodul, der zu den Zerlegungen [1], [1,1] bzw. [2,1] gehört. $\mathfrak{M}_m$ kann also nur Null sein oder mit $\mathfrak{L}_m$ zusammenfallen.

Die ersten Regeln, für die $\mathfrak{M}_m$ ein echter Teilmodul von $\mathfrak{L}_m$ ist, können erst für $m = 4$ auftreten. Im freien LIEschen Ring $\mathfrak{L}$ besteht $\mathfrak{L}_4$ nämlich aus zwei irreduziblen Darstellungsmoduln $\mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$ und $\mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$, die beide einfach auftreten. Zu ihrer Existenz sind im ersten Fall mindestens zwei, im zweiten Fall mindestens drei Erzeugende von $\mathfrak{L}$ nötig.

Abgesehen von der Regel $\omega_4(\xi) = 0$ lassen sich also höchstens zwei Regeln angeben, die homogen vom Grade vier in den Unbestimmten sind und die voneinander unabhängig sind, also daß keine aus der anderen folgt. Zwei solche Regeln sind

$$p(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = 0$$

und

$$q(x_1, \ldots, x_4) = [[x_1\, x_2]\, [x_3\, x_4]] = 0,$$

denn wie in [2], §§ 4 und 5 vorgerechnet ist, liegen alle Werte von p in $\mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$ und entsprechend alle Werte von q in $\mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$. Die Regel $p(x_1, x_2) = 0$ bedeutet also, daß $L_4 \cong \mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$ und entsprechend folgt aus $q(x_1, \ldots, x_4) = 0$, daß $L_4 \cong \mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$. Gelten beide Regeln gleichzeitig, dann muß $L_4 = 0$ sein. Es gibt keine Regeln mehr in L_4, die nicht mit $p = 0$, $q = 0$ oder beiden zusammen gleichbedeutend sind. Zum Beispiel ist noch die Regel

$$\overline{p}(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = 0$$

gleichbedeutend mit $p = 0$.

Unter Verwendung der in [2], §§ 4 und 5 beschriebenen YOUNGschen symmetrizer und der Klammeroperatoren lassen sich die Regeln $p = 0$ und $q = 0$ umformen. $p = 0$ entspricht

$$\omega_4\big(\varepsilon + (234) + (432) + (23) + (34) + (42)\big)(\xi) = 0$$

und statt $q = 0$ kann geschrieben werden

$$\omega_4\big(\varepsilon - (34)\big)(\xi) = 0.$$

$p = 0$ und $q = 0$ sind damit in die nach Satz 4 und 5 mögliche Gestalt übergeführt. Das bedeutet in diesem Fall keine Vereinfachung der Schreibweise, es gestattet aber die Festlegung der irreduziblen Darstellungsmoduln, in denen die linken Seiten liegen.

Wie das Beispiel zeigt, gelangt man zu einfachen Regeln, indem linksnormierte Produkte mit mehrfach auftretenden Unbestimmten oder Produkte mit bestimmter Klammerung gleich Null gesetzt werden. Ihre

Umschreibung in die Form $\psi_m(\xi)=0$ ist unter Benutzung der YOUNGschen symmetrizer und der Klammeroperatoren, oder was auf dasselbe herausläuft, mittels HAUSDORFF-Differentiation immer leicht möglich. Daraus läßt sich dann berechnen, welche irreduziblen Darstellungsmoduln in $\mathfrak{M}_m$ liegen.

Schluß.

Die Zuordnung eines freien LIEschen Ringes $\mathfrak{L}$ zu einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ geschieht nach MAGNUS [1] auf folgende Weise. Es seien $A_1, \ldots, A_k$ die k Erzeugenden von $\mathfrak{F}$. Dann wird durch die Beziehung

$$A_i = 1 + a_i,$$

$$A_i^{-1} = 1 - a_i + a_i^2 - + \cdots, \qquad i = 1, \ldots, k$$

die freie Gruppe $\mathfrak{F}$ in einem Teilbereich des assoziativen Ringes $\mathfrak{A}$ treu dargestellt. Zu jedem Wort $W(A_1, \ldots, A_k)$ gehört eine Entwicklung

$$W(A_1, \ldots, A_k) = 1 + D_m(a_1, \ldots, a_k) + D_{m+1}(a_1, \ldots, a_k) + \cdots,$$

in der auf der rechten Seite die Summanden von gleichem Grade h in den a_i zu homogenen Polynomen D_h zusammengefaßt sind. Das Glied D_m mit dem kleinsten Grad m heiße das *Anfangsglied* zum Worte W: der Grad m besagt, daß W noch in $\mathfrak{F}_m$, der m-ten Untergruppe der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{F}$ liegt, aber nicht mehr in $\mathfrak{F}_{m+1}$.

Es werde mit $\bar{\mathfrak{L}}$ der LIEsche Unterring von $\mathfrak{L}$ bezeichnet, der alle LIEschen Polynome mit ganzen Koeffizienten enthält. Dann liegen alle Anfangsglieder zu Worten aus $\mathfrak{F}$ in $\bar{\mathfrak{L}}$ und umgekehrt ist jedes LIEsche Polynom in $\bar{\mathfrak{L}}$ auch Anfangsglied.

Die Beschränkung auf ganze Koeffizienten bedeutet eine Schwierigkeit, wenn Aussagen über die Struktur des LIEschen Ringes in gruppentheoretische Aussagen übersetzt werden sollen. Satz 5 benutzt wesentlich die Halbeinfachheit von $\mathfrak{s}_m$, aber gerade diese Halbeinfachheit geht verloren, wenn auch in $\mathfrak{s}_m$ nur noch Operatoren mit ganzen Koeffizienten zugelassen sind.

Es sei jetzt $F \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{V}$ eine reduzierte freie Gruppe, also eine Gruppe, die als Faktorgruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ nach einer vollinvarianten Untergruppe $\mathfrak{V}$ geschrieben werden kann. Dann bilden alle Anfangsglieder zu Worten aus $\mathfrak{V}$ ein vollinvariantes Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ im LIEschen Ring $\bar{\mathfrak{L}}$ und $\bar{L} \cong \bar{\mathfrak{L}}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist der F zugeordnete reduzierte freie LIEsche Ring.

Die Moduln $\overline{\mathfrak{M}}_m$ lassen sich entsprechend wie oben gezeigt konstruieren. $\overline{\mathfrak{M}}_m$ und $\mathfrak{M}_m$ haben den gleichen Rang, dagegen kann $\overline{\mathfrak{M}}_m$ nicht mehr ohne weiteres als Summe von Rechtsidealen dargestellt werden. Das hat zur Folge, daß Regeln, die in L gleichbedeutend sind, dies in $\bar{L}$ nicht mehr zu sein brauchen.

Zum Beispiel sind die beiden Regeln

$$p(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = 0$$

und

$$\bar{p}(x_1, x) = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = 0$$

in einem reduzierten freien Lieschen Ring L mit rationalen Koeffizienten gleichbedeutend. Sie sind dies jedoch nicht mehr in $\bar{L}$, d. h. bei Beschränkung auf ganze Koeffizienten. Denn

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] + [x_1\, x_2\, x_2\, x_1] = 2\,[x_1\, x_2\, x_1\, x_2]$$

heißt, daß aus $p(x_1, x_2) = 0$ die Regel $2\,\bar{p}(x_1, x_2) = 0$ folgt. Es ist bei der Rechnung benutzt, daß ein linksnormiertes Liesches Produkt identisch Null ist, wenn die beiden ersten Variablen gleich sind. Umgekehrt folgt aus $\bar{p}(x_1, x_2) = 0$ auch $p(x_1, x_2) = 0$, denn es ist

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2].$$

Das durch die linke Seite von $p = 0$ in $\mathfrak{L}$ aufgespannte vollinvariante Ideal ist also ein echtes Unterideal des zu $\bar{p} = 0$ in $\bar{\mathfrak{L}}$ gehörenden Ideals.

Literaturverzeichnis.

[1] Magnus, W.
J. reine angew. Math. 182, 142—149 (1940).

[2] Wever, F.
J. reine angew. Math. 187, 44—54 (1949).

[3] Baer, R.
Transact. Amer. Math. Soc. 58, 390—419 (1945).

[4] Specht, W.
Math. Zeitschr. 51, 367—376 (1948).

[5] Specht, W.
Math. Zeitschr. 52, 557—589 (1949).

[6] Wever, F.
Math. Ann. 120, 563—580 (1949).

[7] Dynkin, F. B.
C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR, 2. Ser. 57, 323—326 (1947).

[8] Rutherford, D. E.
Substitutional Analysis, Edinburgh 1948.

[9] van der Waerden, B. L.
Moderne Algebra II, 2. Aufl. Berlin 1940.

[10] van der Waerden, B. L.
Gruppen von linearen Transformationen (Ergebnisse der Math., IV 2, 1935).

[11] Hausdorff, F.
Sitz. Ber. Sächs. Akad. Wiss. (Math. Phys. Klasse) Leipzig 58, 19—48 (1906).

(Eingegangen am 24. März 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 326–334 (1952).

Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

Von

Dieter Gaier in Stuttgart.

1. In dieser Arbeit betrachten wir ein Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

mit dem Konvergenzradius 1 und untersuchen die Summierbarkeit von (1.1) in $z=1$. Dabei werden die Verfahren $C_k (0<k<\infty)$, A, $E_p (0<p<\infty)$, B, $S_\alpha (0<\alpha<1)$ und $T_\alpha (0<\alpha<1)$ herangezogen[1]).

Nimmt man von $f(z)$ zunächst die Beschränktheit in $|z|<1$ an, so sind die Verfahren C_k und A äquivalent. Diese Tatsache ist bereits in einem Satz von Offord[2]) enthalten, soll aber kurz von neuem bewiesen werden. Sodann wird gezeigt, daß auch die übrigen Verfahren E_p, B, S_α und T_α untereinander äquivalent sind, falls $f(z)$ in $|z|<1$ beschränkt ist; letztere Bedingung wird sogar noch abgeschwächt werden. Der Beweis dieser Tatsache stützt sich auf den O-$T_\alpha \to K$-Satz, wobei die darin auftretende O-Bedingung sich leicht aus einer einfachen funktionentheoretischen Annahme folgern läßt.

Ist nun $f(z)$ in $|z| \leq 1$ stetig, dann braucht $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht zu konvergieren, wie Fejér gezeigt hat[3]). Durch welche der hier betrachteten Verfahren diese Reihe summierbar ist, hängt nach dem oben Gesagten davon ab, ob sie A- bzw. B-summierbar ist. Die A-Summierbarkeit ist trivial; dagegen wird sich ergeben, daß das Fejérsche Beispiel mehr leistet, indem es eine in $|z|<1$ analytische und in $|z|\leq 1$ stetige Funktion angibt, deren Entwicklung nach Potenzen von z in $z=1$ nicht B-summierbar ist. Diese Tatsache läßt sich auch zur Beurteilung der Schärfe zweier Sätze von Karamata und M. Riesz verwenden. Weiter erhalten wir durch das Fejérsche Beispiel eine Aussage über das Verhältnis zwischen

[1]) Bezüglich des neueren S_α-Verfahrens vgl. W. Meyer-König [10], S. 272ff. Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Vgl. A. C. Offord [13], S. 474. Der Offordsche Satz lautet: Ist $f(z)$ im Sektor $|\arg z|<\delta, 0<|z|<1\ (\delta>0)$ beschränkt, und $a_n = o(n^k)\ (k>0)$, so folgt $C_k\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ aus $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

[3]) Vgl. L. Fejér [1], S. 15.

den beiden Gruppen äquivalenter Verfahren, die im Falle der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ entstehen; in abgekürzter Schreibweise gilt $\{E_p,\ B,\ S_\alpha,\ T_\alpha\} \to \{C_k,\ A\}$, jedoch ist die Umkehrung im allgemeinen falsch.

In losem Zusammenhang mit den hier durchgeführten Überlegungen steht die Frage, ob die TAUBER-Bedingung $a_n \sqrt{n} \to 0$ für das BORELsche Verfahren „ausgemittelt" werden kann, so wie es bei der entsprechenden TAUBER-Bedingung $a_n n \to 0$ für das ABELsche Verfahren der Fall ist. Weder die so entstehende Bedingung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sqrt{\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

noch die schärfere Bedingung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \sqrt{\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

wird sich als TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren erweisen.

2. Wir beginnen unsere Untersuchungen über die Summierbarkeit beschränkter Potenzreihen mit einem Beweis der folgenden, bereits bekannten Tatsache.

Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *in* $|z|<1$ *beschränkt, so sind die Verfahren* C_k *und* A *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *äquivalent.*

Beweis. Wegen des $C_k \to A$-Satzes braucht nur noch die Umkehrung bewiesen werden. Nach LANDAU[4]) folgt aus der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ die Beschränktheit der $C_{k/2}$-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und zusammen mit der A-Summierbarkeit folgt daraus die C_k-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$[5]).

Der obige Satz enthält die von HARDY-LITTLEWOOD[6]) erwähnte Tatsache, daß eine in $|z|<1$ beschränkte Potenzreihe am Rande von keiner oder von jeder positiven Ordnung C_k-summierbar ist.

Wir beschäftigen uns nun mit der Äquivalenz der Verfahren E_p, B, S_α, T_α. Zunächst sei ein Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz. *Die Funktion* $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *sei im Innern eines Kreises* $\mathfrak{K}$: $|z+a|=1+a$ $(a>0)$ *regulär und beschränkt. Dann gilt*

$$b_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{2.1}$$

[4]) Vgl. E. LANDAU [8], S. 256—257.
[5]) Vgl. E. KOGBETLIANTZ [7], S. 37.
[6]) Vgl. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD [4], S. 70.

Beweis. Da sich die Kreislinie $\mathfrak{K}$ in der Umgebung von $z=1$ verhält wie $z(\varphi)=(1+c_1\varphi^2)\,e^{i\varphi}$ für ein $c_1>0$, liegt die aus den beiden Teilen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestehende Kurve $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ mit

$$\mathfrak{C}_1\colon\ z(\varphi)=(1+c_2\varphi^2)\,e^{i\varphi} \qquad c_2=\frac{c_1}{2}\,, \qquad |\varphi|\le\varphi_0$$

$$\mathfrak{C}_2\colon\ z(\varphi)=(1+c_2\varphi_0^2)\,e^{i\varphi} \qquad |\varphi|>\varphi_0$$

für geeignete Wahl von $\varphi_0>0$ innerhalb von $\mathfrak{K}$, mit Ausnahme des Punktes $z=1$, in dem $\mathfrak{C}$ den Kreis $\mathfrak{K}$ von innen berührt. Ist nun $|g(z)|\le M$ in $\mathfrak{K}$, so folgt daraus

$$|2\pi\,b_n|=\left|\int_{\mathfrak{C}}\frac{g(z)}{z^{n+1}}\,dz\right|\le M\left(\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}+\int_{\mathfrak{C}_2}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}\right),$$

wovon der letzte Teil ersichtlich $O\left((1+c_2\varphi_0^2)^{-n}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist. Weiter gilt

$$\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}\le 2\left(\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{(1+c_2\varphi^2)^n}+\int_0^{\varphi_0}\frac{d(1+c_2\varphi^2)}{(1+c_2\varphi^2)^{n+1}}\right)$$

$$<2\left(\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{(1+c_2\varphi^2)^n}+\int_0^{\infty}\frac{d(1+c_2\varphi^2)}{(1+c_2\varphi^2)^{n+1}}\right).$$

Das erste Integral hat den Wert

$$\frac{1}{\sqrt{c_2}}\,\frac{2\pi}{4^n}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\,,$$

wie man etwa durch Anwendung des Residuensatzes feststellt. Nach der STIRLINGschen Formel ist dieser Beitrag $\sim 1/\sqrt{n}$, und da das zweite Integral $1/n$ ist, folgt daher auch

$$\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz an und beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ *in* $|z|<1$ *beschränkt, so sind die Verfahren* E_p, B, S_α *und* T_α *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *alle äquivalent*

Beweis. Für den Beweis wird es genügen, statt der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ vorauszusetzen, daß $a_n\to 0$ strebt mit $n\to\infty$, und daß weiter $f(z)$ beschränkt ist in jedem Kreis, der den Einheitskreis in $z=1$ von innen berührt, daß also

(2.2) $\quad |f(z)|<M$ für $|z-b|<1-b$ (alle b mit $0<b<1$)

gilt; dabei kann M noch von b abhängen.

Wegen $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ sind nämlich zunächst alle Verfahren E_p, B, S_α äquivalent zu gewissen Verfahren T_α[7]), und es wird sich also noch darum handeln, unter der Voraussetzung (2.2) die Äquivalenz der T_α-Verfahren nachzuweisen. Seien α_1 und α_2 zwei Zahlen mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Infolge des $T_{\alpha_1} \to T_{\alpha_2}$-Satzes ist zu zeigen, daß aus der T_{α_2}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ deren T_{α_1}-Summierbarkeit folgt. Nun ist aber

$$T_{\alpha_2} = T_\beta T_{\alpha_1} \qquad \left(0 < \beta = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} < 1\right),$$

d. h. die Entwicklung von $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha_1$ ist, für $z = 1$ genommen, T_β-summierbar. Ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n w^n = g(w) \qquad \left(w = \frac{z - \alpha_1}{1 - \alpha_1}\right)$$

die genannte Entwicklung, die also T_β-summierbar ist für $w = 1$, so gibt es wegen (2.2) sicher einen Kreis $\mathfrak{K}$ in der w-Ebene von der im Hilfssatz beschriebenen Art. Daher ist

$$c_n (1 - \alpha_1)^n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \to \infty),$$

und die Anwendung des O-$T_\beta \to K$-Satzes[8]) zeigt, daß nicht nur T_β-$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n = s$ ist, sondern sogar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n = s$, also T_{α_1}-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, womit Satz 1 bewiesen ist.

3. Bei der Behandlung von Potenzreihen, die in $|z| \leq 1$ stetig sind, kommen wir zunächst zur Untersuchung des eingangs erwähnten Fejér-schen Beispiels.

Satz 2. *Es gibt eine in* $|z| < 1$ *reguläre, in* $|z| \leq 1$ *stetige Funktion* $f(z)$, *deren Potenzreihenentwicklung* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *in* $z = 1$ *nicht B-summierbar ist.*

Beweis. Wir setzen im Anschluß an Fejér

$$f_n(z) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \frac{z^2}{n-2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \frac{z^{n+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{2n}}{n} \right\}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

und bemerken zunächst, daß für $z = e^{i\varphi}$

$$|f_n(z)| = \left| \left(\frac{z^{-n}}{n} - \frac{z^n}{n}\right) + \left(\frac{z^{-n+1}}{n-1} - \frac{z^{n-1}}{n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{z^{-1}}{1} - \frac{z}{1}\right) \right| \cdot |z^n|$$
$$= 2 \left| \frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} + \cdots + \frac{\sin \varphi}{1} \right| \leq C_1$$

[7]) Vgl. W. Meyer-König [10], S. 289—290 und die Bemerkung S. 303.
[8]) Vgl. G. H. Hardy and J. E. Littlewood [3], S. 52.

gilt, wo C_1 eine positive, von n und φ unabhängige Konstante ist. Wir haben daher für dieses C_1

$$|f_n(z)| \leq C_1 \qquad (|z| \leq 1). \tag{3.1}$$

Nun sei $s_m^{(n)}$ die (nicht negative) m-te Teilsumme von $f_n(1)$. Wir wollen zeigen, daß

$$B(n; s_\nu^{(n)}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n)\, s_\nu^{(n)} > C_2 \log n \qquad (n > n_0) \tag{3.2}$$

ist für ein positives, von n unabhängiges C_2. Denn zunächst ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n)\, s_\nu^{(n)} \geq \sum_{h=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} u_{n+h}(n)\, s_{n-h}^{(n)}. \tag{3.3}$$

Weiter haben wir einerseits

$$s_{n+h}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-h-1} \frac{1}{n-\nu} > \log n - \log(h+1);$$

andererseits sind aber die Elemente $u_\nu(x)$ der B-Matrix für $x > x_0$ größer als $C_3 \frac{1}{\lfloor x}$ für ein positives, von x unabhängiges C_3, wenn man ν auf das Intervall $|\nu - x| \leq \lfloor\sqrt{x}$ beschränkt[9]). Mit Hilfe dieser Tatsachen ergibt sich aus (3.3)

$$\begin{aligned} B(n; s_\nu^{(n)}) &> \frac{C_3}{\lfloor n} \sum_{h=1}^{\lfloor n} \{\log n - \log(h+1)\} \\ &> C_3 \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\lfloor n} \log n - C_3 \frac{1}{\lfloor n} \log([\lfloor n] + 1)! > C_2 \log n \end{aligned}$$

für ein geeignetes positives, von n unabhängiges C_2; denn nach der STIRLINGschen Formel gilt

$$\frac{1}{\lfloor n} \log(\lfloor n + 1)! \cong \log \lfloor n \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist also (3.2) als richtig erkannt.

Wir setzen nun wieder mit FEJÉR

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_{2^{r^2}}(z)}{r^2}.$$

Wegen (3.1) konvergiert diese Polynomreihe gleichmäßig in $|z| \leq 1$, $f(z)$ ist also regulär in $|z| < 1$ und stetig in $|z| \leq 1$. Für die Teilsummen s_m der Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen von z gilt nach dem WEIER-

[9]) Man verwende etwa die in G. H. HARDY [2], S. 200 gegebene Abschätzung dieser $u_\nu(x)$.

STRASSschen Doppelreihensatz

$$s_m = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s_m^{(2r^3)}}{r^2} > \frac{s_m^{(2n^3)}}{n^2}$$

für alle n, und hieraus ergibt sich für $2^{n^3} > n_0$

$$\begin{aligned} B(2^{n^3}; s_r) &= \sum_{r=0}^{\infty} u_r(2^{n^3})\, s_r \\ &> \sum_{r=0}^{\infty} u_r(2^{n^3})\, \frac{s_r^{(2n^3)}}{n^2} \\ &> \frac{1}{n^2} B(2^{n^3}; s_r^{(2n^3)}) > C_2 \frac{1}{n^2} \log 2^{n^3}, \end{aligned}$$

was nicht beschränkt bleibt für $n \to \infty$. Daher ist die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ in $z = 1$ nicht B-summierbar.

Die Aussage von Satz 2 läßt sich noch beträchtlich verschärfen.

Zusatz. *Zu jedem $b > 1$ gibt es eine in $|z-b| > b-1$ reguläre und in $|z-b| \geq b-1$ stetige Funktion $F(z)$ $(= F_b(z))$, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ in $z = 1$ nicht B-summierbar ist.*

Beweis. Wir wählen $p > 1$ so, daß

$$b = \frac{2^p - 1}{2^p - 2}$$

ist, und bemerken zunächst, daß die in Satz 2 genannte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht E_{p+1}-summierbar ist; d. h. die E_p-Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist nicht E_1-summierbar. Unter Benützung der funktionentheoretischen Deutung des E_p-Verfahrens[10]) heißt das: Entwickelt man

$$f\left(\frac{z}{2^p - (2^p - 1)z}\right) = F(z)$$

nach Potenzen von z, so ist die dann entstehende Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ in $z = 1$ nicht E_1-summierbar. Da aber $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und in $|z| \leq 1$ stetig war, ist $F(z)$ dort regulär bzw. stetig, wo

$$\left|\frac{z}{2^p - (2^p - 1)z}\right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{z}{2^p - (2^p - 1)z}\right| \leq 1$$

ist, also für $|z-b| > b-1$ bzw. $|z-b| \geq b-1$. Satz 1 liefert vollends die Aussage des Zusatzes; die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ist danach durch keines der Verfahren E_p, B, S_α, T_α summierbar, da sie nicht E_1-summierbar ist.

[10]) Vgl. K. KNOPP [6], S. 325.

4. Der Satz 2 bzw. sein Zusatz lassen sich zum Beweis der Tatsache verwenden, daß zwei Sätze von J. KARAMATA und M. RIESZ in gewisser Hinsicht nicht verschärft werden können.

a. J. KARAMATA hatte bewiesen[11]): Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $|z|<1$ regulär und in $|z-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}$ stetig, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für jedes $\varepsilon>0$ BC_ε-summierbar.

Satz 2 zeigt, daß hierin das positive ε nicht durch $\varepsilon=0$ ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt bezüglich der Analoga zum KARAMATAschen Satz für die E_p- und S_α-Verfahren[12]).

b. Von M. RIESZ stammt der Satz[13]): Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$: $|z|<R$, $\vartheta<\arg(z-1)<2\pi-\vartheta$ $(R>1,\ 0<\vartheta<\pi/2)$ regulär und in dessen abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Der Rand des Gebiets $\mathfrak{G}$ trifft, wie man leicht sieht, den Einheitskreis $|z|=1$ in $z=1$ unter einem positiven Winkel. Es entsteht die Frage, ob der Satz von RIESZ richtig bleibt, wenn der Rand von $\mathfrak{G}$ den Einheitskreis $|z|=1$ in $z=1$ von außen berührt. Der Zusatz zu Satz 2 besagt nun, daß $\mathfrak{G}$ nicht durch ein Kreisgebiet $|z+c|<1+c$ $(c>0)$ ersetzt werden kann. Nach diesem Zusatz gibt es doch Funktionen $f(z)$, die in diesem Kreisgebiet regulär und in dessen abgeschlossener Hülle stetig sind, ohne daß ihre Entwicklung nach Potenzen von z in $z=1$ B-summierbar wäre.

c. Wir kommen nochmals auf die Untersuchungen bei beschränkten Potenzreihen zurück. In 2 hatten wir gesehen, daß dann die hier betrachteten Verfahren in zwei Gruppen äquivalenter Verfahren zerfallen. Über das Verhältnis zwischen den beiden Gruppen können wir nunmehr sagen: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch eines der Verfahren E_p, B, S_α, T_α summierbar zum Wert s, so ist diese Reihe auch C_k- und A-summierbar zum selben Wert, denn die Annahme hat ja zur Folge, daß $\lim_{z\to 1-0} f(z)=s$ ist. Andererseits zieht die C_k- und A-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ noch nicht die Summierbarkeit durch eines der übrigen Verfahren nach sich, wie unser Beispiel von Satz 2 beweist. Es zeigt sich hier wieder, daß beim Vergleich der Verfahren B und C_k das erstere stärker, das letztere aber feiner ist.

5. Lose mit den Untersuchungen dieser Arbeit zusammenhängend ist die Frage, ob die TAUBER-Bedingung $|a_n|\sqrt{n}\to 0$ für das B-Verfahren ausgemittelt werden kann.

---

[11]) Vgl. J. KARAMATA [5], S. 157.
[12]) Vgl. W. MEYER-KÖNIG [11], S. 352.
[13]) Vgl. etwa E. LANDAU [9], S. 64.

Satz 3. *Die Bedingung*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}\to 0 \quad . \quad (n\to\infty) \tag{5.1}$$

ist keine TAUBER-*Bedingung für das B-Verfahren.*

Beweis. Wäre (5.1) eine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren, so wäre auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2<\infty \tag{5.2}$$

eine solche. Denn wählt man zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein n_0 so, daß

$$\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty}|a_\nu|^2<\varepsilon^2$$

ist, so gilt für $n>n_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n_0}|a_\nu|\sqrt{\nu}+\frac{1}{n}\sum_{\nu=n_0+1}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}=A_1^{(n)}+A_2^{(n)},$$

$$A_1^{(n)}<\varepsilon \quad \text{für} \quad n>n_1>n_0$$

$$A_2^{(n)}\le\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\nu\cdot\sum_{\nu=n_0+1}^{n}|a_\nu|^2}<\varepsilon \quad \text{für} \quad n>n_0,$$

insgesamt also

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}<2\varepsilon \qquad (n>n_1).$$

Nun ist aber (5.2) keine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren. Denn nach MOORE[14]) gibt es eine Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x, die im Intervall $<-\pi,+\pi>$ stetig ist, und deren FOURIER-Reihe

$$f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)$$

für $x=0$ wohl B-summierbar, jedoch nicht konvergent ist, obwohl $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(0)^2<\infty$ vermöge der BESSELschen Ungleichung erfüllt wäre. Also ist (5.2) und damit (5.1) keine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren.

Literaturverzeichnis.

[1] FEJÉR, L.
Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Sitz. Ber. der Bay. Akad. der Wiss. **40**, 3. Abh. (1910), 17 S.

[2] HARDY, G. H.
Divergent Series, Oxford 1949.

[14]) Vgl. C. N. MOORE [12], S. 286.

[3] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD.
Theorems concerning the summability of series by BOREL's exponential method, Rendiconti Circolo mat. Palermo **41**, 36—53 (1916).

[4] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD.
Solution of the Cesàro summability problem for power-series and FOURIER series, Math. Zeitschr. **19**, 67—96 (1924).

[5] KARAMATA, J.
Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande, Math. Zeitschr. **44**, 156—160 (1939).

[6] KNOPP, K.
Über Polynomentwicklungen im MITTAG-LEFFLERschen Stern durch Anwendung der EULERschen Reihentransformation, Acta math. **47**, 313—335 (1926).

[7] KOGBETLIANTZ, E.
Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Paris 1931.

[8] LANDAU, E.
Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (3. Abh.), Archiv der Math. und Physik, 3. Reihe, **24**, 250—260 (1916).

[9] LANDAU, E.
Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Auflage, Berlin 1929.

[10] MEYER-KÖNIG, W.
Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, 257—304 (1949).

[11] MEYER-KÖNIG, W.
Die E_p- und S_a-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Math. Zeitschr. **52**, 344—354 (1949).

[12] MOORE, C. N.
On the application of BOREL's method to the summation of FOURIER series, Proc. Nat. Acad. Sc. **11**, 284—287 (1925).

[13] OFFORD, A. C.
On the summability of power series, Proc. London math. Soc., Ser. 2, **33**, 467—480 (1932).

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 335—362 (1952).

Zum Identitätsproblem bei Gruppen.

Von

Hermann Haken in Erlangen.

Einleitung.

Das *Identitätsproblem* bei abstrakten, durch Erzeugende und definierende Relationen erklärten Gruppen verlangt, ein Verfahren anzugeben, durch das man in endlich vielen Schritten von einem beliebig vorgegebenen Wort entscheiden kann, ob es auf Grund der definierenden Relationen gleich der Einheit ist. Unter dem *teilweise erweiterten* Identitätsproblem bezüglich gewisser Erzeugender soll hingegen im folgenden die Frage danach verstanden werden, ob sich ein vorgelegtes Wort mit Hilfe der Relationen in eines verwandeln läßt, das nur noch aus ganz bestimmten, stets fest vorgegebenen „gewissen" Erzeugenden besteht.

Während das Identitätsproblem in einer Anzahl von Einzelfällen [1—4; 7; 9—11][1]) auf verschiedenartige, meist stark auf das betreffende Beispiel zugeschnittene Weise behandelt wurde, sind bisher nur drei Methoden bekannt geworden, die speziell dazu entwickelt sind, das Identitätsproblem in möglichst umfassenden Klassen von Gruppen zu lösen. Einmal wäre in dieser Richtung als wichtiges Hilfsmittel der Satz von Schreier [12] über das freie Produkt von Gruppen mit vereinigten Untergruppen zu nennen, der es erlaubt, das Identitätsproblem in der gesamten Gruppe (dem „freien Produkt") zu lösen, wenn man in den einzelnen Gruppen das teilweise erweiterte Identitätsproblem bezüglich der Erzeugenden der zu vereinigenden Untergruppen lösen kann. Von diesem Hilfsmittel wird auch hier viel Gebrauch gemacht werden. Als zweite Methode wäre der Dehnsche Kalkül zu erwähnen, mit dessen Hilfe es W. Magnus [6; 8] gelang, das Identitätsproblem bei Gruppen mit einer definierenden Relation allgemein, d.h. ohne Einschränkung über die Gestalt der definierenden Relation zu lösen. Diesen Kalkül auch zur Lösung des Identitätsproblems bei Gruppen mit mehreren definierenden Relationen anzuwenden, scheint jedoch nur unter sehr starken Einschränkungen möglich zu sein [5]. Als dritte und wohl am weitesten reichende Methode verdient die Siebmethode von V. A. Tartakovskij [13] Beachtung, die mir allerdings erst nach Beendigung der vorliegenden Arbeit bekannt wurde. Wenngleich auch sie noch nicht zur vollständigen Lösung des Identitätsproblems geführt hat, so erlaubt sie — wie

[1]) [n] bedeutet die n-te Arbeit im Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

TARTAKOVSKIJ in zwei nachfolgenden Arbeiten [14; 15] zeigte — das Identitätsproblem in einer ziemlich breiten Klasse von Gruppen zu lösen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ebenfalls der Versuch unternommen, eine „direkte Methode" zur Lösung des Identitätsproblems zu entwickeln. Die Methode selbst hat mit der von TARTAKOVSKIJ den einen Gedanken gemeinsam, die Lösung des Identitätsproblems auf den Nachweis zurückzuführen, daß es im wesentlichen darauf ankommt, aus endlich vielen effektiv angebbaren Fällen den zutreffenden durch ein ebenfalls finites Verfahren herauszufinden. Darin ist aber auch das Gemeinsame der beiden Methoden erschöpft, denn bereits bei den „endlich vielen Fällen" handelt es sich um verschiedene Dinge, bei TARTAKOVSKIJ nämlich um die Wörter von bestimmten „Alter", die auf Grund der definierenden Relationen der Gruppe gleich Eins sind, bei der hier entwickelten Methode jedoch um Wörter von ganz bestimmter Struktur aus gewissen Erzeugenden. Dementsprechend unterscheiden sich die Behandlungsweisen wesentlich voneinander, so daß es nützlich erscheint, auf einige der daraus entspringenden Unterschiede im Resultat hinzuweisen. Diese Unterschiede zeigen sich nicht allein darin, daß die in den Arbeiten von TARTAKOVSKIJ und der vorliegenden Untersuchung behandelten Gruppentypen sich überschneiden, d.h. sowohl von TARTAKOVSKIJ Gruppen erfaßt werden, die durch die im folgenden beschriebene Methode nicht behandelt werden können, als sich auch unter den hier angeführten Fällen jeweils Gruppen befinden, die den Voraussetzungen bei TARTAKOVSKIJ nicht genügen. Während bei TARTAKOVSKIJ alle definierenden Relationen den gleichen Voraussetzungen unterliegen, wird bei der hier entwickelten Methode von gewissen Untersystemen von definierenden Relationen nur vorausgesetzt, daß man in den entsprechenden Gruppen, die zu diesen definierenden Relationen gehören, das Identitätsproblem lösen kann. Diese Voraussetzung, die — wie leicht zu sehen — schwächer ist, als wenn man über alle Relationen das gleiche voraussetzt, dürfte einen gewissen Vorzug bedeuten, der sich beispielsweise in folgendem äußert: Man kann Gruppen mit Vertauschungsrelationen behandeln, wenn alle übrigen Relationen den sonst gemachten Voraussetzungen genügen, da ja bei Vertauschungsrelationen das Identitätsproblem lösbar ist. Durch die TARTAKOVSKIJschen Sätze dagegen werden solche Gruppen nicht erfaßt, da Vertauschungsrelationen seinen Voraussetzungen nicht genügen. Ein weiterer günstiger Umstand bei der hier angegebenen Methode ist, daß sich dabei auch die Lösung des teilweise erweiterten Identitätsproblems bezüglich gewisser Erzeugender ergibt und Aussagen über die definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden dieser Untermengen gemacht werden können. Dadurch entsteht die Möglichkeit, auch Gruppen zu behandeln, die sich als freies Produkt (mit vereinigten isomorphen Untergruppen) aus den hier behandelten Gruppen mit anderen auffassen lassen, in denen man ebenfalls das teilweise erweiterte Identitätsproblem bezüglich der zu vereinigenden Untergruppen

lösen kann. Dabei ist also vorausgesetzt, daß als zu vereinigende Untergruppen gerade die oben erwähnten Untermengen mit den dazugehörigen definierenden Relationen fungieren.

Für wertvolle Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. W. SPECHT zu großem Dank verpflichtet.

I. Bezeichnungen und Hilfsbetrachtungen.

Die in der Arbeit benutzten Bezeichnungen seien hier kurz zusammengestellt[2]):

Einzelne *Erzeugende* werden durch kleine lateinische Buchstaben mit Indizes bezeichnet, also etwa durch $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, während deren *Gesamtheiten* durch kleine lateinische Buchstaben ohne Index wiedergegeben werden, im vorliegenden Beispiel also durch a, b. Die *Exponenten* der in den Wörtern auftretenden Erzeugenden werden in kleinen griechischen Buchstaben geschrieben. Ein *Wort* aus den Erzeugenden $a, b, \ldots$ wird mit $W(a, b, \ldots)$, seine *Normalform* — sofern man im betreffenden Falle von einer solchen sprechen kann — mit $N(a, b, \ldots)$ bezeichnet. *Bestandteile* von Wörtern werden durch A, B, C, D, X, Y (eventuell unter Angabe der darin auftretenden Erzeugenden als Argument) wiedergegeben. Das Wort $(A)\,(A)\ldots(A)$ mit α darin auftretenden (A) wird durch $(A)^\alpha$ abgekürzt. Die linke Seite der *definierenden Relation* $R_i(a) = 1$ wird — sofern nicht über die Gestalt von R_i sowieso eine genauere Aussage gemacht wird — durch R_i, die *Gesamtheit* solcher R_i durch R bezeichnet. Da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind, wird auch eine definierende Relation $R_i = 1$ kürzer allein durch den Buchstaben R_i bezeichnet. *Bestandteile* der linken Seite einer definierenden Relation werden durch P_i, Q_i, U_i, V_i (nötigenfalls mit Angabe des Arguments), deren *Gesamtheiten* durch die gleichen Buchstaben ohne Index gekennzeichnet. Eine *Folgerelation* aus den definierenden Relationen R wird durch $F_i(R)$, eine *Gesamtheit* von solchen Folgerelationen durch $F(R)$ (ohne Index) wiedergegeben, während die in den Folgerelationen auftretenden *Transformierenden* durch S und T bezeichnet werden. Die *Gesamtheit* von Wörtern oder von Bestandteilen von Wörtern bzw. von definierenden Relationen oder von linken Seiten von definierenden Relationen wird auch durch geschweifte Klammern symbolisiert, so etwa die Gesamtheit der Wörter $W_i(a)$ mit $i = 1, \ldots, n$ durch $\{W_i(a)\}_1^n$. Eine *Gruppe* wird stets durch große deutsche Buchstaben, etwa $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ bezeichnet, wobei im Argument zuerst die Erzeugenden, dann nach einem Semikolon die linken Seiten der definierenden Relationen angegeben sind. Beispielsweise wird die durch die Erzeugendengesamtheiten a, b und durch die definierenden Relationen $R(a, b) = 1$ gegebene Gruppe durch $\mathfrak{G}(a, b; R(a, b))$ symbolisiert. Die *Gleichheit* in der *freien* Gruppe, d.h. die Gleichheit bis auf identische Umformungen soll durch $\equiv$, die

[2]) Die Erklärung der verwendeten Begriffe findet man etwa bei [10].

Gleichheit auf Grund der *definierenden Relationen* der Gruppe in der üblichen Weise durch $=$ bezeichnet werden.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ sei gegeben durch zwei Systeme von Erzeugenden $a = a_1, \ldots, a_m$ und $b = b_1, \ldots, b_n$, zwischen denen erstens die Relationen $R^{(1)}(a)$ und $R^{(2)}(b)$ bestehen mögen. Die von den a bzw. b erzeugten Gruppen mit den definierenden Relationen $R^{(1)}$ bzw. $R^{(2)}$ mögen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ heißen. Die Teilmengen $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}, \ldots$ bzw. $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, b_{\nu_3}, \ldots$ der Erzeugenden a bzw. b mögen Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{G}_1$ bzw. von $\mathfrak{G}_2$ erzeugen. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ seien isomorph, und zwar so, daß die Abbildung $a_{\mu_\lambda} \leftrightarrow b_{\nu_\lambda} (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ induziert. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze dann zweitens außer $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ noch die definierenden Relationen

$$a_{\mu_\lambda} = b_{\nu_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

$\mathfrak{G}$ heißt *freies Produkt mit vereinigten Untergruppen* $\mathfrak{U}_1$ *und* $\mathfrak{U}_2$; falls $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nur aus dem Einheitselement bestehen, heißt $\mathfrak{G}$ *freies Produkt von* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$. Man setzt noch $a_{\mu_\lambda} = b_{\nu_\lambda} = c_\lambda$ und bezeichnet mit $A_1, A_2, \ldots$ bzw. $B_1, B_2, \ldots$ bzw. $C_1, C_2, \ldots$ irgendwelche Wörter aus den a bzw. b bzw. c. Dann gilt der

Satz von Schreier[3]). *Jedes Wort W aus $\mathfrak{G}$ läßt sich in einer der Formen*

$$C; \quad A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_k B_k$$

darstellen, wobei A_1 und B_k gleich Eins sein dürfen, aber im übrigen keines der Wörter A und B gleich einem Worte C ist, falls nicht W überhaupt gleich C ist. Eine solche Darstellung heiße Normalform. Ist $W \neq C$ und

$$W = \bar{A}_1 \bar{B}_1 \ldots \bar{A}_l \bar{B}_l$$

eine zweite Normalform für W, so gilt $k = l$ und

$$\bar{C}_1 A_1 = \bar{A}_1 C_1, \ldots, \bar{C}_l A_l = \bar{A}_l C_l$$
$$\bar{C}'_1 B_1 = \bar{B}_1 C'_1, \ldots, \bar{C}'_l B_l = \bar{B}_l C'_l,$$

wobei zu beachten ist, daß die c_λ sowohl als Erzeugende a_{μ_λ} wie als b_{ν_λ} aufgefaßt werden können[4]).

Daraus folgt der

Hilfssatz 1. *Ist W ein beliebiges Wort aus der Gesamtgruppe $\mathfrak{G}$ und kann man in $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort A oder B in eines aus den c verwandeln läßt, so kann man von W entscheiden, ob es sich in ein Wort A (oder in ein Wort B) verwandeln läßt.*

Beweis. Ist

$$W \equiv A_1 B_1 \ldots A_M B_M$$

[3]) Die Formulierung dieses Satzes sowie des daraus folgenden Hilfssatzes und dessen Beweis sind fast wörtlich von Magnus [8] übernommen.

[4]) Der Schreiersche Satz läßt, wie hier nur erwähnt werden soll, eine Übertragung auf mehrere zu vereinigende Gruppen zu. (Vgl. etwa Magnus [7].)

die vorgelegte, nicht notwendig als Normalform vorausgesetzte Darstellung von W mit Hilfe der Erzeugenden a und b, so untersuche man, falls $M > 1$, ob eines der Wörter A oder B sich in ein Wort aus den c verwandeln läßt. Ist dies etwa für A_m der Fall, so ist — auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}$ — $A_m = C_m$, also gleich einem Wort in den b, und man kann

$$B_{m-1} A_m B_m = B'_m$$

setzen, wobei B'_m ein neues Wort in den b ist. Jetzt wende man auf die so erhaltene Darstellung von W:

$$W = A_1 B_1 \dots A_{m-1} B'_m A_{m+1} \dots A_M B_M$$

das gleiche Verkürzungsverfahren an. Man kommt dann nach höchstens M Schritten auf eine Normalform von W und von dieser läßt sich nach dem Satz von SCHREIER sofort entscheiden, ob sie sich in ein Wort aus den a oder b überführen läßt.

Für die folgenden Untersuchungen sind noch die beiden Bemerkungen von Interesse:

1. Zwei Wörter sind dann und nur dann gleich, wenn ihre Normalformen gleich sind.

2. In einem freien Produkt (mit vereinigten Untergruppen) folgen alle Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe $\mathfrak{G}_i$ aus den definierenden Relationen von $\mathfrak{G}_i$ allein $(i = 1, 2)$.

Hilfssatz 2. *In der Gruppe*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\left(b, s, t, x;\ R(b, x),\ \{(s_\lambda P_\lambda(b, x))^{\alpha_\lambda}\}_1^l, \{t_\mu^{-1} Q_\mu(b, x)\}_1^m;\ \alpha_\lambda > 1\right)$$

mit den Erzeugenden

$$b = b_1, \dots, b_k;\quad s = s_1, \dots, s_l;\quad t = t_1, \dots, t_m;\quad x = x_1, \dots, x_n$$

läßt sich ein Wort $W(b, s, t, x)$ dann und nur dann in eines der Form $W'(b, s, t)$ verwandeln, wenn sich in der Gruppe

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'(b, s^*, x;\ R(b, x),\ (s^*)^\alpha)$$

mit den Erzeugenden

$$b;\ s^* = s_1^*, \dots, s_l^*;\ x$$

das Wort $W(b, s^* P(b, x)^{-1}, Q(b, x), x)$ in ein Wort der Form $W'(b, s^* P(b, x)^{-1}, Q(b, x))$ verwandeln läßt, also in ein Wort, das die Erzeugenden x nur in ganz bestimmten Verbindungen, nämlich innerhalb der P und Q enthält.

Von Interesse ist natürlich dieser Hilfssatz nur, wenn die P und Q auch tatsächlich die x oder einige dieser Erzeugenden enthalten. Mit anderen Worten lautet die Behauptung auch: Die Identität

$$\text{(I)} \qquad W(b, s, t, x) \equiv W'(b, s, t)\, F_0\left(R, t^{-1} Q, (sP)^\alpha\right)$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}$ zieht die Identität

$$\text{(II)} \qquad W(b, s^* P^{-1}, Q, x) \equiv W'(b, s^* P^{-1}, Q)\, \overline{F}_0\left(R, (s^*)^\alpha\right)$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}'$ nach sich und umgekehrt.

Beweis. Bei der Substitution

$$t = Q, \qquad s = s^* P^{-1}$$

geht die Identität (I) in die Identität (II) über. Ist andererseits $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ in $\mathfrak{G}'$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$ und $(s^*)^x$ in ein Wort verwandelbar, in dem sich die Erzeugenden x zusammen mit den anderen Erzeugenden derart zu Ausdrücken P und Q zusammenfassen lassen, daß gilt:

$$W(b, s^* P^{-1}, Q, x) \equiv W'(b, s^* P^{-1}, Q)\, F_0'\big(R(b, x), (s^*)^x\big),$$

so erkennt man vermöge der Substitution

$$s^* = s P,$$

daß in der Gruppe

$$\mathfrak{G}'' = \mathfrak{G}''\big(b, s, x;\ R(b, x),\ (s P(b, x))^x\big)$$

die folgende Identität besteht:

(III) $$W(b, s, Q, x) \equiv W'(b, s, Q)\, F_1'\big(R(b, x),\ (s P)^x\big).$$

Diese Identität besteht nun auch in der Gruppe $\mathfrak{G}$, da diese Gruppe aus der Gruppe $\mathfrak{G}''$ einfach durch Hinzunahme der definierenden Relationen $t^{-1} Q$ hervorgeht. Man ersetzt nun in (III) Q durch t und zeigt, daß dies lediglich auf ein Weglassen von Folgerelationen von $t^{-1} Q$ hinausläuft. Betrachtet man dazu etwa W' (bei W verläuft der Beweis analog), so sei von links her Q_i das erste Q in W', d.h. W' habe die Form

$$W' \equiv W_1(b, s)\, Q_i\, W_2(b, s, Q).$$

Dann gilt offenbar die Identität:

$$W' \equiv W_1 t_i\, W_2 W_2^{-1} t_i^{-1}\, Q_i\, W_2.$$

In W_2 sei Q_k das erste von links her vorkommende Q, d.h. W_2 habe die Form

$$W_2 \equiv W_3(b, s)\, Q_k\, W_4(b, s, Q).$$

Dann gilt hier die Identität:

$$W_2 \equiv W_3 t_k\, W_4 W_4^{-1} t_k^{-1}\, Q_k\, W_4.$$

So fortfahrend erkennt man, daß sich W' auf die Form

$$W'(b, s, t)\, F_2(t^{-1} Q)$$

bringen läßt. Führt man dasselbe auch auf der linken Seite der Identität (III) durch und bringt die dabei auftretende Folgerelation auf die rechte Seite, so entsteht, wie behauptet, die Identität der Form (I). Denn da alle x nur in Ausdrücken der Form Q vorkommen und diese aus dem Wort eliminiert wurden, kommen also in W' keine solchen Erzeugenden x mehr vor.

Als Spezialfall ergibt sich noch:

Ein Wort $W(b, s, t, x)$ aus $\mathfrak{G}$ ist auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $(sP)^x$, $t^{-1}Q$ dann und nur dann gleich Eins, wenn das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $(s^*)^x$ gleich Eins ist.

Hilfssatz 2a. *Ist ein Wort $W(b, x)$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $t^{-1}Q$, $(sP)^x$ gleich Eins, so ist es schon auf Grund der Relationen $R(b, x)$ gleich Eins.*

Ersetzt man nämlich in der Identität

$$W(b, x) \equiv F_0(R(b, x), t^{-1}Q, (sP)^x;\ T(b, s, t, x))$$

t durch Q und s durch P^{-1}, so ändert sich die linke Seite nicht. Auf der rechten Seite dagegen kommt $F_1(R(b, x);\ S(b, x))$ zu stehen. Dies war die Behauptung, die man mit anderen Worten auch so aussprechen kann:

Alle Relationen zwischen den Erzeugenden b und x, die aus den Relationen $R(b, x)$, $t^{-1}Q$, $(sP)^x$ folgen, ergeben sich schon aus den $R(b, x)$ allein.

Hilfssatz 2b. *Kann man in $\tilde{\mathfrak{G}}(b, x;\ R(b, x))$ das Identitätsproblem lösen, so kann man in*

$$\mathfrak{G}(b, s, t, x;\ R(b, x), t^{-1}Q, (sP)^x)$$

sogar entscheiden, ob sich ein Wort dieser Gruppe in eines der Gestalt $W(b, x)$ verwandeln läßt.

Wie sich aus einer leichten Modifikation des eben bewiesenen Hilfssatzes 2 ergibt, braucht man dazu nur in der Gruppe

$$\mathfrak{G}'(b, s^*, x;\ R(b, x), (s^*)^x)$$

zu entscheiden, ob sich das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ in eines der Form $\overline{W}(b, x)$ verwandeln läßt. $\mathfrak{G}'$ ist aber freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_0(b, x;\ R(b, x)) \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_1(s_1^*;\ (s_1^*)^{\alpha_1}), \ldots \mathfrak{G}_l(s_l^*;\ (s_l^*)^{\alpha_l}).$$

Da man in jeder dieser Gruppen das Identitätsproblem lösen kann, kann man nach Hilfssatz 1 entscheiden, ob sich das vorgelegte Wort in eines aus $\mathfrak{G}_0$ allein verwandeln läßt.

Es sei nun eine Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(b, s, t, x;\ R(b), R'(x), \{(s_\lambda P_\lambda(b, x))^{\alpha_\lambda}\}_1^l, \{t_\mu^{-1} Q_\mu(b, x)\}_1^m, \alpha_\lambda > 1)$$

vorgelegt.

Folgen in ihr alle Relationen zwischen den Erzeugenden b, s und t schon aus $R(b)$ allein, so heißt dies: Die b, s und t erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{U}$, die als einzige definierende Relationen die $R(b)$ besitzt, oder noch anders ausgedrückt: Ist ein Wort $W(b, s, t)$ in $\mathfrak{G}$ gleich Eins, dann ist es schon in $\mathfrak{U}$ gleich Eins. $\mathfrak{U}$ läßt sich aber als freies Produkt aus $\mathfrak{U}_0(b; R(b))$ und $\mathfrak{U}_1(s, t)$ auffassen. Ist daher ein Wort aus $\mathfrak{U}$ gleich Eins,

so muß es sich bei der SCHREIERschen Konstruktion auf die Weise verkürzen lassen, daß einige seiner b-haltigen Teilwörter auf Grund von $R(b)$ gleich Ems sind, die Erzeugenden s, t sich identisch fortheben lassen. Es läßt sich also unter der Voraussetzung, daß alle Relationen zwischen b, s und t aus den definierenden Relationen $R(b)$ allein folgen, ein Wort $W(b, s, t)$, das in $\mathfrak{G}$ gleich Eins ist, sicher auf die Weise in Eins verwandeln, daß man es als in dem freien Produkt aus $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ liegend betrachtet und dort nach der in Hilfssatz 1 beschriebenen Weise in Eins umformt.

Geht man vermöge der Substitution

$$t = Q(b, x), \qquad s^* = s P(b, x)$$

von der zuerst angeführten Gruppe $\mathfrak{G}$ zu der Gruppe

$$\mathfrak{G}'(b, s^*, x;\ R(b),\ R'(x),\ (s^*)^\alpha)$$

über, so ist wegen Hilfssatz 2 zunächst ein Wort $W(b, s, t)$ aus $\mathfrak{G}$ dann und nur dann gleich Eins, wenn das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q)$ in $\mathfrak{G}'$ gleich Eins ist. Nun war eben festgestellt worden, daß in einem Worte der Form $W(b, s, t)$, das in $\mathfrak{G}$ gleich Eins ist, sich bei Durchführung der SCHREIERschen Konstruktion die s bzw. t gegenseitig fortheben. Für das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q)$ bedeutet dies, daß es — sofern es gleich Eins ist — sich stets auf die Weise in Eins verwandeln läßt, daß sich die Q bzw. $s^* P^{-1}$ in ihrer Gesamtheit, und zwar jeweils unzerstört wegheben, ohne daß man dabei $R'(x)$ zu Hilfe nimmt.

Man betrachte nun umgekehrt die Gruppe $\mathfrak{G}'$: In ihr seien die P und Q folgendermaßen beschaffen:

(Bedingung B). *Ein beliebiges Wort der Form $W(s^* P^{-1}, Q, b)$ soll sich nicht auf Eins verkürzen lassen, wenn es sich nicht schon in der folgenden Weise zu Eins machen läßt: Bei Anwendung der* SCHREIERschen *Konstruktion*[5]) *verwandle man diejenigen b-haltigen Teilwörter, die nicht aus P oder Q stammen und bei denen es möglich ist, in Eins, dann fasse man zusammenstoßende Q bzw. $s^* P^{-1}$ mit gleichen Indizes und entgegengesetzten Exponenten zu Eins zusammen — dabei heben sich also Q und $s^* P^{-1}$ unzerstört weg —, fasse dann wieder zusammenstoßende b-haltige Teilwörter, die nicht aus P oder Q stammen, zusammen, verwandle sie, wenn möglich, in Eins und so fort.*

Damit die P bzw. Q der Bedingung B genügen, ist offenbar notwendig, daß die P bzw. Q sich in kein Wort verwandeln lassen, das nur aus Erzeugenden b besteht: Wäre nämlich etwa $Q = A(b)$, so würde $W(Q, b) \equiv Q A(b)^{-1} = 1$ sein entgegen der Forderung B. Und ebenso für P: Wäre etwa $P_1 = B(b)$, so würde gelten: $W(s_1^* P_1, b) \equiv (s_1^* P_1^{-1} B(b))^{\alpha_1} = (s_1^*)^{\alpha_1} = 1$. Hinreichende Bedingungen für P und Q zur Erfüllung der Forderung B werden in dem Kapitel II gegeben.

[5]) Man hat es hier mit einem freien Produkt aus $\mathfrak{G}_1(b; R(b))$, $\mathfrak{G}_2(x; R'(x))$ und $\mathfrak{G}_3(s^*; (s^*)^\alpha)$ zu tun!

Man geht nun wieder zur Gruppe $\mathfrak{G}$ wie im Hilfssatz 2 zurück und erhält wie dort:

$$W_{\mathfrak{G}'}(s^* P^{-1}, Q, b) \to W_{\mathfrak{G}}(s, t, b).$$

Nun war eben festgestellt worden, daß das Wort $W_{\mathfrak{G}'}$, wenn es gleich Eins ist, sich stets auf die Weise verkürzen läßt, daß sich bei der SCHREIERschen Konstruktion die Q bzw. $s^* P^{-1}$ gegenseitig, und zwar unzerstört wegheben. Für das entsprechende Wort $W_{\mathfrak{G}}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet dies: Ist das Wort $W(s, t, b)$ gleich Eins auf Grund der definierenden Relationen $R(b)$, $R'(x)$, $(sP)^x$, $t^{-1}Q$, wobei die P und Q von der oben verlangten Beschaffenheit sind, so läßt es sich stets auf die Weise zu Eins machen, daß man das Wort als in dem freien Produkt aus $\mathfrak{U}_0(b; R(b))$, $\mathfrak{U}_1(s, t)$ liegend betrachtet und dann gemäß der SCHREIERschen Konstruktion zu Eins verkürzt. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß sich das Wort schon auf Grund der definierenden Relationen $R(b)$ allein zu Eins machen läßt. Zusammenfassend kann man also sagen:

Statt in $\mathfrak{G}$ zu beweisen, daß alle Relationen zwischen den Erzeugenden b, s, t aus den Relationen $R(b)$ allein folgen, genügt es, in $\mathfrak{G}'$ zu zeigen: Wenn jedes beliebige Wort der Form $W(b, s^* P^{-1}, Q)$ in $\mathfrak{G}'$ sich nicht derart zu Eins verkürzen läßt, daß sich jedes Q_μ gegen Q_μ, jedes $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ gegen $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ und zwar jeweils unzerstört forthebt, so läßt sich dieses Wort überhaupt nicht in Eins verwandeln.

II. Behandlung eines speziellen Gruppentypus.

Die im ersten Abschnitt erzielten Ergebnisse gestatten unter sogleich zu nennenden Voraussetzungen die Behandlung des folgenden Gruppentypus:

$$\mathfrak{G}(x, a, y;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y)\ ^{6})$$

$$\{(P'_\varkappa(x, a)\, U_\varkappa(a, y))^{\gamma_\varkappa}\}_1^k, \qquad \{Q'_\mu(x, a)\, V_\mu(a, y)\}_1^m, \qquad \alpha_\varkappa > 1)\ ^{7})\ ^{8})$$

bei dem sich folgendes zeigen läßt:

(A) *Man kann entscheiden, ob sich ein Wort*

(α) *in eines der Form $W(a, x)$ bzw.*

(β) *in eines der Form $W(a, y)$ bzw.*

(γ) *in eines der Form $W(x, y)$ verwandeln läßt.*

---

[6]) Dabei können auch einige oder alle dieser definierenden Relationen $\equiv 1$ sein, also als nicht vorhanden angesehen werden.

[7]) Hier ist auch der Fall zugelassen, daß entweder die Relationen mit $\alpha > 1$ oder mit dem „Exponenten" $= 1$ identisch Eins sind, also unberücksichtigt bleiben können. Im zweiten Falle lassen sich die Voraussetzungen über die $R(x)$ und $R(a)$ leicht etwas lockern.

[8]) Bei definierenden Relationen der Form $(U)^\alpha$ darf man stets $\alpha > 0$ annehmen, denn mit $(U)^\alpha$ ist auch $(U)^{-\alpha}$ definierende Relation.

(B) *Alle Relationen*
(α) *zwischen den a und x folgen aus* $R^{(1)}(x)$ *und* $R^{(2)}(a)$ *allein,*
(β) *zwischen den a und y aus* $R^{(3)}(x)$ *und* $R^{(2)}(a)$ *allein,*
(γ) *zwischen den x und y aus* $R^{(1)}(x)$ *und* $R^{(3)}(y)$ *allein*[9]).

(C) *Man kann das Identitätsproblem lösen.*

Die Voraussetzungen haben dabei folgenden Wortlaut:

1. In den Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ ist das Identitätsproblem lösbar.

2. In dem freien Produkt $\mathfrak{G}'$ aus $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$[10]) besitzen die Ausdrücke P' und Q' bereits eine Minimalzahl von Teilwörtern aus den einzelnen Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$, sind also schon in der Normalform. Sie können in der Gestalt $Q' \equiv A'(a)\,\bar{Q}(x,a)\,A''(a)$ angenommen werden, wobei $\bar{Q}$ von Wörtern in x berandet sein soll, während $P'^{-1} \equiv \bar{P}(x,a)\bar{A}(a)$ angenommen werden darf, wobei $\bar{P}$ mit einem Wort in x enden soll, also $\bar{P}$ in der Normalform noch x enthalten soll. Die weiteren Voraussetzungen beziehen sich auf die Teilwörter $\bar{P}$ und $\bar{Q}$[11]), wobei es zur Entlastung der Bezeichnungsweise zweckmäßig ist, zu neuen Q überzugehen:

Es sei $\quad Q_\mu \equiv \bar{Q}_\mu \quad$ für $\quad \mu = 1, \ldots, m \quad$ und

$$Q_\mu \equiv \bar{Q}^{-1}_{\mu-m} \quad \text{für} \quad \mu = m+1, \ldots, 2m.$$

Es wird nun weiter verlangt:

Q_μ besitze eine Normalform der Gestalt ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu Q^*_\mu$ mit den folgenden Eigenschaften:

Das Wort $Q_{\mu_1} Q_{\mu_2}$ mit $\mu_1 \neq \mu_2 - m$ (bzw. $\mu_2 \neq \mu_1 - m$) darf sich auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$ und $R^{(2)}(a)$ nur bis auf

$$ {}^*Q_{\mu_1} \hat{Q}_{\mu_1} \tilde{Q}_{\mu_1,\mu_2} \hat{Q}_{\mu_2} Q^*_{\mu_2} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{Q}_{\mu_1,\mu_2} = Q^*_{\mu_1} {}^*Q_{\mu_2} $$

verkürzen lassen.

Wir unterscheiden nunmehr zwei verschiedene Forderungen:

2a. Der „Kern" $\hat{Q}_\mu$ sei für alle $\tilde{Q}_{\mu,\mu_2}$ bzw. $Q_{\mu_1,\mu}$ stets der gleiche[12]) und habe für alle μ die folgende Form:

$$A_{1,\mu}(a)\, B_\mu(a,x)\, A_{2,\mu}(a)\ [13]).$$

---

[9]) Dies besagt in $\mathfrak{G}$ mehr als die Aussage: In $\mathfrak{G}$ folgen alle Relationen zwischen den x bzw. y aus $R^{(1)}(x)$ bzw. $R^{(3)}(y)$ allein. Entsprechend in den beiden anderen Fällen (α) und (β).

[10]) In $\mathfrak{G}'$ kann man wegen Hilfssatz 1 und der Voraussetzungen über $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ insbesondere das Identitätsproblem lösen.

[11]) Auch in der späteren Beweisführung werden wir zur Vereinfachung die Ausdrücke P', Q' in der Gestalt $Q' \equiv \bar{Q}(x,a)$ und $P'^{-1} \equiv \bar{P}(x,a)$ voraussetzen und danach durch eine einfache Reduktion den allgemeinen Fall erledigen.

[12]) Für verschiedene μ kann der Kern dagegen verschieden sein.

[13]) Die einzelnen A, B, C, D sollen dabei stets unverkürzbar sein; wegen der angegebenen Bedingung über die Begrenzung folgt, daß auch die gesamten Ausdrücke unverkürzbar sind.

Darin kann $B=1$ sein, sonst werde B jedoch von x-Zeichen begrenzt. Dagegen seien $A_1, A_2 \neq 1$ (und, wenn $B=1$ ist, sei $A_1 A_2 \neq 1$).

Die ${}^*Q_\mu$ sollen die Form $A_\mu(a, x)\, B'_\mu(x)$ besitzen. Dabei sei $B'(x) \neq 1$, $A(a, x)$ kann gleich Eins sein, sonst werde es rechts von einem Ausdruck in a begrenzt. (Links ist es nach einer früheren Voraussetzung von einem Ausdruck in x berandet.)

$\tilde{Q}_{\mu_i, \mu_k}$ habe die Form $A_{1, \mu_i, \mu_k}(x)\; B_{\mu_i, \mu_k}(a, x)\, A_{2, \mu_i, \mu_k}(x)$. Dabei kann $B=1$ sein, sonst werde es von Wörtern in a begrenzt, dagegen seien A_1, A_2 und, wenn $B=1$ ist, sei auch $A_1 A_2 \neq 1$.

Q^*_μ habe die Form $A_\mu(x)\, B''_\mu(a, x)$, mit $A \neq 1$, dagegen kann $B=1$ sein, andernfalls werde es links von einem Ausdruck in a begrenzt (und rechts von einem Ausdruck in x).

2b. Der „Kern" $\hat{Q}_\mu$ sei für alle $\tilde{Q}_{\mu, \mu_2}$ bzw. $\tilde{Q}_{\mu_1, \mu}$ stets der gleiche[12]) und habe für alle μ die folgende Form

$$C_{1, \mu}(x)\, D_\mu(a, x)\, C_{2, \mu}(x)\,[13]).$$

Hierbei ist auch $D=1$ zugelassen, sonst soll D von a begrenzt werden. C_1 und C_2 sollen $\neq 1$ sein; wenn $D=1$ ist, sei $C_1 C_2 \neq 1$.

${}^*Q_\mu$ habe die Form $A_\mu(a, x) \neq 1$, rechts begrenzt von einem Ausdruck in a (und, da $\overline{Q}$ von x-haltigen Teilwörtern begrenzt werden sollte, links von x-Zeichen berandet). $\tilde{Q}_{\mu_1, \mu_2}$ habe die Form $B_{\mu_1, \mu_2}(a, x) \neq 1$, begrenzt von Ausdrücken in a, braucht hingegen nicht x zu enthalten.

Q^*_μ habe die Form $A'_\mu(a, x) \neq 1$, links begrenzt von einem Ausdruck in a (und rechts von einem Ausdruck in x).

Die Normalform von $P_\varkappa^{-1} Q_\mu$ laute: $(PQ)_{\varkappa, \mu} \hat{Q}_\mu Q^*_\mu$. Im Falle 2a habe $(PQ)_{\varkappa \mu}$ die Form $A_{\varkappa, \mu}(a, x)\, B_{\varkappa, \mu}(x)$, wobei A rechts von einem Ausdruck in a begrenzt werde, sofern A nicht gleich Eins ist; B sei $\neq 1$.

Im Falle 2b kann $(PQ)_{\varkappa, \mu} = 1$ sein, sonst werde es rechts von einem Ausdruck in a begrenzt.

Die $\hat{Q}_\mu$ und Q^*_μ seien beidemale die gleichen wie früher. Über $P_\varkappa P_\mu$ und $P_\varkappa^{-1} P_\mu$ wird dagegen nichts vorausgesetzt.

3. In dem freien Produkt aus den Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ sollen die U *und* V die Voraussetzungen wie die Q erfüllen. (Dabei ist also statt x bei den Q jetzt überall y zu nehmen), wobei auch hier wieder die Forderungen 3a und 3b zu unterscheiden sind.

Die eingangs aufgestellte Behauptung kann also etwa so zusammengefaßt werden:

In jeder Gruppe $\mathfrak{G}$, die die Voraussetzungen 1, 2a oder 2b, 3a oder 3b erfüllt, können die Aufgaben (A), (B), (C) gelöst werden.

Beweis. Vermöge der definierenden Relationen

$$\{s_\varkappa^{-1} U_\varkappa = 1\}_1^k, \qquad \{t_\mu V_\mu = 1\}_1^m$$

führt man die neuen Erzeugenden

$$s = s_1, s_2, \ldots, s_k; \qquad t = t_1, t_2, \ldots, t_m$$

ein. Nach Hilfssatz 2 ist es zur Lösung der Aufgaben (A), (B), (C) notwendig und hinreichend, die gleichen Probleme in der Gruppe

$$\hat{\mathfrak{G}}\,(x, a, y, s, t;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y),\ QV,\ (PU)^{\alpha},\ s^{-1}U,\ tV)$$

zu lösen. Man geht nun in $\hat{\mathfrak{G}}$ zu einem äquivalenten Relationensystem[14])

$$R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y),\ t^{-1}Q,\ s^{-1}U,\ tV,\ (sP)^{\alpha}$$

über. Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich $\hat{\mathfrak{G}}$ in ein freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_1\,(x, a, s, t;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ t^{-1}Q,\ (sP)^{\alpha})$$

und

$$\mathfrak{G}_2\,(y, a, s, t;\ R^{(3)}(y),\ R^{(2)}(a),\ tV,\ s^{-1}U)$$

mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}\,(a, s, t;\ R^{(2)}(a))$ aufspalten. Zum Beweise hat man zu zeigen:

(D) In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ kann man entscheiden, ob sich ein Wort aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ in eines der Untergruppe verwandeln läßt.

(E) In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ folgen alle Relationen zwischen den Erzeugenden der zu vereinigenden Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ aus $\mathfrak{G}_2$ aus den Relationen $R^{(2)}(a)$ allein, d. h. die beiden Untergruppen sind isomorph.

Es läßt sich dann sofort feststellen (Folgerung F):

Da nach dem Satz von SCHREIER alle Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe $\mathfrak{G}_i$ aus den definierenden Relationen dieser Gruppe alleine folgen, ist zum einen wegen Hilfssatz 2a die Richtigkeit der Behauptungen (B) (α) und (B) (β) evident, während sich zum andern ergibt, daß es zur Lösung der Aufgaben (A) (α) und (A) (β) genügt, von dem vorgelegten Wort aus $\mathfrak{G}$ zu entscheiden, ob es sich in irgendein Wort aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ allein verwandeln läßt. Nach Hilfssatz 2b ergibt sich dann sofort die Lösung der Aufgaben (A) (α) und (A) (β). Damit und wegen [10]) ist die Lösung von (C) klar. Die Beweise zu (A) (γ) und (B) (γ) schließlich werden noch später erbracht.

Da der Typus der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ ein Spezialfall desjenigen der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist[15]), braucht man zum Beweise von (D) und (E) nur die letztere Gruppe

[14]) Zwei Systeme von definierenden Relationen $R(b)$ und $R'(b)$ heißen äquivalent, wenn gilt:

$$R \equiv F(R') \quad \text{und} \quad R' \equiv F'(R).$$

Man sieht dann sofort:

Besteht in $\mathfrak{G}\,(b; R(b))$ eine Identität der Form

$$W(b) \equiv \overline{W}(b)\,\hat{F}_0(R),$$

dann besteht in dieser Gruppe auch die Identität

$$W(b) \equiv \overline{W}(b)\,\tilde{F}_0(R')$$

und umgekehrt.

[15]) In $\mathfrak{G}_2$ treten nämlich keine definierenden Relationen mit $\alpha > 1$ auf.

zu betrachten. Durch die Substitution

$$\{t_\mu = Q_\mu\}_1^m, \qquad \{s_\varkappa^* = s_\varkappa P_\varkappa\}_1^k$$

gelangt man von $\mathfrak{G}_1$ zu der Gruppe

$$\mathfrak{G}_1^*(a, x, s^*;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ (s^*)^\alpha).$$

Wegen Hilfssatz 2 hat man in $\mathfrak{G}_1^*$ zu zeigen, daß man von einem beliebigen Wort dieser Gruppe feststellen kann, ob es sich auf die Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ bringen läßt. Ferner hat man auf Grund des Abschnittes I zu zeigen, daß sich ein Wort der Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ höchstens dann zu Eins verkürzen läßt, wenn es sich in der in Bedingung B beschriebenen Weise in Eins verwandeln läßt. Wie man sofort feststellt, läßt sich die Gruppe als freies Produkt aus den Gruppen

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x)), \qquad \tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a)), \qquad \mathfrak{G}_3(s^*; (s^*)^\alpha)$$

auffassen. Um die Frage entscheiden zu können, ob sich ein beliebiges Wort dieser Gruppe in eines der Gestalt $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ verwandeln läßt, wird man im Anschluß an die Bemerkung 1 von Abschnitt I die Normalform beider Wörter aufsuchen und insbesondere die Normalformen der Wörter der eben angegebenen Gestalt zu klassifizieren suchen. Man geht dazu schrittweise vor und untersucht zuerst, ob sich eine allgemeine Regel für die Struktur der Normalform eines beliebigen Wortes der Form $W(a, Q)$ angeben läßt. Ein solches Wort hat also zunächst etwa die Gestalt

$$A_1(a)\, Q_{\mu_1} A_2(a)\, Q_{\mu_2} A_3(a) \ldots .$$

Es läßt sich eventuell zuerst dadurch verkürzen, daß einige der $A_i = 1$ sind. Stoßen dann Q_μ mit um $\pm m$ verschiedenen μ zusammen, so hebt sich dabei ein Q_μ gegen ein anderes $Q_{\mu'}$ weg und es tritt sicher eine Verringerung der x-Zeichen des Gesamtwortes ein, wobei zu beachten ist, daß sich dabei die betreffenden Q_μ unzerstört weggehoben haben. Das Wort werde nun in der angegebenen Weise weiter verkürzt, bis sich auf diese Art keine weitere Verkürzung mehr erzielen läßt. Unter den zu Anfang gemachten Voraussetzungen läßt sich nun zeigen, daß das untersuchte Wort, sofern es noch nicht bis auf Eins verkürzt worden ist, sich nicht mehr in Eins verwandeln läßt. Ferner läßt sich dann leicht eine Aussage über die Beschaffenheit der Normalform eines solchen Wortes machen. Man betrachte zu diesem Zwecke das in der angegebenen Weise verkürzte Wort, das aus Aggregaten der Form

$$A_i(a) \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j}$$

zusammengesetzt ist. Dabei sind die $A_i \neq 1$, denn sonst wäre ja noch eine weitere Verkürzung in der oben beschriebenen Weise möglich gewesen. Ebenso darf man annehmen, daß in dem Ausdruck

$$\prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j}$$

keine zwei Q_μ mit um $\pm m$ verschiedenen Indizes zusammenstoßen. Auf Grund der Voraussetzungen über die Q_μ stellt man mittels vollständiger Induktion fest, daß die Normalform von

$$\prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j} \quad \text{die Gestalt} \quad {}^*Q_{\mu_1} \prod_{j=1}^{k-1} (\hat{Q}_{\mu_j} \tilde{Q}_{\mu_j, \mu_{j+1}}) \hat{Q}_{\mu_k} Q^*_{\mu_k}$$

hat. Diese Normalform wird von Ausdrücken in x begrenzt. Ferner hat sie die wichtige Eigenschaft, daß in ihr mindestens so viele x-haltige Teilwörter vorkommen wie es in der Normalform $N(Q)$ „Kerne" gibt. Da die zwischen den betrachteten $N(Q)$ stehenden Ausdrücke $A_i \neq 1$ sind und außerdem die $N(Q)$ von x-Wörtern begrenzt werden, ist das Wort jetzt nicht weiter verkürzbar, also $\neq 1$. Man hat mithin eine unverkürzbare Form der Gestalt

$$A_1(a)\, N_1(Q)\, A_2(a)\, N_2(Q)\, A_3(a) \ldots A_l(a)$$

aufgefunden, in der die A_i und $N_i \neq 1$ sind (eventuell mit Ausnahme von A_1 und A_l). Nach dem Satz von SCHREIER ist dies aber schon *die* Normalform des vorgelegten Wortes $W(a, Q)$.

Um nun festzustellen, ob die Normalform N' eines *beliebigen* Wortes der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ übereinstimmt mit der Normalform N eines Wortes der Gestalt $W(a, Q)$, bestimme man zunächst die Zahl Z der in N' stehenden x-haltigen Teilwörter, kurz x-Wörter genannt. Da nach dem Satz von SCHREIER insbesondere die Zahl der x-Wörter eindeutig bestimmt ist, kommen nur solche Normalformen N in Betracht, in denen diese Anzahlbedingung erfüllt ist. Da aber wegen der oben gemachten Bemerkung in den Normalformen $N(Q)$ und damit auch in der Gesamtnormalform von $W(a, Q)$ höchstens so viele Kerne vorkommen wie x-Wörter vorhanden sind, kommen nur Normalformen mit höchstens Z Kernen in Frage. Man hat nun alle möglichen Normalformen einer gegebenen Zahl von Kernen aufzusuchen. Beispielsweise hat bei *einem* Kern die Normalform die Gestalt $A_1 Q_\mu A_2$, wobei die A_i auch $= 1$ sein können. Bei zwei Kernen hat man von den Kernen $\hat{Q}_\mu$ je zwei, nötigenfalls auch gleiche, herauszugreifen und zu bilden:

1. $A_1 Q_{\mu_1} A_2 Q_{\mu_2} A_3$, $\quad A_2 \neq 1$, jedoch $A_1, A_3 = 1$ zugelassen.
2. $A_1 {}^*Q_{\mu_1} \hat{Q}_{\mu_1} \tilde{Q}_{\mu_1, \mu_2} \hat{Q}_{\mu_2} Q^*_{\mu_2} A_2$, $\quad A_1, A_2 = 1$ erlaubt, $\mu_1 \neq \mu_2 \pm m$.

Allgemein läßt sich sagen: Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, diese Kerne anzuordnen[16]). Es ist aber auch nur auf endlich viele Weisen möglich, die Zwischenräume zwischen den Kernen auszufüllen[16]). Ent-

[16]) Es seien nämlich etwa Z_0 Kerne zugelassen und $2m$ verschiedene Kerne vorhanden. Da, wie oben dargelegt, zwischen den Kernen höchstens noch drei andere Ausdrücke stehen können, sind weniger als $4(Z_0+1)$ Stellen zu besetzen. Für die Besetzung kommen höchstens (Z_0+1) A_i in Betracht und außerdem $(4m + 4m^2)$ andere Glieder ${}^*Q_\mu$, Q^*_μ, $\tilde{Q}_{\mu,\nu}$ neben den Kernen. Es gibt also keinesfalls mehr als $(Z_0 + 1 + 6m + 4m^2)^{4(Z_0+1)}$ Möglichkeiten, voneinander verschiedene Normalformen mit einer vorgegebenen Zahl von Kernen aufzubauen, wobei die A_i noch beliebig, aber $\neq 1$ sind. (Das an Anfang bzw. Schluß stehende A darf auch $= 1$ sein.)

weder stammen die benachbarten Kerne aus den gleichen $N(Q)$, dann steht zwischen ihnen $\widetilde{Q}_{\mu_i, \mu_{i+1}}$ oder sie stammen aus verschiedenen (jedoch benachbarten) $N(Q)$, dann steht zwischen ihnen $Q^{*}_{\mu_i} A(a)^{*} Q_{\mu_k}$, wie man sofort der Struktur der Normalform $N(a, Q)$ entnimmt. Über $A(a)$ läßt sich dabei nur sagen, daß es von Eins verschieden ist. Von allen diesen Normalformen, die zunächst einmal tatsächlich aufzusuchen sind, kommen aber in die engere Auswahl nur diejenigen, bei denen die gleiche Zahl von x-Wörtern vorkommt wie in der vorgelegten Normalform N'. (Gibt es keine solche Normalform N, dann ist man schon fertig; das Wort läßt sich also nicht in eines der verlangten Gestalt verwandeln.) Ferner müssen bei Übereinstimmung zweier Normalformen insbesondere die x-Wörter beider Normalformen in der gleichen Reihenfolge übereinstimmen. Da man in $\widetilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$ das Identitätsproblem lösen kann, kann man auch entscheiden, welche der vorgelegten Normalformen auch noch dieser Bedingung genügen. Es seien dies die Normalformen $N_1, \ldots, N_j$. Man untersuche nun, ob man in N_1 die noch unbestimmt gelassenen A_i so festlegen kann, daß das Wort $N'^{-1} N = 1$ wird. N_1 habe die Form

$$A_1 N_1(Q) A_2 N_2(Q) \ldots N_n(Q) A_{n+1} \quad \text{mit} \quad A_i \neq 1 \quad \text{für} \quad i \neq 1,\ i \neq n+1.$$

Schreibt man hierin die $N_i(Q)$ auch in ihre x- bzw. a-haltigen Bestandteile aus, so hat $N_1(a, Q)$ die Gestalt

$$A_1(a) \underbrace{C_1(x) A_2'(a) C_3(x) \ldots C_{l_1}(x)}_{N_1(Q)} A_2(a) \ldots$$

$N'(a, x)$ habe die Form

$$B_1(a) D_1(x) B_2(a) D_2(x) \ldots D_{n'}(x) B_{n'+1}(a).$$

Wie man schon weiß, gilt für die C bzw. D aus $N_1(a, Q)$ bzw. N': $D_i(x) = C_i(x)$ [auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$]. Nach dem Satz von SCHREIER sind die beiden Normalformen dann und nur dann gleich, wenn außerdem auch die A_i bzw. A_i' mit den B_i [auf Grund der definierenden Relationen $R^{(2)}(a)$]* übereinstimmen. Dies führt also auf die zu erfüllenden Beziehungen:

$A_1 = B_1$, stets erfüllbar, da ja A_1 beliebig wählbar ist.

$A_2' = B_2$. Hier sind A_2' und B_2 fest vorgegeben:

B_2, weil es aus der Normalform eines fest vorgegebenen Wortes stammt, A_2', weil es aus der wohlbestimmten Normalform $N_1(Q)$ stammt. Entsprechend müssen die Relationen

$$A_i' = B_i \quad \text{für} \quad i = 3, \ldots, l_1 - 1$$

für fest vorgegebene A_i und B_i erfüllt werden. Dagegen ist in

$$A_2 = B_{l_1}$$

A_2 wieder frei wählbar, die Gleichung also sicher zu erfüllen. (Der Bedingung $A_2 \neq 1$ wird dabei sicher genügt, denn sonst wäre ja $B_{l_1} = 1$ und N' wäre gar nicht die Normalform.) Die Relationen

$$A_{l_1+i}' = B_{l_1+1+i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, l_2$$

sind hingegen wieder für fest vorgegebene A' und B zu erfüllen, und so fort. Entweder lassen sich alle diese Relationen erfüllen, dann stimmen die beiden Normalformen überein und man hat damit festgestellt, daß das vorgelegte Wort sich in eines der Gestalt $W(a,Q)$ verwandeln läßt. Oder die Relationen sind nicht sämtlich erfüllt, dann kommt also $N_1(a,Q)$ nicht in Betracht und man kann dann in der gleichen Weise die weiteren N_i untersuchen.

Man kann auf diese Weise in endlich vielen Schritten (da ja auch die Entscheidung, ob die obigen Beziehungen erfüllt sind, in endlich vielen Schritten zu erreichen ist) feststellen, ob N' gleich einem der N_i ist. Es gibt nur endlich viele solcher N_i, also ist das Verfahren endlich.

Es läßt sich nun auch leicht der Fall[17]) behandeln, daß die Q von der Form $A'\bar{Q}A''$ sind. Zunächst kann man ein Wort $W(a,Q)$ wegen $Q=A'\bar{Q}A''$ auch in der Form $\overline{W}(a,\bar{Q})$ schreiben, denn man hat ja:

$$\begin{aligned} W(a,Q) &\equiv A_1 Q_{\mu_1} A_2 Q_{\mu_2} A_3 \dots \\ &\equiv A_1 A'_{\mu_1} \bar{Q}_{\mu_1} A''_{\mu_1} A_2 A'_{\mu_2} \bar{Q}_{\mu_2} A''_{\mu_2} A_3 \dots \\ &\equiv \bar{A}_1 \bar{Q}_{\mu_1} \bar{A}_2 \bar{Q}_{\mu_2} \bar{A}_3 \dots \equiv \overline{W}(a,\bar{Q}). \end{aligned}$$

Damit ist aber klar, wie man die Normalform von $W(a,Q)$ findet. Man braucht ja nur die Q in $\bar{Q}$ wie angegeben umzuschreiben und kann dann wie früher verfahren. Man hat nun noch [im Hinblick auf die Betrachtungen im Abschnitt I und die Behauptung (E)] zu untersuchen, wann sich ein solches Wort $W(a,Q)$ auf Eins verkürzen läßt. Dazu denke man sich das Wort $W(a,Q)$ in der durch Bedingung B festgelegten Weise verkürzt. Es läßt sich dann wieder zeigen: Ist das Wort dann noch nicht auf Eins verkürzt, so läßt es sich überhaupt nicht in Eins verwandeln. W sei also in der angegebenen Weise bis auf

$$A_1 \prod_{i=1}^{l_1} Q_{\mu_i} A_2 \dots A_k$$

verkürzt, wobei $A_i \neq 1$ ist ($i \neq 1$ und $\neq k$), oder, wenn die Q_{μ_i} in der obigen Weise aufgelöst werden:

$$A_1 \prod_{i=1}^{l_1} (A'_{\mu_i} \bar{Q}_{\mu_i} A''_{\mu_i}) A_2 \dots .$$

Dabei darf es nicht vorkommen, daß in Π zwei aufeinanderfolgende $\bar{Q}_{\mu_i}$ mit $\mu_{i-1}=\mu_i \pm m$ vorkommen, sonst wäre ja noch eine Verkürzung in der angeführten Weise möglich gewesen. Innerhalb der $\bar{Q}$ können zunächst keine Verkürzungen eintreten, denn diese Ausdrücke sollten ja schon in der Normalform sein. Da diese $\bar{Q}$ von x-Wörtern berandet sind, können Verkürzungen nur noch vorkommen, wenn $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}} = 1$ oder $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i+1}} = 1$ ist. Ist keiner dieser Ausdrücke gleich Eins, so ist die Behauptung schon bewiesen. Ist jedoch etwa $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}} = 1$, dann treffen von den

[17]) Vgl. Bemerkung in [11]).

Randpunkten her $\overline{Q}_{\mu_i}$ und $\overline{Q}_{\mu_{i+1}}$ mit $\mu_i \neq \mu_{i+1} \pm m$ zusammen (für $\mu_i = \mu_{i+1} \pm m$ wäre ja eine Verkürzung im früheren Sinne möglich gewesen). Ist etwa $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i+1}} = 1$, so kann bei den zusammenstoßenden $\overline{Q}_\mu$ ebenfalls nicht $\mu_i = \mu_{i+1} \pm m$ sein, sonst wäre ja $A''_{\mu_i} = A^{-1}_{\mu_{i+1}}$ und daher schon $A_j = 1$ und das Wort hätte sich ebenfalls in der zuvor beschriebenen Weise verkürzen lassen. Macht man nun alle diese $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}}$ bzw. $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i+1}}$, bei denen es möglich ist, zu Eins, so ist das Wort aus Aggregaten der Form

$$A_i \neq 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{l} \overline{Q}_{\mu_i}$$

zusammengesetzt, wobei in dem Produkt nie zwei $\overline{Q}_\mu$ mit um $\pm m$ voneinander verschiedenen Indizes zusammenstoßen. Hier ist aber der Anschluß an die früheren Überlegungen gewonnen. Dort wurde ja gezeigt, daß ein Wort der eben angegebenen Gestalt sich nicht mehr auf Eins verkürzen läßt, womit die oben aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Die beiden Probleme (D) und (E) lassen sich nun auch leicht allgemein lösen. Dazu untersuche man — zum Beweis der zweiten Behauptung — die Verkürzungsmöglichkeiten bei einem Wort der Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$. Soweit es durchführbar ist, werde das Wort in der in Bedingung B beschriebenen Weise verkürzt. Nach endlich vielen Schritten erhält man dann einen Ausdruck, der nicht mehr in der geforderten Weise verkürzt werden kann. Treten in diesem Ausdruck keine s^*-Zeichen mehr auf, hat er mithin die Form $\overline{W}(a, Q)$, so ist er nach früheren Überlegungen nicht mehr auf Eins zu verkürzen, falls $\overline{W}(a, Q) \neq 1$, die Behauptung also in diesem Falle richtig. Man hat nun noch den Fall zu betrachten, daß das in der angegebenen Weise verkürzte Wort auf die Gestalt $W'(a, s^* P^{-1}, Q)$ gebracht wurde. Es ist genau wie früher zu zeigen, daß sich dieses Wort überhaupt nicht mehr in Eins verwandeln läßt. W' habe etwa die Form

$$B_1(Q, a)\, s^*_{\varkappa_1} P^{-1}_{\varkappa_1} s^*_{\varkappa_2} P^{-1}_{\varkappa_2} \dots s^*_{\varkappa_l} P^{-1}_{\varkappa_l} B_2(Q, a).$$

Man stellt sofort fest, daß der Ausdruck

$$s^*_{\varkappa_i} P^{-1}_{\varkappa_i} s^*_{\varkappa_{i+1}} P^{-1}_{\varkappa_{i+1}}$$

unverkürzbar ist. Denn nach Voraussetzung lassen sich die $P_\varkappa$ in kein Wort verwandeln, das die Erzeugenden x nicht mehr enthält, lassen sich also erst recht nicht zu Eins machen. Außerdem entnimmt man den definierenden Relationen $(s^*_\varkappa)^{a_\varkappa}$ mit $a_\varkappa > 1$ sofort, daß auch $s^*_\varkappa \neq 1$ ist. Ferner gilt offenbar (freies Produkt!):

$$(s^*_\varkappa)^{-1} s^*_\lambda \neq 1 \qquad (\varkappa \neq \lambda).$$

Natürlich sind auch die inversen Ausdrücke

$$P_{\varkappa_i} (s^*_{\varkappa_i})^{-1} P_{\varkappa_{i+1}} (s^*_{\varkappa_{i+1}})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad s^*_\varkappa (s^*_\lambda)^{-1} \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

nicht verkürzbar bzw. von Eins verschieden. Ebensowenig läßt sich

$$B(a, Q) \cdot s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \quad \text{und} \quad P_\varkappa^* (s_\varkappa^*)^{-1} \cdot B(a, Q)$$

an der Stelle des Punktes verkürzen. Es bleibt also zu untersuchen, welche Verkürzungsmöglichkeiten innerhalb des Teilwortes $B(a,Q)$ und an der Stelle des Punktes in

$$(\alpha) \qquad B(a,Q) \cdot P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$$

$$(\beta) \qquad s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \cdot B(a,Q) \cdot P_\lambda (s_\lambda^*)^{-1}$$

$$(\gamma) \qquad s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \cdot P_\lambda (s_\lambda^*)^{-1} \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

bestehen. Es wird also untersucht, in welcher Weise sich die zwischen aufeinanderfolgenden $s_\varkappa^*$ und s_λ^* stehenden Ausdrücke verkürzen lassen. Um das Ergebnis gleich vorwegzunehmen:

Zwischen gleichen $s_\varkappa^*$ bleiben stets Ausdrücke in a oder x (oder beiden) stehen, die ungleich Eins sind. Zwischen verschiedenen $s_\varkappa^*$ hingegen brauchen derartige Ausdrücke nicht aufzutreten. Das Wort bekommt also die Gestalt:

$$\prod_{i=1}^{l} A_i(a, x) \, (s_{\varkappa_i}^*)^{\varepsilon_i}; \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

wobei die $s_\varkappa^*$ immer in der ersten Potenz vorkommen und zwischen $s_\varkappa^*$ mit gleichen Indizes stets Ausdrücke $A(a, x) \neq 1$ stehen. Es ist klar, daß ein solches Wort nicht gleich Eins sein kann. Zum Beweise werden nun die Fälle (α), (β) und (γ) untersucht. Da sich das Teilwort $B(a,Q)$ nicht in der oben angeführten Weise zu Eins verkürzen ließ, ist es auf Grund früherer Überlegungen überhaupt nicht mehr auf Eins verkürzbar; seine Normalform sei $N(a,Q)$. Man stellt nun fest, wie sich $N(a,Q) P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$ verkürzen läßt. Entweder endet $N(a,Q)$ mit $A(a) \neq 1$, dann ist der gesamte Ausdruck unverkürzbar, da ja $P_\varkappa$ mit einem Wort in x beginnt. Oder $N(a,Q)$ hört mit $\hat{Q}_\mu Q_\mu^*$ auf. Nach der Voraussetzung 2. sollte gelten: $\hat{Q}_\mu Q_\mu^* P_\varkappa = \hat{O}_\mu (QP)_{\mu,\varkappa}$, wobei also $\hat{Q}_\mu$ unberührt bleiben sollte. Es ergibt sich daher bei der Verkürzung von (α) der Ausdruck $\ldots \hat{Q}_\mu \cdot (QP)_{\mu,\varkappa} (s_\varkappa^*)^{-1}$. Dieser Ausdruck ist nach Voraussetzung an der Stelle des Punktes unverkürzbar, ebenso ist $(QP)_{\mu,\varkappa}$ nicht mehr zu verkürzen; der Ausdruck links davon befindet sich ebenfalls schon in einer unverkürzbaren Form. Damit ist erkannt, daß sich der Ausdruck links von $(s_\varkappa^*)^{-1}$ nicht auf Eins verkürzen läßt. Es bleibt nun noch (β) und (γ) zu betrachten. Im Falle (γ) erhält man $(s_\varkappa^*) P_{\mu,\lambda} (s_\lambda^*)^{-1}$. Dabei ist $\varkappa \neq \lambda$, sonst hätte man das Gesamtwort ja schon früher verkürzen können. Links von dem betrachteten Ausdruck darf aus dem gleichen Grund nicht $P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$, rechts davon nicht $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ stehen. Man betrachte nun (β). Entweder wird $N(a,Q)$ beiderseits von $A_i(a) \neq 1$ begrenzt, dann tritt keine Zeichenverringerung mehr auf, da ja die P^{-1} rechts von x-Zeichen berandet werden sollten. $N(a,Q)$ werde also an einem Ende oder an

beiden von ${}^*Q_{\mu_1}$ (am linken Ende) bzw. von $Q^*_{\mu_l}$ (am rechten Ende) begrenzt. Man erhält dann ähnlich wie bei der Untersuchung von (α):

$$s^*_\varkappa (PQ)_{\varkappa,\mu_1} \bar{N}(a,Q)\, A(a)\, P_\lambda (s^*_\varkappa)^{-1}$$

bzw.

$$s^*_\varkappa P^{-1}_\varkappa A(a)\, \tilde{N}(a,Q)\, (QP)_{\mu_l,\lambda} (s^*_\lambda)^{-1}$$

bzw.

$$s^*_\varkappa (PQ)_{\varkappa,\mu_1} \hat{N}(a,Q)\, (QP)_{\mu_l,\lambda} (s^*_\lambda)^{-1}.$$

Dabei muß $\bar{N}(a,Q)$ mindestens den Kern $\hat{Q}_{\mu_1}$, $\tilde{N}(a,Q)$ mindestens den Kern $\hat{Q}_{\mu_l}$ und $\hat{N}(a,Q)$ mindestens die Kerne $\hat{Q}_{\mu_1}$ und $\hat{Q}_{\mu_l}$ (eventuell fallen die beiden Kerne zusammen) und die sämtlichen Zwischenglieder enthalten. Die Ausdrücke zwischen den $s^*_\varkappa$ sind also sicher nicht auf Eins zu verkürzen.

Die vorangegangenen Überlegungen haben gezeigt, daß sich ein Wort $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ nicht zu Eins machen läßt, wenn es sich nicht in der in Bedingung B beschriebenen Weise zu Eins verkürzen läßt. Damit ist die Behauptung (E) bewiesen. Die Überlegungen gestatten weiter die Bestimmung der möglichen Typen von Normalformen: Es wurde nämlich festgestellt, daß zwischen $(s^*_\varkappa)^{\tau_1}$ und $(s^*_\lambda)^{\tau_2}$ die folgenden Ausdrücke stehen können:

1. $\tau_1 = \tau_2 = 1$
   a) $P_\varkappa A(a)\, N(a,Q)$
   b) $(PQ)_{\varkappa,\lambda} \bar{N}(a,Q)$
2. $\tau_1 = -\tau_2 = 1$
   a) $P_{\varkappa,\lambda}$
   b) $P^{-1}_\varkappa A(a)\, N(a,Q)\, A'(a) P_\lambda$
   c) $P^{-1}_\varkappa A(a)\, \tilde{N}(a,Q)\, (QP)_{\nu,\lambda}$
   d) $(PQ)_{\varkappa,\mu}\, \bar{N}(a,Q)\, A'(a) P_\lambda$
   e) $(PQ)_{\varkappa,\mu}\, \hat{N}(a,Q)\, (QP)_{\nu,\lambda}$
3. $-\tau_1 = \tau_2 = 1$ $\quad N(a,Q)$
4. $-\tau_1 = -\tau_2 = 1$
   a) $N(a,Q)\, A(a) P_\lambda$
   b) $\tilde{N}'(a,Q)\, (QP)_{\nu,\lambda}$.

Bei dieser Klassifikation ist zunächst $\alpha_i > 2$ vorausgesetzt; wie auch für das erste nur der Fall behandelt werden soll, daß alle $\alpha_i > 2$ sind [bezüglich α_i s. [8])].

Ist nun die Normalform N' eines beliebigen Wortes vorgegeben und hat man von ihr zu entscheiden, ob sie mit der Normalform eines Wortes der Gestalt $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ übereinstimmt, so bestimme man zunächst die Zahl und Reihenfolge der $s^*_\varkappa$ und ihre Exponenten. Damit die Normalform N' die verlangte Gestalt besitzt, müssen diese Exponenten notwendig gleich $+1$ oder -1 mod. α_i sein (gemäß dem Satz von SCHREIER).

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist damit schon entschieden, daß sich das Wort nicht auf die gewünschte Form bringen läßt. Ist sie dagegen erfüllt, so kommen zunächst alle Typen von Normalformen N_i in Betracht, in denen die Erzeugenden $s_\varkappa^*$ in gleicher Zahl und mit dem gleichen Exponenten mod. α_i versehen wie in N' auftreten. Um weiter prüfen zu können, ob N' von der verlangten Form ist, sind die zwischen den $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke zu untersuchen. Bezeichnet man zu diesem Zwecke die Fälle

1. a, b	mit	$C_{1,1}$
2. a, b, c, d, e	mit	$C_{1,-1}$
3.	mit	$C_{-1,1}$
4. a, b	mit	$C_{-1,-1}$,

so sind mit der Reihenfolge und den jeweiligen Exponenten der $s_\varkappa^*$ in der Normalform N die zwischen den einzelnen $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke klassifiziert und man hat nun nachzusehen, ob N' eben von einer solchen Form ist, daß die in ihr zwischen den $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke $B(a, x)$ stets von der verlangten Struktur sind. Wie man sofort erkennt, kann in der Normalform N' — sofern sie von der verlangten Gestalt ist — am Anfang nur ein Ausdruck der Art $C_{-1,1}$ oder $C_{-1,-1}$ stehen. Da aber auch der zweite Index von $C_{i,k}$ (durch den Exponenten des folgenden s_λ^*) festgelegt ist, kommt nur einer der beiden Fälle in Frage. N' habe die Form

$$B_1(a, x)\,(s_\lambda^*)^{r_1}\,B_2(a, x)\,\ldots.$$

Im Falle $C_{-1,1}$ kann man auf Grund der Voruntersuchung sofort entscheiden, ob B_1 von der Form $N(a,Q)$ ist. Statt bei $C_{-1,-1}$ zu entscheiden, ob $B_1 = N(a,Q)\,A(a)\,P_\lambda$ ist, braucht man offenbar nur zu entscheiden, ob

$$B_1(a, x)\,P_\lambda^{-1} = N(a, Q)$$

ist. Dies ist aber nach früheren Überlegungen in endlich vielen Schritten zu entscheiden. Sinngemäß verfährt man in den anderen Fällen, so daß also insgesamt folgende Probleme auftreten können:

$$\begin{aligned}
C_{1,1}\colon &\qquad P_\varkappa B = N(a,Q)\,?\\
C_{1,-1}\colon &\qquad P_\varkappa B P_\lambda^{-1} = N(a,Q)\,?\\
C_{-1,1}\colon &\qquad B = N(a,Q)\,?\\
C_{-1,-1}\colon &\qquad B P_\lambda^{-1} = N(a,Q)\,?
\end{aligned}$$

Im Falle, daß alle oder einige der Exponenten $\alpha_i = 2$ sind, müssen jeweils die *beiden* Möglichkeiten $C_{-1,1}$ und $C_{-1,-1}$ bzw. $C_{1,1}$ und $C_{1,-1}$ in Betracht gezogen werden. Da sich aber, wie leicht zu zeigen ist, die Fälle $C_{-1,1}$ und $C_{-1,-1}$ bzw. $C_{1,1}$ und $C_{1,-1}$ einander ausschließen, kann jeweils der zweite Index in eindeutiger Weise bestimmt werden, womit

dann der erste Index des folgenden $C_{i,k}$ festgelegt ist. Da bei jedem $B(a, x)$ in endlich vielen Schritten festgestellt werden kann, ob es sich auf die verlangte Gestalt bringen läßt, und man nur endlich viele solcher $B(a, x)$ zu untersuchen hat, kann man also — sowohl im Falle, daß alle $\alpha_i > 2$ als auch in dem, daß alle oder einige der $\alpha_i = 2$ sind — in endlich vielen Schritten feststellen, ob die Normalform N' die gewünschte Gestalt hat.

Der Fall[18]), daß alle oder einige der P von der Form $A(a)\overline{P}$ sind, erledigt sich ähnlich wie der entsprechende, bereits behandelte Fall, daß die Q von der Form $A'\overline{Q}A''$ sind.

Es bleiben schließlich noch die Behauptungen (A) (γ) und (B) (γ) zu erledigen. Wie bereits in diesem Abschnitt ganz zu Anfang des Beweises bemerkt wurde, ist es zur Lösung der Probleme (A) (γ) und (B) (γ) in $\mathfrak{G}$ notwendig und hinreichend, dieselben in $\hat{\mathfrak{G}}$ zu lösen. Indem man wieder $\hat{\mathfrak{G}}$ als freies Produkt aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}(a, s, t; R^{(2)}(a))$ auffaßt, kann man wieder von der Normalform eines Wortes in bezug auf dieses freie Produkt sprechen. (Daß $\hat{\mathfrak{G}}$ tatsächlich als ein solches freies Produkt mit vereinigter Untergruppe aufgefaßt werden kann, wurde schon bewiesen.) Zum Beweis von (B) (γ) untersucht man, auf welche Weise sich ein Wort der Form

$$W(x, y) \equiv X_1(x)\, Y_1(y)\, X_2(x) \ldots$$

in Eins verwandeln läßt, sofern dies überhaupt möglich ist. Offenbar gehören die Teilwörter X aus W der Gruppe $\mathfrak{G}_1$, die Teilwörter Y aus W der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ an. Damit das vorgelegte Wort $W(x, y)$ verkürzt werden kann, müssen sich einige der X oder Y in irgendein Wort $W'(a, s, t)$ der Untergruppe verwandeln lassen. Es läßt sich nun zeigen:

1. Eine Relation der Form $X(x) = W'(a, s, t)$ bzw.

$$Y(y) = W''(a, s, t)$$

besteht dann und nur dann, wenn X bzw. Y und W' bzw. W'' gleich Eins sind.

2. Alle Relationen zwischen den x bzw. y folgen aus $R^{(1)}(x)$ bzw. $R^{(3)}(y)$ allein.

Die zweite Behauptung erweist sich wegen der Aussage (B) (α) bzw. (B) (β) und der Tatsache, daß sich $\mathfrak{G}'(a, x; R^{(2)}(a), R^{(1)}(x))$ bzw. $\mathfrak{G}''(a, y; R^{(2)}(a), R^{(3)}(y))$ als freies Produkt aus $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$ bzw. aus $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ auffassen läßt, sofort als richtig. Um die Richtigkeit von (1) nachzuweisen, kann man sich auf die Betrachtung von $\mathfrak{G}_1$ beschränken, da die entsprechenden Untersuchungen über $\mathfrak{G}_2$ in denen von $\mathfrak{G}_1$ als Spezialfall enthalten sind. Man geht wieder von $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_1^*$ über und hat wegen Hilfssatz 2 in $\mathfrak{G}_1^*$ zu

[18]) Vgl. Bemerkung in [11]).

zeigen: Sind $X(x)$ und $W'(a, s^* P^{-1}, Q)$ von Eins verschieden, dann ist auch

$$X(x)\,[W'(a, s^* P^{-1}, Q)]^{-1} \neq 1. \tag{I}$$

$\mathfrak{G}_1^*$ läßt sich als freies Produkt aus $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$, $\mathfrak{G}_3(s^*; (s^*)^x)$ auffassen. Es werde im folgenden angenommen, daß sich W' in diesem freien Produkt schon in der Normalform befindet, und dementsprechend N statt W'^{-1} geschrieben. Es ist nun zu beweisen, daß sich der Ausdruck $X(x)\,N(a, s^* P^{-1}, Q)$ unter der Bedingung $X \neq 1$, $W' \neq 1$ bei Anwendung der SCHREIERschen Konstruktion nicht zu Eins verkürzen läßt. Zunächst könnten Verkürzungen höchstens an der „Nahtstelle" zwischen X und N eintreten. Beginnt N mit $s_\varkappa^*$ oder einem Ausdruck in a ($\neq 1$), so ist eine solche Verkürzung nicht möglich. N beginne daher mit einem Teilwort in x. Rührt das betreffende Teilwort von einem $P_\varkappa$ her, so folgt auf einen solchen Ausdruck, wie schon gezeigt wurde, notwendig das zugehörige $s_\varkappa^*$. Spätestens an dieser Stelle hört die Verkürzung auf. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß das x-haltige Teilwort von einem Q_μ herrührt und N dann folgendermaßen beginnt: ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$, wobei also der Kern $\hat{Q}_\mu$ unzerstört vorhanden ist. (Wie früher nachgewiesen wurde, ist diese letztere Voraussetzung für N immer erfüllt.) Da, wie man den Voraussetzungen 2a bzw. 2b über die Q unmittelbar entnimmt, bei einer Verkürzung von $X(x)Q_\mu$ der Kern von Q_μ unberührt bleibt[19]), ist auch in diesem Falle der Ausdruck auf der linken Seite von (I) nicht auf Eins verkürzbar. Damit ist aber 1. bewiesen.

Es läßt sich daher abschließend feststellen:

Läßt sich ein Ausdruck der Form $W(x, y)$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf Eins verkürzen, dann ist dies sicher schon auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$ und $R^{(3)}(y)$ allein möglich. Das war zum Beweis von (B) (γ) zu zeigen.

Man kann jetzt auch sofort sagen, wie die Normalform eines Wortes der Form $W(x, y)$ aussieht. Da, wie gezeigt wurde, sich $W(x, y)$ höchstens dadurch verkürzen läßt, daß einige der $X(x)$ oder $Y(y) = 1$ sind, kommen bei einer solchen Verkürzung nie andere Zeichen a, s, t in das betreffende Wort hinein, so daß auch die Normalform wieder die Gestalt

$$\overline{X}_1(x)\,\overline{Y}_1(y)\,\overline{X}_2(x)\ldots$$

hat. Zur Lösung der Aufgabe (A) (γ) suche man von dem Wort $W(a, x, y, s, t)$, von dem entschieden werden soll, ob es von der Form $W'(x, y)$ ist, die Normalform in dem freien Produkt aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}$ auf. Dies ist, wie schon früher gezeigt

[19]) Im Falle 2a kommen nämlich die Absorptionen spätestens bei $\hat{Q}_\mu$ zum Stillstand, da ja dieser Ausdruck von a-Zeichen berandet ist, im Falle 2b schon bei ${}^*Q_\mu$, da dieser Ausdruck rechts von a-Zeichen begrenzt wird.

wurde, in der Tat möglich. Die Normalform sei:

$$N' \equiv X_1(x, a, s, t)\, Y_1(y, a, s, t) \dots X_m(x, a, s, t)\, Y_m(y, a, s, t).$$

Dann ist, ähnlich wie früher, die Frage zu beantworten, ob N' mit einer Normalform der oben angegebenen Gestalt

$$\overline{X}_1(x)\, \overline{Y}_1(y) \dots \overline{X}_{m'}(x)\, \overline{Y}_{m'}(y)$$

übereinstimmt. Nach dem Satz von SCHREIER kommt dabei nur eine solche Normalform N in Betracht, die die gleiche Zahl von x- und y-Teilwörtern wie N' aufweist. Man muß nun zusehen, ob sich diese Teilwörter $\overline{X}(x)$ und $\overline{Y}(y)$ so bestimmen lassen, daß $N^{-1}N' = 1$ wird. Da N und N' bereits unverkürzbar waren, kann eine Verkürzung des gesamten Ausdrucks nur dann eintreten, wenn

$$\overline{X}_1^{-1} X_1 = \widetilde{W}(a, s, t)$$

ist. Diese Formel, in der $\widetilde{W}$ noch frei wählbar ist, ergibt sich unmittelbar aus den allgemeinen Prinzipien des Satzes von SCHREIER. Diese Relation ist mit der Frage gleichbedeutend, ob sich X_1 auf die Form $\overline{X}_1 \widetilde{W}(a, s, t)$ bringen läßt. Ist dies nicht möglich, so läßt sich das vorgelegte Wort nicht auf die verlangte Gestalt $W(x, y)$ bringen. Ist diese Bedingung hingegen erfüllt, haben sich also $\overline{X}_1$ und $\widetilde{W}$ in der geforderten Weise bestimmen lassen, dann muß zur weiteren Verkürzung des Wortes die Beziehung

$$\overline{Y}_1^{-1}\, \widetilde{W}_1(a, s, t)\, Y_1 = \widetilde{W}_2(a, s, t)$$

erfüllt werden. In ihr sind Y_1 und $\widetilde{W}_1$ fest vorgegeben, Y_1 nämlich durch die vorgelegte Normalform, $\widetilde{W}_1$ durch den vorangegangenen Schritt; dagegen sind $\overline{Y}_1$ und $\widetilde{W}_2$ erst wieder zu bestimmen. Hier ist also die Frage zu beantworten, ob sich $\widetilde{W}_1 Y_1$ auf die Gestalt $\overline{Y}_1(y)\, \widetilde{W}_2(a, s, t)$ bringen läßt. Um die Lösung der beiden eben erwähnten Probleme aufzuzeigen, genügt es wieder, sich auf die Betrachtung des ersten Problems in der „x-haltigen" Gruppe $\mathfrak{G}_1$ zu beschränken. Man geht nun wie vorhin von $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_1^*$ über und hat dann wegen Hilfssatz 2 zu entscheiden, ob sich das vorgegebene Wort $X(x, a, s^* P^{-1}, Q)$ auf die Form

(I) $$\overline{X}(x)\, \widetilde{W}(a, s^* P^{-1}(a, x),\ Q(a, x))$$

bringen läßt. Dazu suche man von X die Normalform auf, was möglich ist, da $\mathfrak{G}_1^*$ ein freies Produkt aus Gruppen ist, in denen man das Identitätsproblem lösen kann. Weiterhin klassifiziere man die Typen von Normalformen der Wörter der Gestalt (I), wobei man sich auf die bereits angestellten Untersuchungen zum Beweise der Behauptungen (D) und (E) sowie auf die Erkenntnisse stützen kann, die sich bei der Betrachtung der Verkürzungsmöglichkeiten eines Wortes der Form (I) ergaben. Man erhält dann:

1. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit a: $\quad \overline{X}(x)\, N(a, s^* P^{-1}, Q)$
2. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit s^*: $\quad \overline{X}(x)\, N(a, s^* P^{-1}, Q)$
3. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit $P_\varkappa(a, x)$: $\quad \overline{X}'(x)\, P'_\varkappa(a, x)\, (s^*_\varkappa)^{-1} N'(a, s^* P^{-1}, Q)$,

wobei $P_\varkappa(a, x) = B(x) P'_\varkappa(a, x)$, $P'_\varkappa$ links begrenzt von $A(a)$, eventuell $P'_\varkappa = 1$.

4. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit $(QP)_{\mu,\varkappa}$: $\quad \overline{X}''(x)(QP)'_{\mu,\varkappa}(s^*_\mu)^{-1} N''(a, s^* P^{-1}, Q)$,

wobei $(QP)'_{\mu,\varkappa}(a, x) = C(x)\,(QP)'_{\mu,\varkappa}$, $(QP)'_{\mu,\varkappa}$ links begrenzt von $A(a)$, eventuell $(QP)'_{\mu,\varkappa} = 1$.

5. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$: $\quad \overline{X}\, {}^*Q'_\mu \hat{Q}_\mu \ldots$,

wobei ${}^*Q_\mu = D(x) {}^*Q'_\mu$, ${}^*Q'_\mu$ links von einem Ausdruck in a berandet, eventuell ${}^*Q'_\mu = 1$. Die Punkte ... deuten den Rest der Normalform $N(a, s^* P^{-1}, Q)$ an, der durch die Herausnahme von ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$ entstanden ist. Ist ${}^*Q'_\mu = 1$, so beginnt der Rest sicher mit einem Ausdruck in a [vgl. hierzu [19])].

Die Entscheidung, ob das vorgelegte Wort mit einem in 1. bis 5. angeführten Ausdruck übereinstimmt, verläuft wie früher, so daß hier nicht mehr darauf eingegangen werden soll.

Als Beispiele hat man etwa die folgenden *Gruppen der ebenen Komplexe in der Normalform*[20]).

$$\mathfrak{G}\,(x_0, a_0, y_1, \ldots, y_n;$$
$$x_0^\xi, a_0^\alpha, \{y_i^{\eta_i}\}_1^n, (x_0\, y_1\, a_0\, y_2 \ldots y_n)^\beta;\ \xi, \alpha, \beta, \eta_i \neq 1, n \geq 2).$$

Wie man leicht nachprüft, genügen diese Gruppen den gestellten Forderungen, wenn man etwa x_0 mit P und $y_1 a_0 y_2 \ldots y_n$ mit U identifiziert.

Die zu Anfang dieses Abschnittes über die Q gemachten Voraussetzungen lassen sich natürlich noch in mannigfacher Weise abändern und abschwächen. Als Beispiel hierfür sei erwähnt, daß sich der gleiche Gruppentypus mit den folgenden Q in ähnlicher Weise behandeln läßt:

Die Q seien von folgender Beschaffenheit:

Es lassen sich zu ihnen $Q'(a, x)$ finden, so daß die folgenden Identitäten bestehen:

(I) $\quad Q_\mu \equiv A_\mu(Q'; a)\, F_0(R^{(1)}(x), R^{(2)}(a)), \qquad \mu = 1, \ldots, m$

(II) $\quad Q'_\nu \equiv B_\nu(Q; a)\, F'_0(R^{(1)}(x), R^{(2)}(a)), \qquad \nu = 1, \ldots, n.$

wobei diese Q' den früheren Voraussetzungen an Stelle der Q genügen sollen. Aus den Identitäten (I) und (II) ergibt sich durch Einsetzen der einen in die andere

(I') $\quad Q_\mu \equiv A_\mu\{B(Q; a)\, F'_0(R^{(1)}, R^{(2)}); a\}\, F_0(R^{(1)}, R^{(2)}),$

(II') $\quad Q'_\nu \equiv B_\nu\{A(Q'; a)\, F_0(R^{(1)}, R^{(2)}); a\}\, F'_0(R^{(1)}, R^{(2)}).$

Von diesen Identitäten wird noch verlangt:

[20]) Bei REIDEMEISTER [10] gelingt die Lösung des Identitätsproblems unter der Einschränkung: $\alpha, \beta, \xi, \eta_i \geq 4$.

Wenn man in (I') und (II') die Q bzw. Q' durch „Unbestimmte" t bzw. t' ersetzt, durch Erzeugende also, die durch keinerlei Relationen mit den anderen Erzeugenden verknüpft sind, dann sollen diese Identitäten auch in den neuen Erzeugenden t und t' gelten[21]).

III. Eine Verallgemeinerung.

Es sei die folgende Gruppe vorgelegt:

$$\mathfrak{G}\left(a, b, c;\ R^{(1)}(a), R^{(2)}(b), R^{(3)}(c), \{(P_\mu^0(a,b,c))^{\varkappa_\mu}\}_1^m, \{Q_\nu^0(a,b,c)\}_1^n;\ \varkappa_\mu > 1\right)^{22}).$$

Hierin sollen sich die Erzeugenden b und c in Aggregate $X_\varkappa(b,c)$ und $Y_\lambda(b,c)$ zusammenfassen lassen:

$$(P_\mu^0(a,b,c))^{\varkappa_\mu} \equiv (P_\mu(X(b,c);a)\, U_\mu(Y(b,c);a))^{\varkappa_\mu} F_\mu(R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)})$$

$$(Q_\nu^0(a,b,c)) \equiv Q_\nu(X(b,c);a)\, V_\nu(Y(b,c);a)\, F'_\nu(R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)})$$

derart, daß die Q, U und V den im vorangehenden angegebenen erweiterten Voraussetzungen über die Q genügen, wenn die X durch „Unbestimmte" x und die Y durch „Unbestimmte" y ersetzt werden, während die a beidemale die gleiche Bedeutung haben sollen. P genüge bei der gleichen Ersetzung $X \to x$ den Voraussetzungen 2. von Abschnitt II über die dort in der gleichen Weise bezeichneten P. Die $X(b,c)$ und $Y(b,c)$ dagegen sollen die im vorigen Abschnitt formulierten Voraussetzungen über $Q(a,x)$ erfüllen, wenn man in diesen die x durch die b und die a durch die c ersetzt.

Dann läßt sich beweisen:

(A) *Alle Relationen zwischen den a folgen aus $R^{(1)}(a)$ allein.*

(A') *Alle Relationen zwischen b und c folgen aus $R^{(2)}(b)$ und $R^{(3)}(c)$ allein (und damit natürlich alle Relationen zwischen den b aus $R^{(2)}(b)$ und alle Relationen zwischen den c aus $R^{(3)}(c)$ allein).*

(B) *Man kann entscheiden, ob sich ein Wort der Gruppe auf die Form $W(b,c)$ oder auf die Form $W(a)$ bringen läßt.*

(C) *Man kann insbesondere das Identitätsproblem lösen.*

Beweis. Die Einführung der neuen Erzeugenden x und y vermöge der definierenden Relationen $x^{-1}X(b,c)$ bzw. $y^{-1}Y(b,c)$ ändert nach Hilfssatz 2 nichts an der Problemstellung. Der Übergang zu äquivalenten Relationen führt auf:

$$\mathfrak{G}\left(a, b, c, x, y;\ R^{(1)}(a), R^{(2)}(b), R^{(3)}(c),\right.$$

$$\left.(P(x,a)\, U(y,a))^{\varkappa},\ Q(x,a)\, V(y,a),\ x^{-1}X(b,c),\ y^{-1}Y(b,c)\right).$$

---

[21]) Ob diese neue Bedingung überflüssig ist, ließ sich nicht beweisen, obwohl diese Frage durchaus von Interesse ist.

[22]) In $\mathfrak{G}'(a; R^{(1)}(a))$, $\mathfrak{G}''(b; R^{(2)}(b))$ und $\mathfrak{G}'''(c; R^{(3)}(c))$ soll das Identitätsproblem lösbar sein.

Behauptung (D). Diese Gruppe läßt sich als freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_1\left(a, x, y; R^{(1)}(a), Q(x, a)\, V(y, a),\ (P(x, a)\, V(y, a))^x\right)$$

und

$$\mathfrak{G}_2\left(b, c, x, y; R^{(2)}(b), R^{(3)}(c),\ x^{-1} X(b, c),\ y^{-1} Y(b, c)\right)$$

mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}(x, y)$ auffassen.

Man zeigt nun:

1. In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ erzeugen x und y eine freie Untergruppe.

2. Man kann in $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort aus einer dieser Gruppen in eines der zu vereinigenden Untergruppe verwandeln läßt.

3. Man kann in beiden Gruppen das Identitätsproblem lösen.

4. In $\mathfrak{G}_1$ folgen alle Relationen zwischen den a aus $R^{(1)}(a)$ allein.

4a. Man kann in $\mathfrak{G}_1$ entscheiden, ob sich ein Wort auf die Form $W(a)$ bringen läßt.

5. In $\mathfrak{G}_2$ folgen alle Relationen zwischen den b und c aus $R^{(2)}(b)$ und $R^{(3)}(c)$ allein.

5a. Man kann in $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort auf die Form $W(b, c)$ bringen läßt.

Die Richtigkeit der Behauptungen 1., 2., 3., 4., 4a. ist in $\mathfrak{G}_1$ klar wegen der Aussagen (B) (γ) bzw. (A) (γ) bzw. (C) bzw. (B) (α), (B) (β), bzw. (A) (α), (A) (β) des Abschnitts II (unter Beachtung der im vorigen Abschnitt hinzugefügten Ergänzungen). Zum Beweise der Behauptungen bezüglich $\mathfrak{G}_2$ identifiziere man diese Gruppe mit der in Abschnitt II behandelten Gruppe $\mathfrak{G}_1$:

Die Behauptungen 1. und 2. ergeben sich aus (E) und (D) (von Abschnitt II) und der Tatsache, daß $\tilde{\mathfrak{G}}(x, y, c; R^{(3)}(c))$ freies Produkt aus $\hat{\mathfrak{G}}'(x, y)$ und $\hat{\mathfrak{G}}''(c; R^{(3)}(c))$ ist. Wegen Hilfssatz 2b und der Voraussetzung in der Fußnote [22]) ist die Behauptung 3. evident, während wegen Hilfssatz 2a die Behauptung 5. richtig ist. (Man identifiziere zu diesem Ende:

$$x, y \leftrightarrow t$$

$$b, c \leftrightarrow b$$

$$\underline{1} \leftarrow (s P)^x.)$$

Entsprechend ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung 5a. aus Hilfssatz 2b, wenn man die gleiche Zuordnung vornimmt.

Aus 1. bis 5a. folgert man dann, wie schon mehrfach ausgeführt (vgl. etwa Folgerung F) die Behauptungen (A) bis (C).

Die in den Abschnitten II und III über die P und Q gemachten Voraussetzungen lassen sich je nach den übrigen Voraussetzungen (über die $R^{(i)}$) leicht weiter abschwächen.

In diesem Zusammenhang sei angeführt, daß als Anwendungsbeispiel für die dargestellte Methode das Identitätsproblem in den folgenden

Gruppen gelöst wurde, die einer Arbeit von K. BRAUNER[23]) entnommen sind:

a) $q^{-\nu} p^{\mu}$ [24])

b) $r^{-\mu} q^{-\nu} p^{\mu}$

$r^{-1} q r q^{-1}$

c) $r^{-\mu} q^{-\nu} p^{\mu} s^{\nu}$

$q^{-1} r q r^{-1}$

$p^{-1} s p s^{-1}$

d) $q_1^{-\nu_1} p_1^{\mu_1} q_2^{\nu_1}$

$q_2^{-\nu_2} p_1^{-\mu_1} q_3^{\nu_2} p_2^{\mu_1}$

$p_3^{\mu_2} q_3^{-\nu_2} p_2^{-\mu_2}$

$p_1 q_2 p_1^{-1} q_2^{-1}$

$p_2 q_3 p_2^{-1} q_3^{-1}$

e) $q_2^{\nu_1} p_1^{\mu_1} q_1^{-\nu_1}$

$q_{i+1}^{\nu_i+1} p_i^{\mu_i} q_i^{-\nu_i} p_{i-1}^{-\mu_i}$, $\quad i = 2, 3, \ldots, k$

$p_k^{\mu_k} q_k^{-\nu_k} p_k^{-\mu_k}$

$p_j q_{j+1} p_j^{-1} q_{j+1}^{-1}$, $\quad j = 1, 2, \ldots, k-1$.

f) $q_i^{-\mu_i} p_i^{\alpha_i} q_{i-1}^{\mu_i - 1 \cdot \mu_i}$

$p_i^{-1} q_{i-1}^{-\lambda_i - 1} p_{i-1}^{\varrho_i} q_{i-2}^{\mu_i - 2 \cdot \lambda_i - 1}$, $\quad i = 2, 3, \ldots, k$.

$q_1^{-\mu_1} p_1^{\nu_1}$.

Literaturverzeichnis.

[1] ARTIN, E.
Theorie der Zöpfe. Hamb. Abh. **4**, 47—72 (1926).

[2] DEHN, M.
Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. **72**, 413—421 (1912).

[3] DEHN, M.
Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann. **75**, 402—413 (1914).

[4] GIESEKING, H.
Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen. Diss. Münster 1912.

[5] GROUCHKO, I.
La résolution des problèmes d'identité dans les groupes à plusieurs relations d'un type spéciale. Rec. math. Moscou, n. s. **3**, 543—550 (1938). (Russisch mit französischer Zusammenfassung.)

[23]) BRAUNER, K., Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. II—IV, Hamb. Abh. 6, 1—55 (1928).

[24]) Von den Gruppen werden nur die linken Seiten der definierenden Relationen angeführt. Als Erzeugende treten lediglich die in diesen Relationen angegebenen Zeichen auf.

[6] Magnus, W.
Diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. J. f. d. r. u. a. Math. **163**, 141—165 (1930).

[7] Magnus, W.
Untersuchungen über einige diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. **105**, 52—74 (1931).

[8] Magnus, W.
Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Ann. **106**, 295—307 (1932).

[9] Reidemeister, K.
Über Knotengruppen. Hamb. Abh. **6**, 56—64 (1928).

[10] Reidemeister, K.
Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1932.

[11] Schreier, O.
Über die Gruppen $A^\alpha B^\beta = 1$. Hamb. Abh. **3**, 167—169 (1923).

[12] Schreier, O.
Die Untergruppen der freien Gruppen. Hamb. Abh. **5**, 161—183 (1927).

[13] Tartakovskij, V. A.
Die Siebmethode in der Gruppentheorie. Mat. Sbornik, n. s. **25** (67) 3—50 (1949). (Russisch.)

[14] Tartakovskij, V. A.
Anwendung der Siebmethode zur Lösung des Identitätsproblems in einigen Typen von Gruppen. Mat. Sbornik, n. s. **25** (67) 251—274 (1949). (Russisch.)

[15] Tartakovskij, V. A.
Lösung des Identitätsproblems für eine Gruppe mit k-verkürzbarer Basis für $k > 6$. Isvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 483—494 (1949). (Russisch.)

(Eingegangen am 23. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 363—375 (1952).

The Theory of Subspaces of a Finsler Space.

Part I.

By

Hanno Rund in Freiburg i. Br.

§ 1.
Introductory.

Any theory of subspaces immersed in a Finsler space is to a large extent dependent on the definition of the covariant derivative employed in the development of the theory. Up to the present time the covariant derivative as defined by CARTAN [1][1]) has been used consistently by the various authors investigating the properties of subspaces. The earliest discussions of this topic are due to CARTAN [1], BERWALD [2], WEGENER [3] and HAIMOVICI [4]. Its more analytical aspects were developed by several Japanese authors, particularly by HOMBU [5], and the basic theory may be regarded to have been rounded off satisfactorily in a memoir by E. T. DAVIES [6]. In connection with these theories it is to be noted that the introduction of CARTAN's covariant derivative involves the continual use of the notion of element of support which is a fundamental ingredient of his theory and consequently of all later developments. In the opinion of the present author, however, it seemed desirable that a theory of Finsler spaces should avoid this notion which seems to alienate the theory both from the natural geometry inherent to Finsler spaces as well as from the Calculus of Variations which constitutes, after all, the origin of such spaces. Thus, *regarding a Finsler space as locally Minkowskian*[2]), the present author [7] introduced a new covariant derivative on the basis of which a theory of curvature of Finsler spaces was developed [8].

The present paper is the first of a series[3]) in which the theory of subspaces is studied regarding this new principle as fundamental. These investigations were suggested by certain problems which arose when applications of the theory of Finsler spaces to analytical dynamics and geometrical optics were considered. Such applications will be discussed after the necessary geometrical preliminaries have been established in this and the following paper.

The foundations of a theory of curves and hypersurfaces in Minkowskian spaces have already been laid in a previous paper [9], but it

[1]) Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end.

[2]) An explicit formulation of this principle is given in [7], § 1.

[3]) These investigations were begun shortly after being granted an award by the Royal Commissioners for the Exhibition of 1951 to whom I wish to express my sincere gratitude.

was found that a direct generalisation of the methods used there was not possible. Similarly, by avoiding the use of the element of support, one has to contend with the fact that one cannot generalise many of the methods of frequent use in Riemannian Geometry as is generally customary in the theory of Finsler spaces. Thus it was necessary to develop a somewhat novel geometrical approach. For instance, the notion of transversality, which is the natural generalisation of orthogonality, is not a symmetrical one, so that the normal vector n^i to a hypersurface does not enjoy all the properties which one should expect at first sight — in fact, it has to share these with a cone of directions which will be defined suitably. Also, if we consider the field of unit normals to a hypersurface, the vectors Dn^i/Ds do not, in general, lie in the tangent hyperplane when we differentiate along a curve of the hypersurface. These examples are sufficient to indicate that a rather novel geometrical picture is created by such circumstances, which, however, leads to simple and uncomplicated results in the end. One should note that one may not expect to rediscover a large number of well-known results of euclidean differential geometry when our metric is not even locally a euclidean one.

On the other hand, our covariant derivative possesses one very essential feature which seems to make it especially adaptable for an investigation of this kind. As DAVIES[4]) points out the induced and intrinsic connection parameters (in CARTAN's sense) of a subspace do not in general bear the simple relation to each other that one should expect from a purely geometrical point of view. This seems to cause serious difficulties when one considers curves of the subspace which are at the same time geodesics of the enveloping space. In the present paper we shall show that for our covariant derivative the inrinsic and induced derivatives of a subspace are related to each other in a simple geometrical manner.

Thus we shall devote this paper mainly to the analytical preliminaries which will be indispensable to our later developments, in which the principal stress will be laid on the geometrical point of view. As before, we shall be using the dual Minkowskian tangent spaces, so that in § 2 we shall first give an analytical discussion of the Hamiltonian function corresponding to subspaces. The abovementioned result will be established in § 3 — this must of necessity involve a somewhat tedious analytical procedure. Simple geometrical consequences will be derived, but the complete geometrical discussion will be given in Part II.

§ 2.

The Hamiltonian function corresponding to a subspace.

We consider an n-dimensional Finsler space F_n with coordinates x^i $(i = 1, \ldots, n)$ and distance function $F(x^i, x'^i)$, where $x'^i = dx^i/dt$,

[4]) [6], p. 21.

t being an arbitrary parameter. As usual we assume that F is positive, analytic in all its variables, convex and homogeneous of the first degree in the x'^i. To each point x_0^i of F_n we associate the dual Minkowskian tangent spaces $T_n(x_0^i)$, $T_n'(x_0^i)$ whose elements are respectively the contravariant vectors x'^i and covariant vectors y_i attached to the point x_0^i. The local metric of F_n is determined by T_n, whose Minkowskian distance-function is simply $F(x_0^i, x'^i)$, that of T_n' is given by $H(x_0^i, y_i)$[5]. The latter function is identical to the Hamiltonian function of the problem in the Calculus of Variations corresponding to F apart from a normalisation factor. The metric tensors of F_n are defined by the equations

$$g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F^2(x, x')}{\partial x'^i \partial x'^j}, \tag{2.1}$$

$$g^{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H^2(x, y)}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{2.2}$$

If x'^i of T_n corresponds to y_i of T_n', we have

$$x'^i = H(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_i}, \qquad y_j = F(x, x') \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'^i}, \tag{2.3}$$

as well as the classical formulae involving the raising and lowering of suffixes by means of the metric tensors (2.1) and (2.2), provided the directional arguments of these tensors correspond to the vectors under consideration.

Let us introduce an m-dimensional subspace F_m of F_n represented parametrically by the set of equations[6]

$$x^i = x^i(u^\alpha), \tag{2.4}$$

where we suppose the functions (2.4) to be analytic and the matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) \tag{2.5}$$

to have rank m. The components with respect to F_n of a vector u'^α of the Minkowskian tangent space T_m of F_m are then given by

$$x'^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u'^\alpha, \tag{2.6}$$

so that we immediately have

$$\frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{2.7}$$

As we shall not be using the usual projection factors[7]) it is necessary that we should develop the fundamental formulae relating the elements of F_m with those of F_n *ab initio*, especially as our choice of the directional argument in the metric tensors prevents the customary application of

[5]) Cf. [7], § 1; [9], § 1.

[6]) Latin indices run from 1 to n; Greek indices from 1 to m. We retain the usual summation convention.

[7]) The projection factors are regarded as functions of the element of support by authors making use of the latter notion. Cf. DAVIES [6], p. 21.

the rigorous Quotient theorem. In particular we shall discuss in more detail the Hamiltonian function $\overline{H}$ of the tangent spaces T'_m of F_m. The induced metric of F_m is determined by its distance function

$$\overline{F}(u^\alpha, u'^\alpha) \equiv F\left((x^i(u^\alpha), \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u'^\alpha\right), \tag{2.8}$$

which is again homogeneous of the first degree in the u'^α. From (2.8) and (2.7) we deduce

$$\frac{\partial \overline{F}^2}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial F^2}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial F^2}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},$$

and similarly

$$\frac{\partial^2 \overline{F}^2}{\partial u'^\alpha \partial u'^\beta} = \frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u^\beta},$$

since the matrix (2.5) is independent of direction. Defining the metric tensor $\bar{g}_{\alpha\beta}$ of F_m analogously to (2.1) we therefore have

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u') = g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{2.9}$$

We can now introduce the tangent spaces T'_m at each point of F_m as the space of elements v_α at that point defined by

$$v_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\beta. \tag{2.10}$$

According to (2.9) and (2.6)

$$v_\alpha = g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} x'^j = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} y_i. \tag{2.11}$$

From (2.3), (2.7) and (2.8) we deduce also

$$v_\alpha = \frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} F(x, x') \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'^i} = \overline{F}(u, u') \frac{\partial \overline{F}(u, u')}{\partial u'^\alpha}, \tag{2.12}$$

analogously to (2.3). Thus when u'^α is a unit vector, i.e. $\overline{F}(u, u') = 1$, the variables v_α are the canonical variables of the problem in the Calculus of Variations corresponding to the function $\overline{F}(u, u')$.

Differentiating (2.11) with respect to v_β and v_γ, regarding v_α as an arbitrary vector of a *fixed* T'_m, we find

$$\delta^\beta_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta}, \tag{2.13}$$

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\gamma \partial v_\beta}. \tag{2.13'}$$

Using (2.13) and (2.11) we may now write

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} y_i = v_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta} v_\beta.$$

Since, however, for a fixed T'_m, the elements of the matrix (2.5) may be regarded as constant and independent of the variable vector y_i of T'_m, it follows that

$$y_i = \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta} v_\beta \tag{2.14}$$

for all vectors y_i contained in T'_m.

We can now define the Hamiltonian function $\overline{H}(u^\alpha, v_\alpha)$ corresponding to F_m by writing

$$\overline{H}(u^\alpha, v_\alpha) \equiv H\left(x^i(u^\alpha), \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} v_\alpha\right). \tag{2.15}$$

From this it is not immediately clear that $\overline{H}$ is homogeneous of the first degree in the v_α; nevertheless let us put

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \overline{H}^2(u, v)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \tag{2.16}$$

By differentiating (2.15) with respect to v_α and v_β successively we find

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{H}^2}{\partial v_\alpha} &= \frac{\partial H^2}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha}, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \overline{H}^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H^2}{\partial y_i \partial y_j} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta} + H \cdot \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

But due to (2.3) and (2.6) the last term on the right hand side of this equation becomes

$$x'^i \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} u'^\gamma = 0$$

in virtue of (2.13′). Thus from (2.2) and (2.16) we deduce

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) = g^{ij}(x, y) \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta}. \tag{2.18}$$

Hence

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) v_\alpha v_\beta = g^{ij}(x, y) y_i y_j$$

as a result of (2.14), and thus

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) v_\alpha v_\beta = H^2(x, y) = \overline{H}^2(u, v), \tag{2.19}$$

the first part of this equation being a consequence of the definition (2.2). From (2.16) and EULERs Theorem it follows that $\overline{H}$ is homogeneous of the first degree in the v_α; $\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)$ is homogeneous of degree zero in the v_α.

The process of raising and lowering of suffixes is the same for F_m as for F_n when the $\bar{g}^{\alpha\beta}$ are defined according to (2.16); for, using (2.18), (2.14), (2.3) and (2.13) we have

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) v_\beta &= g^{ij}(x, y) \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta} v_\beta = g^{ij}(x, y) y_j \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \\ &= x'^i \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} u'^\beta = \delta^\alpha_\beta u'^\beta = u'^\alpha. \end{aligned}$$

It follows from the preceding remarks that $\overline{H}$ may be regarded as the distance function of T'_m and $\bar{g}^{\alpha\beta}$ as its metric tensor. Therefore the relations between T_m and T'_m are exactly analogous to those between T_n and T'_n; in particular, there exists a one-one correspondence between them. Geometrically, $\overline{H}(u, v)$ is the function of support of the indicatrix $F(u, u') = 1$ of T_m and vice-versa[8]). It is easily seen that the following

[8]) Cf. [9], § 1.

relations, which we shall be using continually hold:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\,\bar{g}^{\alpha\gamma}(u, v) = \delta^{\gamma}_{\beta}; \tag{2.20}$$

$$u'^{\alpha} = \overline{H}(u, v)\,\frac{\partial \overline{H}(u, v)}{\partial v_{\alpha}}. \tag{2.21}$$

Finally, the inverse relations to (2.6), (2.9) and (2.18) are respectively:

$$u'^{\alpha} = \frac{\partial y_i}{\partial v_{\alpha}}\,x'^{i}; \tag{2.22}$$

$$g_{ij}(x, x') = \bar{g}_{\alpha\beta}(u, v)\,\frac{\partial y_i}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_{\beta}}; \tag{2.23}$$

$$g^{ij}(x, y) = \bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)\,\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^{\beta}}, \tag{2.24}$$

where we have assumed throughout that x'^{i} is a vector in F_m.

We say that *a vector* $u'^{\alpha}_{(2)}$ is *orthogonal with respect to a vector* $u'^{\alpha}_{(1)}$ (or transversal, as in the Calculus of Variations) at the point u^{α} of F_m if [9])

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u'_{(1)})\,u'^{\alpha}_{(1)}\,u'^{\beta}_{(2)} = 0. \tag{2.25}$$

Substituting from (2.9) and (2.6) we see immediately that this is equivalent to

$$g_{ij}(x, x'_{(1)})\,x'^{i}_{(1)}\,x'^{j}_{(2)} = 0,$$

so that orthogonality in F_m implies othogonality in F_n. This notion is not, however, symmetrical in $x'^{i}_{(1)}, x'^{i}_{(2)}$.

§ 3.

Induced and Intrinsic Covariant Derivation.

Consider two neighbouring points A, B of F_m with coordinates x^i (or u^{α}), $x^i + dx^i$ (or $u^{\alpha} + du^{\alpha}$) respectively, a distance ds apart. Denote by x'^{k} the vector dx^k/ds of F_m, similarly by u'^{α} the same vector du'^{α}/ds. Suppose that we have defined a continuous and differentiable vector field in F_m, whose components with respect to F_n (and F_m) we shall denote by X^i (and U^{α}).

The covariant differential DX^i of the vector field X^i with respect to the embedding space F_n is given by [10])

$$DX^i = dX^i + P^i_{hk}(x, x')\,X^h\,dx^k, \tag{3.1}$$

where the connection parameters are defined by

$$P^i_{hk}(x, x') = \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} - \frac{1}{2}\,g^{im}(x, y)\,\frac{\partial g_{hm}(x, x')}{\partial x'^{l}} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^{j}. \tag{3.2}$$

Here the expressions in the curly brackets are the usual Christoffel symbols of the second kind of Riemannian Geometry, the suffixes indicating that the directional arguments are those of the displacement AB.

[9]) Cf. [9], § 2.
[10]) Cf. [7], p. 123.

The vector y_i is the vector of $T_n'(A)$ corresponding to x'^i of $T_n(A)$. Thus our covariant differential (3.1) depends solely on the vector field X^i and on the displacement $A\,B$, and not on any arbitrary element of support.

We shall now define analogously the covariant differential $\bar{D}U^\delta$ of the vector field U^α of F_m with respect to the metric $\bar{g}_{\alpha\beta}$ of F_m:

$$(3.3)\quad \bar{D}U^\delta = dU^\delta + \left[\left\{\begin{matrix}\overline{\delta}\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')} - \frac{1}{2}\bar{g}^{\delta\varepsilon}(u,v)\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}(u,u')}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\overline{\lambda}\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')} u'^\mu\right] U^\alpha\, dw^\beta.$$

This definition immediately ensures the condition that *geodesics of F_m are autoparallel curves*, i.e. their tangent vectors satisfy $\bar{D}u'^\alpha = 0$. This follows in exactly the same manner as the corresponding result for F_n[11]).

We shall now have to investigate by direct calculation the relation between DX^i and $\bar{D}U^\delta$. Firstly, we must transform the Christoffel symbols with respect to $\bar{g}_{\alpha\beta}$ into a form involving only quantities relating directly to F_n. Throughout the following calculation the directional arguments in the g_{ij} (or $\bar{g}_{\alpha\beta}$) are to be regarded as the vector x'^i (or u'^α) giving the direction of the displacement $A\,B$, so that we shall not specify them all the time.

From (2.9) we have

$$\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \\ + g_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha\partial u^\gamma}.$$

By cyclic interchange of the indices α, β, γ we obtain two similar equations; adding the first two and subtracting the last we find (omitting those terms which cancel out)

$$(3.4)\quad \begin{aligned}[\overline{\alpha\beta,\gamma}] &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right)\\ &= g_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma}\right).\end{aligned}$$

Now as in Riemannian Geometry we define

$$(3.4')\quad g_{ij}(x,x')\left\{\begin{matrix}i\\ hk\end{matrix}\right\}_{(x,x')} \equiv [hk,j]_{(x,x')} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j}\right)_{(x,x')}$$

so that we may write after suitable interchange of dummy-suffixes

$$(3.5)\quad \begin{aligned}[\overline{\alpha\beta,\gamma}] &= g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta} + \left\{\begin{matrix}i\\ hk\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\times\\ &\times\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma}\right).\end{aligned}$$

[11]) Cf. [7], p. 124.

This equation represents the transformation-law of the Christoffel symbols. In order to transform the first term on the right-hand side of (3.3), we differentiate the relation

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} U^\alpha, \tag{3.6}$$

obtaining

$$dX^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} U^\alpha du^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha. \tag{3.7}$$

Also, the equations of geodesics in F_n have the form

$$dx'^l + \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^j dx^k = 0. \tag{3.8}$$

According to (3.6), (3.7) and (3.8) equation (3.1) now becomes

$$DX^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha + \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \right] U^\alpha du^\beta + \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{hm}}{\partial x'^l} X^h dx'^l,$$

where we have replaced dx^k by $(\partial x^k/\partial u^\beta)\, du^\beta$. Here it is to be noted that dx'^l refers to the geodesic Γ of F_n tangent to F_m at the point A whose tangent vector is x'^i.

Let us multiply the last equation by $g_{ij}(x, x')\, \partial x^j/\partial u^\gamma$ noting that

$$g_{ij}(x, x')\, g^{im}(x, y) = \delta^m_j. \tag{3.9}$$

We thus obtain

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} DX^i = g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha + g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} U^\alpha du^\beta \times$$
$$\times \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} X^h dx'^l.$$

To the first term on the right-hand side we apply (2.9) and to the second (3.5). We then have

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} DX^i = \bar{g}_{\alpha\gamma} dU^\alpha + \overline{[\alpha\,\beta,\gamma]}\, U^\alpha du^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} X^h dx'^l -$$
$$- \frac{1}{2} U^\alpha du^\beta \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma} \right). \tag{3.10}$$

But from the homogeneity properties of the g_{ij} we have the identities

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} dx^i = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} dx^j = 0, \tag{3.11}$$

or, in virtue of (2.6)

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} du^\beta = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\beta = 0. \tag{3.12}$$

Thus the first and third term of the last expression on the right hand side of (3.10) vanish; after a suitable change of indices we find

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}DX^i = \bar{g}_{\delta\gamma}\left[dU^\delta + \left\{\begin{matrix}\delta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}U^\alpha du^\beta\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}U^\alpha\left(dx'^k - \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta}du^\beta\right). \tag{3.13}$$

having applied (3.6) to the third term of (3.10).

Now the geodesic Γ of F_n determines uniquely a geodesic $\bar{\Gamma}$ of F_m in the neighbourhood of A which it touches at A. The tangent vector x'^k at A of Γ is a function of u^α and u'^α, the latter being tangent vector to $\bar{\Gamma}$ at A. $\bar{\Gamma}$ is analogously to (3.8) represented by

$$du'^\lambda + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')}u'^\mu du^\beta = 0, \tag{3.14}$$

and we have

$$dx'^k - \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta}du^\beta = \frac{\partial x'^k}{\partial u'^\beta}du'^\beta, \tag{3.15}$$

where dx'^k refers to Γ and du'^β is given by (3.14).

Also, if we differentiate (2.9) with respect to u'^β, we have

$$\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')}{\partial u'^\beta} = \frac{\partial g_{ij}(x,x')}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u'^\beta}$$

since the elements of the matrix (2.5) are independent of direction. Substituting (3.15) in the last expression on the right-hand side of (3.13) and making use of our last equation, this expression becomes

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')}{\partial u'^\lambda}du'^\lambda U^\alpha = \frac{1}{2}\bar{g}_{\delta\gamma}(u,u')\cdot\bar{g}^{\delta\varepsilon}(u,v)\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}(u,u')}{\partial u'^\lambda}du'^\lambda U^\alpha$$

in virtue of (2.20). On substituting this expression in (3.13) and using equation (3.14) in order to express du'^λ we finally obtain

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}DX^i = \bar{g}_{\delta\gamma}\left\{dU^\delta + \left[\left\{\begin{matrix}\delta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\bar{g}^{\delta\varepsilon}\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}u'^\mu\right]U^\alpha du^\beta\right\}.$$

Comparing this with (3.3) we have the desired relation

$$g_{ij}(x,x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}DX^i = \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')\,\bar{D}U^\alpha. \tag{3.16}$$

We repeat once more that in this formula X^i is a vector field of F_m; x'^i (or u'^α) are the unit vectors in the direction of the displacement AB. Equation (3.16) is a direct generalisation of the corresponding relation in Riemannian Geometry[12]).

§ 4.

The Normal Cone.

At each point A of F_m we construct the tangents to the m coordinate curves of parameter $u_1, \ldots, u_m$. These are the m vectors, whose n

[12]) Cf. [10], p. 74.

components with respect to F_n are given by $\partial x^i/\partial u^\alpha$. Corresponding to the m independent variables u^α there exist m such independent vector fields in F_m, in terms of which any vector field of F_m is linearly expressible.

Consider a given direction x'^i (or u'^α) in F_m at the point A. Any unit vector $n^{*i}(x, x')$ satisfying the m equations

$$g_{ij}(x, x')\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} n^{*j}(x, x') = 0 \tag{4.1}$$

is said to be a *unit normal to F_m with respect to the direction x'^i of F_m*. Since the rank of the matrix (2.5) is m, there exist $n-m$ linearly independent vectors satisfying (4.1). In the case of a *hypersurface* ($m = n-1$) we then have one such vector corresponding to each direction x' of F_m at A. When we consider the totality of tangential directions x' of F_m at A we thus obtain a cone of directions, which we shall call the *normal cone*. This cone plays a fundamental rôle in the geometrical theory of hypersurfaces.

On the other hand, the unit vectors n^i which satisfy the m equations

$$g_{ij}(x, n)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} n^j = 0 \tag{4.2}$$

are said to be *unit normal vectors* of F_m; they are independent of direction and at each point A of F_m there exist $n-m$ linearly independent vectors satisfying (4.2). In the case of a hypersurface (4.2) defines uniquely a single normal vector n^i. In order to bring out clearly the difference between n^i and n^{*i} we shall briefly outline the geometrical constructions by which both vectors may be obtained (for the case $m = n-1$). In the Minkowskian tangent space $T_n(A)$ the tangent hyperplane $T_{n-1}(A)$ to F_{n-1} is defined by the $(n-1)$ vectors $\partial x^i/\partial u^\alpha$. Construct a hyperplane parallel to $T_{n-1}(A)$ touching the indicatrix $F(x, x') = 1$ in $T_n(A)$. As a result of the convexity of the indicatrix there are two possible points of contact, say A' and A''. It is easily verified that the vectors AA', AA'' of $T_n(A)$ both satisfy (4.2) in virtue of (2.1); by laying down a suitable convention for the sign of n^i (as in euclidean geometry) we choose one of these, which will then be the unique normal n^i. In order to obtain $n^{*i}(x, x'_{(0)})$ (for a given direction $x'_{(0)}$) we construct in $T_n(A)$ the ellipsoid e: $g_{ij}(x, x'_{(0)})\, x'^i\, x'^j = 1$, ($x'_{(0)}$ fixed, x'^i variable). Once more we find points B, B' of e which are the points of contact of e with hyperplanes parallel to $T_{n-1}(A)$; again it follows that the vectors AB, AB' of $T_n(A)$ satisfy (4.1) (with $x' = x'_{(0)}$). Once more a suitable convention of signs selects one of these vectors, which is $n^{*i}(x, x'_{(0)})$.

We may remark that in the case of a locally euclidean metric the indicatrix $F(x, x') = 1$ is simply the ellipsoid e (which is then independent of the choice of the direction $x'_{(0)}$). Consequently n^i and n^{*i} would coincide and reduce to the usual normal vector. It is interesting to note that when the restrictive assumption of a locally euclidean geometry

is abandoned *we have to replace the normal vector by a vector and a cone which together take over the rôle of the normal vector in euclidean geometry.*

We now return to (3.16) for a preliminary analysis of this equation. Let us consider first the process of covariant differentiation of a vector field X^i of F_m along a curve C of F_m. If this vector field is parallel along C with respect to the embedding space F_n, i.e. $DX^i/Ds=0$ along C, it follows from (3.16) that $\bar{D}U^\alpha/Ds=0$ along C. Hence we have the result:

If a vector field of a subspace is parallel with respect to the enveloping space along a curve of the subspace it is also parallel with respect to the subspace.

In particular, if C is a geodesic of F_n and X^i (or U^α) its unit tangent vector (i.e. $DX^i/Ds=0$), it follows that $\bar{D}U^\alpha/Ds=0$. Thus:

If a curve is a geodesic of the enveloping space, it is a geodesic of any subspace in which it lies.

This result is of primary importance as we shall see later. On the other hand, if the vector field U^α is parallel with respect to F_m along C, i.e. $\bar{D}U^\alpha/Ds=0$, we find on comparison with (3.16) and (4.1)

$$\frac{DX^i}{Ds}=\sum_{p=m+1}^{n}\lambda_{(p)}(x,x',X)\,n^{*i}_{(p)}(x,x') \tag{4.3}$$

where the x'^i are the components of the unit tangent vector of C and the $\lambda_{(p)}$ are scalar factors which we shall evaluate explicity in Part II. We thus have:

In order that a vector field of F_m be parallel with respect to F_m along a curve C of F_m it is necessary and sufficient that its covariant derivative with respect to the enveloping space be normal to F_m with respect to the tangent vector of C.

In particular, let U^α be the unit tangent vector to a geodesic of a hypersurface F_{n-1}. Then it follows that:

If a geodesic of F_{n-1} is not a geodesic of the enveloping space F_n (when regarded as a curve of F_n) its principal normal is normal to F_{n-1} with respect to the direction of its tangent vector[13]).

These theorems are all generalisations of well-known theorems of classical differential geometry[14]).

In the case of a hypersurface equation (3.16) admits of a singularly striking interpretation in a Finsler space. In view of (2.9) we can write (3.16) in the form

$$g_{ij}(x,x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{DX^i}{Ds}=g_{ij}(x,x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \tag{4.4}$$

[13]) The principal normal of a curve is the covariant derivative of its unit tangent vector. Cf. [7], § 6.

[14]) Cf. [10], loc. cit.

or, if we denote the components of $\bar{D}U^\beta/Ds$ with respect to F_n by

$$\frac{\delta X^i}{\delta s} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \tag{4.5}$$

equation (4.4) becomes

$$g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \left(\frac{DX^i}{Ds} - \frac{\delta X^i}{\delta s} \right) = 0. \tag{4.6}$$

Comparing this with (4.1) we see that the vector $\frac{DX^i}{Ds} - \frac{\delta X^i}{\delta s}$ is normal to F_m with respect to the direction x', and we may put once more

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^{n} \lambda_{(p)}(x, x', X)\, n^{*i}_{(p)}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}. \tag{4.7}$$

When $m = n-1$ this result shows *that $\delta X^i/\delta s$ is the projection of DX^i/Ds onto the tangent hyperplane to F_{n-1} at the point A, the generating vector $n^{*i}(x, x')$ of the normal cone being used during the process of projection.*

In particular, if C is once more a geodesic of F_{n-1}, X^i being its unit tangent vector, (4.7) reduces to

$$\frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x')\, n^{*i}(x, x'). \tag{4.8}$$

Since n^{*i} is a unit vector, λ is the length of the principal normal of C, which, however, is its curvature when regarded as a curve in F_n[15]). Denoting the latter by $\varrho^{-1}(x, x')$ we see that for a hypersurface

$$\frac{DX^i}{Ds} = \frac{n^{*i}(x, x')}{\varrho(x, x')} + \frac{\delta X^i}{\delta s} \tag{4.9}$$

when X^i is the unit tangent vector to any curve of F_{n-1} touching the geodesic C of F_{n-1} in the point A.

In Part II we shall see that with the aid of a generalisation of the theorem of Meusnier this last result can be brought into close connection with the second fundamental form of the hypersurface. We shall then be in a position to generalise (4.9) to the case when X^i is an arbitrary vector field of F_{n-1} by abandoning the condition that the X^i are unit tangent vectors to a curve of a F_{n-1}. This will lead to an explicit expression for DX^i/Ds and $\delta X^i/\delta s$.

Bibliography.

[1] Cartan, E.
Les Espaces de Finsler. Actualités **79** (Paris 1934).

[2] Berwald, L.
Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Mh. Math. Phys. **43**, 1—14 (1936).

[3] Wegener, J. M.
Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen. Mh. Math. Phys. **44**, 115—130 (1936).

[15]) Cf. [7], § 6.

[4] HAIMOVICI, M.
Les formules fondamentales dans la theorie des hypersurfaces d'un espace général. Ann. sci. Univ. Jassy **20**, 39—58 (1935).

[5] HOMBU, H.
Die Krümmungstheorie im FINSLERschen Raum. J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. (1) **5**, 67—94 (1936/37).

[6] DAVIES, E. T.
Subspaces of a Finsler space. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 19—39 (1947).

[7] RUND, H.
Über die Parallelverschiebung in FINSLERschen Räumen. Math. Z. **54**, 115—128 (1951).

[8] RUND, H.
Eine Krümmungstheorie in FINSLERschen Räumen. Math. Ann. **125**, 1—18 (1952).

[9] RUND, H.
Zur Begründung der Differentialgeometrie in MINKOWSKISCHEN Räumen. Archiv der Math. **3**, 60—69 (1952).

[10] EISENHART, L. P.
Riemannian Geometry. Princeton 1926.

(Eingegangen am 5. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 376—387 (1952).

Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen.

Von

Wolfgang Gaschütz in Kiel.

1. Von H. MASCHKE[1]) wurde 1898 zum erstenmal der für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen grundlegende Satz bewiesen, daß jede Darstellung einer endlichen Gruppe im komplexen Zahlkörper vollreduzibel ist. MASCHKE benutzte dabei die Tatsache, daß sich jede solche Darstellung auf unitäre Gestalt transformieren läßt. Sein Beweisverfahren ist dadurch im wesentlichen an den komplexen Zahlkörper gebunden.

Einen neuen sehr einfachen Beweis gab 1905 I. SCHUR[2]). Er gestattet eine Verallgemeinerung des Satzes von MASCHKE. Dazu wendet man ihn am besten als Aussage über Darstellungsmoduln oder, allgemeiner, über $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln, d.h. Moduln[3]) mit einem Schiefkörper Ω als eigentlichen Rechts- und einer endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ als eigentlichen Ω-Linksoperatorenbereich. Ist G die Ordnung von $\mathfrak{g}$, so kann man nach SCHUR[4]) bekanntlich beweisen: Wenn

$$\text{(1.1)} \qquad \text{Charakteristik } \Omega \nmid G,$$

so ist jeder $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul eines $\mathfrak{g}$-Ω-Moduls direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand in diesem.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, in weiterer Ausgestaltung des Beweisgedankens von SCHUR diejenigen $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\mathfrak{a}$ zu bestimmen, die sich aus jedem $\mathfrak{g}$-Ω-Modul als direkter Summand abspalten lassen, welcher $\mathfrak{a}$ entweder als einen $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul oder als einen $\mathfrak{g}$-Ω-Restklassenmodul enthält. Derartige Moduln $\mathfrak{a}$ nennen wir zur Erinnerung an MASCHKE $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige Darstellung aus jeder umfassenden Darstellung voll herausreduziert werden kann.

Wir verallgemeinern die Untersuchung von vornherein dadurch, daß wir für Ω an Stelle eines Körpers einen ganz beliebigen Rechtsoperatorenbereich zulassen, und verfeinern sie zugleich, indem wir die Eigenschaft der „unteren Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ Teilmodul: Fall u) von der „oberen Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ Restklassenmodul: Fall o) begrifflich trennen; nachträglich stellt sich heraus, daß beide Eigenschaften gleichwertig sind.

[1]) MASCHKE, H., Math. Ann. 52, 363 (1899).

[2]) SCHUR, I., Sber. Pr. Akad. d. Wiss. 1905 insbes. § 3, S. 415f.

[3]) Nicht notwendig endlich über Ω.

[4]) Siehe etwa JACOBSON, N., The Theory of Rings, New York 1943, Chapt. 4, Theorem 46.

Das Hauptergebnis, Satz 1, bestehend aus zwei dualen Hälften $1u$ und $1o$, wird in Abschnitt 2 formuliert. Der Beweis nimmt die Abschnitte 3—5 in Anspruch. In Abschnitt 6 werden einige Anwendungen gegeben: Zunächst der Nachweis, daß sich die oben erwähnte, von SCHUR gegebene Verallgemeinerung des Satzes von MASCHKE unserer Charakterisierung der $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln einfach unterordnet. Ferner wird dort gezeigt, daß für Schiefkörper Ω eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in Ω dann und nur dann voll aus dem regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul herausreduziert werden kann, wenn der zu ihr gehörige Darstellungsmodul $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist. Satz 1 kann daher bei der Ausreduktion einer explizit gegebenen regulären Darstellung über Körpern, deren Charakteristik die Gruppenordnung teilt, nützlich sein. Als weitere Beispiele werden zyklische Moduln, unter $\mathfrak{g}$ elementweise invariante Moduln und monomiale Moduln behandelt. Die $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln unter ihnen lassen sich besonders einfach mit Hilfe von Satz 1 kennzeichnen. Schließlich wird ein Zusammenhang der $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln mit den von E. ARTIN[5]) eingeführten Zerfällungsgruppen für Faktorensysteme hergestellt, der zu einer Verallgemeinerung eines Satzes von I. SCHUR[6]) über zerfallende Faktorensysteme führt.

2. Es bezeichne $\mathfrak{a}$ eine additiv geschriebene Gruppe, die einen beliebigen (eventuell leeren) Bereich Ω von Rechtsoperatoren besitzt, und zu der eine Gruppe $\mathfrak{g}$ der endlichen Ordnung G als eigentlicher Ω-Linksoperatorenbereich erklärt ist. Es gelte also im einzelnen für $a, b \in \mathfrak{a}$; $g, h \in \mathfrak{g}$; $\omega \in \Omega$:

$$(2.1)\quad \begin{cases} a\,\omega \in \mathfrak{a} & g\,a \in \mathfrak{a} \\ (a+b)\,\omega = a\,\omega + b\,\omega & g(a+b) = g\,a + g\,b \\ & (g\,h)\,a = g\,(h\,a), \quad 1\,a = a \\ & (g\,a)\,\omega = g\,(a\,\omega)\,. \end{cases}$$

Wird Ω als Ring angenommen, so soll ferner für $1, \omega, \pi \in \Omega$ gelten:

$$(2.2)\qquad a\,(\omega + \pi) = a\,\omega + a\,\pi\,, \quad (a\,\omega)\,\pi = a\,(\omega\,\pi)\,, \quad a\,1 = a\,.$$

Im folgenden werden wir $\mathfrak{a}$ in zweifacher Weise zu betrachten haben: 1. Als Gruppe mit dem Operatorenbereich Ω, jedoch ohne Berücksichtigung der Gruppe $\mathfrak{g}$ als Operatorenbereich. Dann sprechen wir von $\mathfrak{a}$ als *Ω-Modul* sowie von den *Ω-Endomorphismen*, *Ω-Teilmoduln* usw. von $\mathfrak{a}$. 2. Als Gruppe mit den Operatorenbereichen $\mathfrak{g}$ *und* Ω. Dann sprechen wir von $\mathfrak{a}$ als *$\mathfrak{g}$-Ω-Modul* sowie von den *$\mathfrak{g}$-Ω-Endomorphismen*, *$\mathfrak{g}$-Ω-Teilmoduln* usw. von $\mathfrak{a}$. Entsprechend sei

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

bzw.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$$

[5]) Siehe ZASSENHAUS, H., Lehrbuch der Gruppentheorie I, Leipzig und Berlin, 1937, S. 98.

[6]) Siehe ZASSENHAUS, H., l. c. [5]), S. 125 Satz 25, 26.

gesetzt, wenn $\mathfrak{a}$ direkte Summe der Ω- bzw. $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmoduln $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (*direkte Ω- bzw. $\mathfrak{g}$-Ω-Summe*) ist. $\cong$ bezeichne stets einen $\mathfrak{g}$-Ω-*Isomorphismus*.

A sei der Ring der Ω-*Endomorphismen* von $\mathfrak{a}$. In A sind insbesondere die durch die Elemente $g \in \mathfrak{g}$ induzierten Endomorphismen enthalten, die wir ebenfalls mit g bezeichnen wollen. Die Anwendung der Elemente von A auf die von $\mathfrak{a}$ schreiben wir daher unmißverständlich wie die Operatoren aus $\mathfrak{g}$ als Linksmultiplikationen.

Wegen der Dualität der sich auf u und o beziehenden Aussagen wollen wir im folgenden beide Fälle gleichzeitig, durch einen senkrechten Strich getrennt behandeln. Text, der gleichlautet, ist dabei der Kürze halber über die ganze Seite gesetzt.

Einen $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{b}$ nennen wir eine

u-Erweiterung	*o-Erweiterung*

von $\mathfrak{a}$ *über* $\tilde{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a}$ mit

einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$	dem Restklassenmodul $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$ nach einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$

von $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph und

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^* \tag{2.3}$$

mit einem Ω-Teilmodul $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{b}$ ist.

Wir betrachten nun $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\mathfrak{a}$, für die die folgende Aussage

M_u	M_o

gilt:

Ist $\mathfrak{b}$ *eine*

u-Erweiterung	*o-Erweiterung*

von $\mathfrak{a}$ *über* $\tilde{\mathfrak{a}}$, *so ist*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$$

mit einem $\mathfrak{g}$-Ω-*Teilmodul* $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{b}$. Solche $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln sollen

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-*Moduln*	$\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Moduln*

genannt werden. Ist Ω ein Schiefkörper, so ist bekanntlich (2.3) stets erfüllt. Die

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Moduln	$\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Moduln

$\mathfrak{a}$ sind dann also diejenigen $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln, für die in jedem $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{b}$, in dem ein mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher

$\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul	Restklassenmodul nach einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul

enthalten ist, ein mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand von $\mathfrak{b}$

existiert. Ist darüber hinaus $\mathfrak{a}$ endlich in bezug auf Ω, also in bekannter Terminologie $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-*Darstellungsmodul*, so hat das für die durch $\mathfrak{a}$ induzierte Darstellungsklasse zur Folge, daß genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul ist, jede ihrer Darstellungen sich aus allen umfassenderen Darstellungen voll herausreduzieren läßt.

Wir wollen die folgende Charakterisierung der

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Moduln $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Moduln

beweisen:

Satz 1 *u/o.* $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann*

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-*Modul*, $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Modul*,

wenn $\alpha \in \mathsf{A}$ *existiert, so daß in* A

$$\sum g\,\alpha\,g^{-1} = 1 \quad [7] \tag{2.4}$$

ist. Insbesondere sind also die Begriffe $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- *und* $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Modul identisch.*

3. Zunächst zeigen wir: Aus der Existenz von $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4) folgt, $\mathfrak{a}$ ist

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul. $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul.

Es sei $\mathfrak{b}$ eine

u-Erweiterung o-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$. Ist B der Ring der Ω-Endomorphismen von $\mathfrak{b}$ und

$$b = \varkappa^* b + (1 - \varkappa^*)\, b$$

die (2.3) entsprechende Komponentenzerlegung von $b \in \mathfrak{b}$, so sind die Abbildungen

$$\varkappa^* = \{b \to \varkappa^* b\} \quad \text{und} \quad (1 - \varkappa^*) = \{b \to (1 - \varkappa^*)\, b\}$$

Elemente aus B. Auf Grund von (2.3) ist ferner jeder Ω-Endomorphismus von

$\tilde{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$

zu einem Element aus B fortsetzbar. Da $\mathfrak{a}$ mit

$\tilde{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$

$\mathfrak{g}$-Ω-isomorph ist, existiert nach (2.4) also $\beta \in \mathsf{B}$ mit

$(\sum g\,\beta\,g^{-1})\, a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$. $(\sum g\,\beta\,g^{-1})\, b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$ für $b \in \mathfrak{b}$.

Da

$\varkappa^* a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$, $(1 - \varkappa^*)\, b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$,

[7] Hier und später bedeute $\sum$ die Summe über alle Elemente $g \in \mathfrak{g}$.

ist auch

(3.1u)	(3.1o)
$(\sum g\varkappa^*\beta g^{-1})\,a = a$	$(\sum g\beta(1-\varkappa^*)g^{-1})\,b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$
für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$.	für $b \in \mathfrak{b}$.

Setzen wir

(3.2u) $\bar{\varkappa} = \sum g\varkappa^*\beta g^{-1}$, | $\bar{\varkappa} = 1 - \sum g\beta(1-\varkappa^*)g^{-1}$, (3.2$o$)

so ist

(3.3) $\bar{\varkappa} h = h\bar{\varkappa}$ für $h \in \mathfrak{g}$

unmittelbar einzusehen,

(3.4) $\bar{\varkappa} a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$

nach (3.1u), | nach (3.2o), da $(1-\varkappa^*)g^{-1}a = 0$,

(3.5) $\bar{\varkappa} b \in \tilde{\mathfrak{a}}$ für $b \in \mathfrak{b}$

nach (3.2u), da $g\varkappa^* b \in \tilde{\mathfrak{a}}$. | nach (3.1$o$).

Aus (3.4) und (3.5) folgt ferner

(3.6) $\bar{\varkappa}\bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}$.

Daher ist

(3.7) $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$

mit $\bar{\mathfrak{a}} = (1-\bar{\varkappa})\,\mathfrak{b}$. Denn aus $a = \bar{\varkappa}a = (1-\bar{\varkappa})\,b$, $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$, $b \in \mathfrak{b}$, folgt $\bar{\varkappa}(a+b) = b$ und hieraus [nach (3.6)] $\bar{\varkappa}a = a = 0$. Jedes $b \in \mathfrak{b}$ gestattet die Darstellung $b = \bar{\varkappa}b + (1-\bar{\varkappa})\,b$ mit $\bar{\varkappa}b \in \tilde{\mathfrak{a}}$ [nach (3.5)] und $(1-\bar{\varkappa})\,b \in \bar{\mathfrak{a}}$ (nach Def.). Schließlich ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ nach Voraussetzung und $\bar{\mathfrak{a}}$ nach (3.3) $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul von $\mathfrak{b}$. (3.7) und die Voraussetzung über $\mathfrak{b}$ ergeben, daß $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul

ist.

4. Um den zweiten Teil des Beweises zu Satz 1 $u|o$ führen zu können, muß eine Zwischenbetrachtung eingeschaltet werden.

Zu einem Ω-Modul $\mathfrak{a}$ sei $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ die Menge der Linearkombinationen von G Unbestimmten t_g mit Koeffizienten aus $\mathfrak{a}$, die in der üblichen Weise addiert werden sollen:

$$\sum a_g t_g + \sum b_g t_g = \sum (a_g + b_g)\,t_g.$$

Wird dann

$$(\sum a_g t_g)\,\omega = \sum (a_g\omega)\,t_g$$

gesetzt, so ist Ω Rechtsoperatorenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ gemäß (2.1) und, gegebenenfalls, (2.2). Setzt man ferner

(4.1) $$h\sum a_g t_g = \sum a_g t_{gh^{-1}} = \sum a_{gh} t_g,$$

so ist

$$\begin{aligned} h_1 (h_2 \sum a_g t_g) &= h_1 \sum a_{g h_2} t_g \\ &= \sum a_{g h_1 h_2} t_g \\ &= (h_1 h_2) \sum a_g t_g \\ 1 \sum a_g t_g &= \sum a_g t_g \\ h \left[(\sum a_g t_g) \omega \right] &= h \sum (a_g \omega) t_g \\ &= \sum (a_{g h} \omega) t_g \\ &= (h \sum a_g t_g) \omega \end{aligned}$$

und $\mathfrak{g}$ also Ω-Linksoperatorenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ gemäß (2.1), $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ also $\mathfrak{g}$-Ω-Modul. Wir nennen $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ *den regulären* $\mathfrak{g}$-Ω-*Modul über* $\mathfrak{a}$.

Hilfssatz 1 $u \mid o$. Im Ω-Endomorphismenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ existiert ein Element β mit

$$\sum g \beta g^{-1} = 1. \tag{4.2}$$

$\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist also nach dem bisher zu Satz 1 $u \mid o$ Bewiesenen $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul.

Ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-Modul, so enthält $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ einen $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$, so daß $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$

u-Erweiterung | o-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist.

Beweis. Zum Nachweis der ersten Behauptung verifiziert man leicht, daß die Abbildung

$$\beta = \{\sum a_g t_g \to a_1 t_1\}$$

ein Ω-Endomorphismus von $\mathfrak{b}$ ist, für den, (4.1) zufolge, (4.2) gilt.

Auf Grund von (4.1) ergibt sich ferner, daß

die Menge der Elemente der Form

$$\sum (g a) t_g$$

ein $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist, der sich auf Grund der eineindeutigen Abbildung

$$\lambda = \{a \to \sum (g a) t_g\}$$

mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph erweist. Bezeichnen wir diesen mit $\tilde{\mathfrak{a}}$, so ist also

$$\mathfrak{a} \cong \tilde{\mathfrak{a}}.$$

die Abbildung

$$\lambda = \{\sum a_g t_g \to \sum g^{-1} a_g\}$$

ein $\mathfrak{g}$-Ω-Homomorphismus von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$ ist, für den $\lambda(a\, t_1) = a$, also jedes Element aus $\mathfrak{a}$ Bild ist. Bezeichnen wir den Kern von λ mit $\tilde{\mathfrak{a}}$, so ist also

$$\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}.$$

Ist ferner $\mathfrak{a}^*$ der Ω-Teilmodul der Elemente

$$\sum a_g t_g, \quad a_1 = 0, \qquad\qquad a\, t_1,$$

so wird

$$\mathfrak{a}_g = \tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^*;$$

$\mathfrak{a}_g$ ist daher

u-Erweiterung | o-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$.

5. Wir beenden nun den Beweis zu Satz 1 $u|o$, indem wir zeigen: Ist $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul, | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul,

so existiert $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4). Dazu beweisen wir etwas allgemeiner

Hilfssatz 2. Es sei $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-Modul und

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}} \tag{5.1}$$

mit $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$. Existiert dann im Ω-Endomorphismenring B von $\mathfrak{b}$ ein Element β mit

$$\sum g \beta g^{-1} = 1, \tag{5.2}$$

so existiert auch im Ω-Endomorphismenring $\tilde{\mathsf{A}}$ von $\tilde{\mathfrak{a}}$ und im Ω-Endomorphismenring $\bar{\mathsf{A}}$ von $\bar{\mathfrak{a}}$ ein Element $\tilde{\alpha}$ bzw. $\bar{\alpha}$ mit

$$\sum g \tilde{\alpha} g^{-1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum g \bar{\alpha} g^{-1} = 1.$$

Ist $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul, | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul,

so erfüllt nach Definition $M_u|M_o$ und Hilfssatz 1 $u|o$ der reguläre $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{a}_g$ die in Hilfssatz 2 über $\mathfrak{b}$ gemachten Voraussetzungen. Da

$\mathfrak{a} \cong \tilde{\mathfrak{a}}$, | $\mathfrak{a} \cong \bar{\mathfrak{a}}$,

existiert nach Hilfssatz 2 auch $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4), und Satz 1 $u|o$ ist mit Hilfssatz 2 bewiesen.

Beweis zu Hilfssatz 2. Wir können uns auf den Nachweis für eine Komponente, etwa $\tilde{\mathfrak{a}}$, beschränken.

Es sei

$$b = \varkappa b + (1 - \varkappa) b$$

die (5.1) entsprechende Komponentenzerlegung von $b \in \mathfrak{b}$. Dann ist $\varkappa \in \mathsf{B}$,

$$g \varkappa = \varkappa g \tag{5.3}$$

und

$$\varkappa \varkappa = \varkappa. \tag{5.4}$$

$\varkappa$ induziert die Zerlegung

$$\mathsf{B} = \varkappa \mathsf{B} \varkappa + (1 - \varkappa) \mathsf{B} \varkappa + \varkappa \mathsf{B} (1 - \varkappa) + (1 - \varkappa) \mathsf{B} (1 - \varkappa), \tag{5.5}$$

die zufolge (5.4) eine direkte Zerlegung des Ringes B ist. Dabei ist

$$1 = \varkappa + 0 + 0 + (1 - \varkappa) \tag{5.6}$$

die (5.5) entsprechende Komponentenzerlegung des Einselementes von B. Durch Einsetzen von (5.2) in (5.5) und Vergleich von (5.5) und (5.6) folgt

$$\varkappa \sum g \beta g^{-1} \varkappa = \varkappa$$

und nach (5.3)

$$\sum g \varkappa \beta \varkappa g^{-1} = \varkappa. \tag{5.7}$$

Auf die Elemente aus $\tilde{\mathfrak{a}}$ angewandt sind g, $\varkappa$, $\varkappa \beta \varkappa$ Elemente aus $\tilde{\mathsf{A}}$, und es entspricht dabei $\varkappa$ dem Einselement von $\tilde{\mathsf{A}}$. Bezeichnen wir den durch $\varkappa \beta \varkappa$ induzierten Ω-Endomorphismus von $\tilde{\mathfrak{a}}$ mit $\tilde{\alpha}$, so ergibt sich aus (5.7)

$$\sum g \tilde{\alpha} g^{-1} = 1;$$

w. z. b. w.

Wir wollen im folgenden wegen des Übereinstimmens der Begriffe $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul nur noch von $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln sprechen.

Nachdem Satz 1 $u\,|\,o$ bewiesen ist, erweist sich Hilfssatz 2 offenbar auch mit der folgenden Aussage äquivalent: Ist $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul und gilt (5.1), so sind auch $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln. Daß hiervon auch die Umkehrung gilt, erkennt man folgendermaßen: Sind $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln, $\tilde{\mathsf{A}}$ bzw. $\bar{\mathsf{A}}$ die Ω-Endomorphismenringe von $\tilde{\mathfrak{a}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$ und, nach Satz 1 $u\,|\,o$, $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathsf{A}}$, $\bar{\alpha} \in \bar{\mathsf{A}}$ mit

$$\sum g \tilde{\alpha} g^{-1} = 1$$

und

$$\sum g \bar{\alpha} g^{-1} = 1,$$

und ist $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$ mit der entsprechenden Komponentenzerlegung $b = \tilde{a} + \bar{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, so sei

$$\beta = \{b \to \tilde{\alpha}\,\tilde{a} + \bar{\alpha}\,\bar{a}\}.$$

β ist ein Ω-Endomorphismus von $\mathfrak{b}$ und

$$\sum g \beta g^{-1} = 1;$$

b also nach Satz 1 $u\,|\,o$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul. Damit gilt der (übrigens auch mit dem Krull-Schmidtschen Satz und dem 2. Isomorphiesatz aus der Definition direkt herleitbare)

Satz 2. *Sind $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln, so ist auch*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}} \tag{5.7}$$

$\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul.

Ist $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, und besteht eine Zerlegung (5.7), *so sind auch $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln.*

Aus Hilfssatz 1 u oder o und Satz 2 erhalten wir ferner noch

Satz 3. *$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, wenn ein zu $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand des regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Moduls $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ existiert.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 u etwa ist $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ u-Erweiterung von $\mathfrak{a}$ und nach M_u

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}, \quad \tilde{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}, \tag{5.8}$$

wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

Besteht (5.8), so ist nach Satz 2 $\tilde{\mathfrak{a}}$ und also auch $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, weil $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ nach Hilfssatz 1 u $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

6, a. Es sei die Abbildung

$$\bar{G} = \{a \to Ga\} \tag{6.1}$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$. Dann ist auch die inverse Abbildung $\bar{G}^{-1}$ ein Automorphismus und mit $\alpha = \bar{G}^{-1}$ offenbar (2.4) erfüllt. Das ergibt

Satz 4. *Ist $\bar{G}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul.*

Ist Ω Schiefkörper, so sieht man leicht ein, daß (6.1) dann und nur dann ein Automorphismus ist, wenn Charakteristik $\Omega \nmid G$. Satz 1 $u \mid o$ enthält also in einfacher Weise die von SCHUR gegebene Erweiterung des Satzes von MASCHKE, welche wir in **1** erwähnten.

b. Es sei Ω Schiefkörper und $\mathfrak{a}$ bezüglich Ω zyklisch, d. h. bezüglich Ω von einem Element erzeugt. $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist dann offenbar mit dem regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph und dieser nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul. Aus dem gegen Ende von **2** Gesagten und Satz 2 folgt sodann, daß ein Faktor einer Normalreihe des regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmoduls dann und nur dann als direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand abgespaltet werden kann, wenn er $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

Zum Beispiel läßt sich die aus den folgenden Matrizen (g) bestehende (übrigens absolut irreduzible) Darstellung der nichtkommutativen Gruppe der Ordnung 6 im Primkörper P_2 der Charakteristik 2 aus jeder umfassenderen Darstellung voll herausreduzieren:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \tag{6.2}$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \right.$$

Die P_2-Endomorphismen α des zu ihr gehörigen $\mathfrak{g}$-P_2-Darstellungsmoduls haben nämlich, als Matrizen geschrieben, die folgende Gestalt

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{ik} \in P_2,$$

und es ist, (2.4) entsprechend,

$$\sum (g)(\alpha)(g)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Setzt man daher $\alpha_{11}=1$ und alle anderen $\alpha_{ik}=0$, so ist offenbar (2.4) erfüllt. Gleichzeitig hat man hierin ein einfaches Beispiel dafür, daß $M_{n,o}$ ohne (1.1) gelten kann.

In einem Körper Ω der Charakteristik 3 dagegen hat die (6.2) entsprechende (dann reduzible) Darstellung die folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Für beliebiges

$$(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{pmatrix},\qquad \alpha_{ik}\in\Omega,$$

erhält man

$$\sum(g)\,(\alpha)\,(g)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\alpha_1\\\alpha_2&0\end{pmatrix}$$

mit gewissen $\alpha_1, \alpha_2\in\Omega$. Da also (2.4) für kein α bestehen kann, läßt sich diese Darstellung nicht aus jeder umfassenderen, z. B. nach dem oben Bemerkten nicht aus der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$ über Ω voll herausreduzieren.

c. Es sei für $\mathfrak{a}$ eine der beiden Forderungen erfüllt:

(1) A *ist kommutativ.*

(2) $g\,a=a$ *für alle* $g\in\mathfrak{g}$, $a\in\mathfrak{a}$.

Dann ist offenbar in der Bezeichnungsweise von **6. a** bei beliebigem $\alpha\in\mathsf{A}$

$$\sum g\,\alpha\,g^{-1}=\bar{G}\,\alpha.$$

Ist daher die Abbildung $\bar{G}$ kein Automorphismus von $\mathfrak{a}$, so ist $\bar{G}\,\alpha\neq 1$. Satz 1 in Verbindung mit Satz 4 ergibt also

Satz 5. *Ist für* $\mathfrak{a}$ *eine der Bedingungen* (1), (2) *erfüllt, so ist* $\mathfrak{a}$ *dann und nur dann* $\mathfrak{g}$-Ω-M-*Modul, wenn* $\bar{G}$ *Automorphismus von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Zum Beispiel ist die Bedingung (1) erfüllt, wenn Ω kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ zyklischer Ω-Modul ist.

d. Es sei Ω ein kommutativer Körper und $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul für eine Darstellungsklasse, die eine transitive monomiale Darstellung mit den Matrizen (g) enthält. $\alpha\in\mathsf{A}$ sei die Matrix

$$(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\alpha_{1r}\\\vdots\\\alpha_{r1}\cdots\alpha_{rr}\end{pmatrix},\qquad \alpha_{ik}\in\Omega,$$

zugeordnet. (2.4) entsprechend erhalten wir auf Grund der Monomialität aller Matrizen

$$(6.3)\quad \sum(g)\,(\alpha)\,(g)^{-1}=\begin{pmatrix}U(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{rr})&*&\cdots&**&U(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{rr})&\cdots&*\\\vdots&&\ddots&\vdots*&\cdots&*&U(\alpha_{11}+\cdots+\alpha_{rr})\end{pmatrix},$$

wobei U die Ordnung der Untergruppe ist, die die Darstellung induziert, also $G = U r$, und die Matrix auf der rechten Seite ferner so beschaffen ist, daß die nicht in der Diagonale stehenden Elemente Summen von Elementen α_{ik}, $i \neq k$, der Matrix (α) sind. Wir entnehmen (6.3): Notwendig dafür, daß (6.3) durch geeignete Wahl von α zur Einsmatrix gemacht werden kann, ist

$$\text{Charakteristik } \Omega \nmid U. \tag{6.4}$$

Umgekehrt kann man, wenn (6.4) erfüllt ist, $\alpha_{11} = 1/U$ und alle anderen $\alpha_{ik} = 0$ setzen, so daß (2.4) erfüllt ist. Es gilt also

Satz 6. *Eine transitive monomiale Darstellung in einem Körper läßt sich dann und nur dann aus jeder umfassenderen Darstellung und (nach* 6, b) *dann und nur dann aus der regulären Darstellung voll herausreduzieren, wenn die Charakteristik des Darstellungskörpers die Ordnung der Untergruppe nicht teilt, die die Darstellung induziert.*

Ganz analog läßt sich bei beliebigem Ω auch die folgende Verallgemeinerung beweisen:

Satz 6′. *Es sei Ω ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ direkte Summe von zyklischen Ω-Moduln, die unter $\mathfrak{g}$ transitiv permutiert werden. U sei die Ordnung der Untergruppe, die einen bestimmten der zyklischen Ω-Moduln in sich überführt.*

$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, wenn $a \to U a$, $a \in \mathfrak{a}$, ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$ ist.

e. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden annehmen, daß Ω leer ist.

Nach E. Artin[5]) existiert zu jedem *Faktorensystem* c_{g_1, g_2} von $\mathfrak{g}$ in einem $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{a}$, welches den Relationen

$$c_{g_1, g_2} + c_{g_1 g_2, g_3} = g_1 c_{g_2, g_3} + c_{g_1, g_2 g_3}$$

genügt, eine (von c_{g_1, g_2} abhängige) u-Erweiterung $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ über $\mathfrak{a}$, in der Elemente

$$c_{g_1}, c_{g_2}, c_{g_3}, \ldots \tag{6.5}$$

existieren mit

$$c_{g_1, g_2} = c_{g_1} + g_1 c_{g_2} - c_{g_1 g_2}. \tag{6.6}$$

Man nennt $\mathfrak{b}$ eine *Zerfällungsgruppe* für c_{g_1, g_2}.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-M-Modul, so ist schon $\mathfrak{a}$ Zerfällungsgruppe für jedes Faktorensystem von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Es sei c_{g_1, g_2} ein Faktorensystem von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eine, nach Artin existierende, $\mathfrak{g}$-Erweiterung von $\mathfrak{a}$ mit Elementen (6.5), die (6.6) genügen. Wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-M-Modul ist, existiert nach Definition ein

$\mathfrak{g}$-Teilmodul $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{b}$ mit

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \bar{\mathfrak{a}}. \tag{6.7}$$

$$c^{(\mathfrak{a})}_{g_1, g_2} = c^{(\mathfrak{a})}_{g_1} + (g_1 c_{g_2})^{(\mathfrak{a})} - c^{(\mathfrak{a})}_{g_1 g_2}$$

$$c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1, g_2} = c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1} + (g_1 c_{g_2})^{(\bar{\mathfrak{a}})} - c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1 g_2}$$

sei dann die (6.7) entsprechende Komponentenzerlegung von (6.6). Da $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Teilmoduln sind, ist

$$(g_1 c_{g_2})^{(\mathfrak{a})} = g_1 c^{(\mathfrak{a})}_{g_2}$$

und

$$(g_1 c_{g_2})^{(\bar{\mathfrak{a}})} = g_1 c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_2} \in \bar{\mathfrak{a}}.$$

Ferner ist $c_{g_1, g_2} \in \mathfrak{a}$, also $c^{(\mathfrak{a})}_{g_1, g_2} = c_{g_1, g_2}$ und daher

$$c_{g_1, g_2} = c^{(\mathfrak{a})}_{g_1} + g_1 c^{(\mathfrak{a})}_{g_2} - c^{(\mathfrak{a})}_{g_1 g_2}$$

mit $c^{(\mathfrak{a})}_{g} \in \mathfrak{a}$; w. z. b. w.

Satz 6 steht zu einem Satz über zerfallende Faktorensysteme, dessen Grundgedanke ebenfalls auf I. SCHUR[6]) zurückgeht in einem ähnlichen Verhältnis wie Satz 1 zu Satz 4. Jedoch ist ein $\mathfrak{g}$-Modul, in dem jedes Faktorensystem zerfällt, nicht immer ein $\mathfrak{g}$-M-Modul.

Kombiniert man Satz 6′ und Satz 7, so erhält man eine Aussage, die mit einem nach M. HALL[8]) von ARTIN herrührenden Satz verwandt ist.

Nach Satz 7 stellt der reguläre $\mathfrak{g}$-Modul über $\mathfrak{a}$ eine gewissermaßen kanonische Zerfällungsgruppe für jedes Faktorensystem in $\mathfrak{a}$ dar.

Die vorstehenden Betrachtungen über Faktorensysteme und insbesondere Satz 7 lassen sich ausdehnen auf beliebige *n-Kohomologiegruppen*[9]) (der Fall $n = 2$ behandelt die Faktorensysteme). In den $\mathfrak{g}$-M-Moduln hat man dann geeignete Mittel zur Verallgemeinerung der von G. HOCHSCHILD[10]), D. K. FADDEEV[11]) u. a. bewiesenen Reduktionssätze. Darauf soll in einer späteren Arbeit näher eingegangen werden.

[8]) HALL, M., Ann. of Math. (II) **39**, 228 (1938).

[9]) Siehe EILENBERG, S., and S. MACLANE, Ann. of Math. (II) **48**, 51—78 (1947).

[10]) HOCHSCHILD, G., Ann. of Math. (II) **46**, 58—67 (1945) und **47**, 568—579 (1946).

[11]) FADDEEV, D. K., Doklady Akad. Nauk SSSR, n. s. **58**, 361—364 (1947).

(Eingegangen am 1. November 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 388—408 (1952).

Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems*).

Von

Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Wir betrachten das Randwertproblem eines allgemeinen linearen elliptischen Systems. Es sei F ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten, doppelpunktslosen Kurve R begrenztes Gebiet der x^1, x^2-Ebene. Vorgegeben ist das System

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{L}^1 &\equiv a^1 u_{x^1} + a^2 u_{x^2} + b^1 v_{x^1} + b^2 v_{x^2} - d\,u - e\,v - f = 0 \\ \mathfrak{L}^2 &\equiv \bar{a}^1 u_{x^1} + \bar{a}^2 u_{x^2} + \bar{b}^1 v_{x^1} + \bar{b}^2 v_{x^2} - \bar{d}\,u - \bar{e}\,v - \bar{f} = 0, \end{aligned}$$

welches in dem durch R abgeschlossenen Gebiet $F+R$ elliptisch ist. Die Koeffizienten $a^1 \ldots b^2$, $\bar{a}^1 \ldots \bar{b}^2$ seien in $F+R$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x^1, x^2; d, e, f, $\bar{d}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$ sind in $F+R$ einmal stetig differenzierbar. Gesucht werden Funktionenpaare $u=u(x^1, x^2)$, $v=v(x^1, x^2)$, welche in $F+R$ stetig und im offenen Gebiet F stetig differenzierbar sind, dem System (1) genügen, sowie auf dem Rande R die Randbedingung $u(s)=u_0(s)$ erfüllen. Dabei ist $u_0(s)$ eine willkürlich vorgegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s auf R, wie der Einfachheit halber angenommen werden soll. Die dabei verwendete Sprechweise: in $F+R$ stetig bzw. stetig differenzierbar usw., ist im Sinne der von L. Lichtenstein eingeführten Definition zu verstehen. (Enzykl. math. Wiss. II 3/1, S. 191—192.)

Die ersten Untersuchungen zu dieser Fragestellung stammen von Hilbert[1]). Kürzlich hat H. Beckert[2]) diese Untersuchungen auf n Systeme mit n gesuchten Funktionen und allgemeinere Randbedingungen ausgedehnt.

Die Ergebnisse, die man bei diesen Untersuchungen erhält, lauten für das obige Randwertproblem folgendermaßen:

I. Wenn das homogene Randwertproblem (1) ($f=\bar{f}=0$, $u=0$ *auf* R) *außer* $u=0$, $v=0$ *kein Lösungssystem* u, v *besitzt derart, daß* u *auf der Randkurve* R *verschwindet, so hat das inhomogene Randwertproblem* (1)

*) Diese und die vorangegangene Abhandlung [Fußnote 3)] stellen die Habilitationsschrift (Techn. Univ. Berlin-Charlottenburg 1951) des Verf. dar.

[1]) Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 213—219. Leipzig 1924.

[2]) Beckert, H., Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Math. Nachr. 5, 173—208 (1951).

stets notwendig ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf R die vorgeschriebenen Werte $u_0(s)$ annimmt.

II. Im entgegengesetzten Falle, d.h. wenn es ein Lösungssystem u, v des homogenen Randwertproblems (1) *gibt, daß u auf R verschwindet und die Funktionen u, v nicht beide in F überall Null sind, so existiert ein Lösungssystem des inhomogenen Randwertproblems* (1), *wobei u auf R die vorgeschriebenen Randwerte $u_0(s)$ auf R annimmt, sicher immer dann, wenn $u_0(s)$ und $f, \bar{f}$ gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt.*

In einer Bemerkung zu dieser Satzgruppe ist gezeigt worden, daß der Fall I nicht eintritt[3]). Es verbleibt damit nur II. Dort werden aber keine genauen Aussagen über die Lösbarkeit gemacht, da die „gewissen" Integralbedingungen meines Wissens in der Literatur nirgends angegeben sind und wie HILBERT zuerst bemerkte auch „unter besonderen Umständen" identisch erfüllt sein können. Da nach [3]) die Aussage I leer ist, ein Ergebnis, welches wir für geeignet eingeschränktes F hier wieder gewinnen werden, kann mit obiger Satzgruppe in keinem Falle wirklich entschieden werden, ob ein inhomogenes Randwertproblem lösbar ist oder nicht.

Hier sollen Sätze über die Lösbarkeit des inhomogenen Randwertproblems (1) gewonnen werden, die von diesen genannten Schwierigkeiten frei sind.

Im § 1 werden zu den Randwertproblemen eines speziellen Systems von (1) unendlich viele äquivalente Integralgleichungssysteme angegeben, die sich von den HILBERTschen Systemen dadurch unterscheiden, daß sie eine willkürliche Normierungsfunktion enthalten. Diesen Integralgleichungen kann noch eine sog. „Normforderung" für v auferlegt werden.

Der § 2 bringt dann allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Randwertproblem dieses speziellen Systems bei geeigneter Gebietseinschränkung. Diese Sätze werden aus Randwertproblemen gewonnen, in denen die Lösungen noch gewissen Zusatzbedingungen in Form von „Normforderungen" genügen. Es zeigt sich, daß das inhomogene Randwertproblem immer lösbar ist, das homogene Randwertproblem genau eine Nullösung besitzt.

Durch eine mit dem allgemeinen System (1) verbundene invariante Schreibweise[4]) ist es im § 3 möglich, für das Randwertproblem (1) ebenfalls unendlich viele äquivalente Integralgleichungssysteme anzugeben[5]). Mit diesen ist es möglich, die Sätze des § 2 zu übertragen. Dabei werden

[3]) HELLWIG, G., Bemerkungen zu der Satzgruppe von HILBERT über Systeme elliptischer Differentialgleichungen. Math. Z. **55**, 276—283 (1952).

[4]) HAACK, W., u. G. HELLWIG, Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf FREDHOLMschen Integralgleichungen. I. Math. Nachr. **4**, 408—418 (1950/51).

[5]) Diese Untersuchungen des § 3 sind eine Fortsetzung von [4]) und sind mit Herrn W. HAACK gemeinsam durchgeführt worden.

die zugelassenen Randbedingungen erweitert. Es wird die Randbedingung $\mu_1(s)\,u+\mu_2(s)\,v=u_0(s)$ betrachtet. Diese zeigt, daß die Mannigfaltigkeit und Existenz von Lösungen des Randwertproblems wesentlich von der KRONECKERschen *Charakteristik* des Vektorfeldes $\{\mu_1(s), \mu_2(s)\}$ auf R abhängt. Ist $\{\mu_1, \mu_2\}$ von der Charakteristik Null, so werden diese Randwertprobleme auf solche des § 2 zurückgeführt. Schließlich werden Randwertprobleme von höherer Charakteristik angegeben, die den hier gegebenen Sätzen nicht zugänglich sein können.

Der § 4 bringt dann einen Existenzsatz für das Randwertproblem ohne Gebietseinschränkung. Für diesen ist die in die HILBERTschen Integralgleichungssysteme hineingetragene willkürliche Normierungsfunktion von entscheidender Bedeutung. Er sagt aus, daß das Randwertproblem im großen stets lösbar ist, wenn das homogene Randwertproblem genau eine Nullösung besitzt.

§ 1.

Äquivalente Integralgleichungssysteme.

Wir legen in §§ 1, 2 den Betrachtungen das Randwertproblem

$$\begin{aligned} U_x - V_y &= AU + BV + C \\ U_y + V_x &= \bar{A}U + \bar{B}V + \bar{C} \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Randwerten $U=U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$ zugrunde. Dabei sind $A \ldots \bar{C}$ in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ einmal stetig differenzierbare Funktionen von x, y[5a]), wobei $\mathfrak{F}$ ein Gebiet der x, y-Ebene ist, welches die Voraussetzungen zu (1) erfüllt. Wir suchen Lösungen U, V, die in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetig, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar sind, das System (2) befriedigen und auf $\mathfrak{R}$ die Randwerte $U_0(s)$ annehmen. Aus der Forderung: U in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetig entnimmt man, in welchem Sinne die Randwerte angenommen werden. Weiter betrachten wir (2) mit den Randwerten $U=U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$ und der zusätzlichen Normforderung $\iint_{\mathfrak{F}} V\,k\,dx\,dy=\gamma$. Dabei ist k eine willkürlich vorgegebene in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetige, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbare Funktion von x, y, die in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ wesentlich positiv ist. γ ist eine vorgegebene reelle Zahl. Gesucht werden Lösungen U, V des Randwertproblems (2), wobei V in $\mathfrak{F}$ die Normforderung $\iint_{\mathfrak{F}} V\,k\,dx\,dy=\gamma$ erfüllt. U_0 genügt den Voraussetzungen zu (1). Wir sprechen kurz von einem Randwert-Normproblem.

Für beide Problemstellungen sollen äquivalente Integralgleichungssysteme angegeben werden.

Seien $G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta)$, $G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)$ die beiden GREENschen Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne mit den folgenden Eigenschaften:

[5a]) Es genügt $A \ldots \bar{C}$ in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetig, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar vorauszusetzen.

1. G^{I}, G^{II} sind für alle $x, y \subset \mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ und alle $\xi, \eta \subset \mathfrak{F}$ für verschiedene Punkte (x, y), (ξ, η) zweimal stetig differenzierbar bezüglich x, y und genügen den Gleichungen

$$\Delta_L G^{\mathrm{I}} = \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta_L G^{\mathrm{II}} = \frac{k(x,y)}{\iint\limits_{\mathfrak{F}} k(x,y)\,dx\,dy}\ ^{6}).$$

Dabei ist k eine beliebige Normierungsfunktion mit den obigen Eigenschaften. Bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y), (ξ, η) gegen einen gemeinsamen Grenzwert wird G^{I}, G^{II} unendlich wie

$$-\frac{1}{4\pi}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}.$$

2. Liegt der Punkt P auf $\mathfrak{R}$, so ist

$$G^{\mathrm{I}}(P;\xi,\eta)=0, \qquad \frac{\partial G^{\mathrm{II}}(P;\xi,\eta)}{\partial n_p}=0,$$

unter n die Richtung der inneren Normalen verstanden.

3. G^{I}, G^{II} sind in (x, y), (ξ, η) symmetrisch und es ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}} G^{\mathrm{II}}(x,y;\xi,\eta)\,k(x,y)\,dx\,dy=0. \tag{3}$$

Nach Hilbert[1]) und W. A. Hurwitz[7]) gelangt man für das Randwertproblem (2) zu dem folgenden äquivalenten Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} U(\xi,\eta) &= \iint\limits_{\mathfrak{F}}\{K_{11}(\xi,\eta;x,y)\,U(x,y)+K_{12}(\xi,\eta;x,y)\,V(x,y)\}\,dx\,dy+\\ &\quad +K_1(\xi,\eta)+L_1(\xi,\eta),\\ V(\xi,\eta) &= \iint\limits_{\mathfrak{F}}\Big\{K_{21}(\xi,\eta;x,y;k)\,U(x,y)+\Big(K_{22}(\xi,\eta;x,y;k)+\\ &\quad +\frac{k(x,y)}{\iint\limits_{\mathfrak{F}} k(x,y)\,dx\,dy}\Big)V(x,y)\Big\}\,dx\,dy+K_2(\xi,\eta;k)+L_2(\xi,\eta;k)\ ^{8}). \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} K_{11}(\xi,\eta;x,y) &= G^{\mathrm{I}}_x(x,y;\xi,\eta)\,A(x,y)+G^{\mathrm{I}}_y(x,y;\xi,\eta)\,\bar{A}(x,y),\\ K_{12} &= G^{\mathrm{I}}_x B+G^{\mathrm{I}}_y\bar{B}, \qquad K_{21}(k)=G^{\mathrm{II}}_x\bar{A}-G^{\mathrm{II}}_y A\ ^{8}),\\ K_{22}(k) &= G^{\mathrm{II}}_x\bar{B}-G^{\mathrm{II}}_y B,\\ K_1 &= \iint\limits_{\mathfrak{F}}(G^{\mathrm{I}}_x C+G^{\mathrm{I}}_y\bar{C})\,dx\,dy, \quad K_2(k)=\iint\limits_{\mathfrak{F}}(G^{\mathrm{II}}_x\bar{C}-G^{\mathrm{II}}_y C)\,dx\,dy,\\ L_1 &= \oint\limits_{\mathfrak{R}} U_0 G^{\mathrm{I}}_n\,ds, \qquad L_2(k)=\oint\limits_{\mathfrak{R}} U_0 G^{\mathrm{II}}_s\,ds. \end{aligned} \tag{5}$$

[6]) Horn, J., Partielle Differentialgleichungen, S. 149. Berlin 1944 oder 1949.

[7]) Hurwitz, W. A., Randwertaufgaben bei Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Diss. Göttingen 1910.

[8]) Das in die Bezeichnung aufgenommene k soll lediglich erkennen lassen, wie G^{II} normiert ist. Für $k=1$, $C=\bar{C}=0$ ist die Äquivalenz unter den gegebenen Voraussetzungen in [7]) bewiesen. Für den vorliegenden allgemeineren Fall folgt die Äquivalenz analog. In §§ 1, 2 darf immer $k=1$ angenommen werden.

Satz 1. *Unter den zu* (2) *gemachten Voraussetzungen ist das Randwert-Normproblem* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der Normforderung* $\iint\limits_{\mathfrak{F}} V\,k\,dx\,dy = \gamma$ *äquivalent dem System von Integralgleichungen*

$$U(\xi,\eta) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{K_{11}\,U + K_{12}\,V\}\,dx\,dy + K_1 + L_1$$

$$V(\xi,\eta) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{K_{21}(k)\,U + K_{22}(k)\,V\}\,dx\,dy + \tag{6}$$

$$+ K_2(k) + L_2(k) + \frac{\gamma}{\iint k\,dx\,dy}.$$

Beweis. Führt man in (2) durch $\hat{U} = U$, $\hat{V} = V - \frac{\gamma}{\iint k\,dx\,dy}$ neue gesuchte Funktionen ein, so erhält man das Randwert-Normproblem

$$\begin{aligned} \hat{U}_x - \hat{V}_y &= A\,\hat{U} + B\,\hat{V} + D \qquad & D &= C + \frac{B\gamma}{\iint k\,dx\,dy} \\ \hat{U}_y + \hat{V}_x &= \bar{A}\,\hat{U} + \bar{B}\,\hat{V} + \bar{D} \qquad \text{mit} & \bar{D} &= \bar{C} + \frac{\bar{B}\gamma}{\iint k\,dx\,dy}. \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist $\hat{U} = U_0$ auf $\mathfrak{R}$ und $\iint\limits_{\mathfrak{F}} \hat{V}\,k\,dx\,dy = 0$.

Dieses Randwert-Normproblem ist äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$\hat{U}(\xi,\eta) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{K_{11}\,\hat{U} + K_{12}\,\hat{V}\}\,dx\,dy + K_1 + L_1$$

$$\hat{V}(\xi,\eta) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{K_{21}(k)\,\hat{U} + K_{22}(k)\,\hat{V}\}\,dx\,dy + K_2(k) + L_2(k), \tag{7a}$$

mit $K_{11} \ldots K_{22}(k)$; $L_1, L_2(k)$ wie in (5) und

$$K_1 = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{G^{\mathrm{I}}_x\,D + G^{\mathrm{I}}_y\,\bar{D}\}\,dx\,dy, \qquad K_2(k) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{G^{\mathrm{II}}_x\,\bar{D} - G^{\mathrm{II}}_y\,D\}\,dx\,dy.$$

Stellt man nämlich in dem Integralgleichungssystem (4) [in $\hat{U}$, $\hat{V}$ geschrieben mit den neu festgelegten K_1, $K_2(k)$] die Forderung $\iint\limits_{\mathfrak{F}} \hat{V}\,k\,dx\,dy = 0$, so fällt nur das Glied $\frac{k(x,y)}{\iint k(x,y)\,dx\,dy}$ weg. Man erschließt dies leicht aus der Eigenschaft 3. von G^{II}. Umgekehrt: Betrachtet man das Integralgleichungssystem (7a), so hat jede Lösung die Eigenschaft, daß $\iint\limits_{\mathfrak{F}} \hat{V}\,k\,dx\,dy = 0$ ist. Man erhält aus (7a)

$$\begin{aligned} &\iint \hat{V}(\xi,\eta)\,k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &\quad = \iint k(\xi,\eta)\,\Big(\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\,\bar{A}(x,y)\,\hat{U}(x,y)\,dx\,dy\Big)\,d\xi\,d\eta + \cdots \\ &\quad = \iint \bar{A}(x,y)\,\hat{U}(x,y)\,\Big(\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\,k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\Big)\,dx\,dy + \cdots. \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft 3 von G^{II} folgt $\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\,k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0$. Die dabei vorzunehmenden Integrationsvertauschungen und Differentiationen unter dem Integral sind legitim. Geht man in (7a) auf die U, V zurück, so ergibt sich nach leichter Zwischenrechnung die Behauptung (6).

§ 2.

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Randwertproblem.

Hilfssatz 1. *Für die ersten Ableitungen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ (kurz mit D_1 bezeichnet) der* Greenschen *Funktion G^{I} und G^{II} mit der Normierung $k=1$ gelten für alle Punkte (x, y) und (ξ, η) aus $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ die Abschätzungen*

$$|D_1 G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta)| < A_1 \frac{1}{\varrho}, \qquad |D_1 G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)| < A_2 \frac{1}{\varrho}.$$

Dabei sind A_ν von $x, y; \xi, \eta$ unabhängige positive Konstante und $\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

Beweis. Für G^{I} ist diese Behauptung bekannt[9]). Durch G^{III} werde eine Greensche Funktion mit der üblichen Singularitätsforderung 1 und den Eigenschaften

$$\Delta_L G^{\mathrm{III}} = 0, \qquad \frac{\partial G^{\mathrm{III}}(P; \xi, \eta)}{\partial n_p} = \frac{1}{l}$$

mit P auf $\mathfrak{R}$ eingeführt. l ist die Länge der Randkurve $\mathfrak{R}$. Es gilt: $|D_1 G^{\mathrm{III}}(x, y; \xi, \eta)| < A_3 \frac{1}{\varrho}$ [10]). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt es, die Abschätzung für G^{II} für Kreise $x^2+y^2=r^2$ zu beweisen. Für diese gilt:

$$G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta) = G^{\mathrm{III}}(x, y; \xi, \eta) + \frac{1}{4\pi r^2}(x^2+y^2+\xi^2+\eta^2) + \text{const},$$

wie man leicht verifiziert. Nun ist $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, $\varrho \leq 2r$ und damit $|D_1 G^{\mathrm{II}}| < A_2 \frac{1}{\varrho}$ mit $A_2 = A_3 + \frac{1}{\pi}$.

Jetzt sind wir in der Lage, die Lösbarkeit des Randwertproblems (2) bei geeignet eingeschränktem Gebiet in jedem Falle zu beweisen. In der Formulierung von Hilbert[1]) heißt dies, daß die gewissen Integralbedingungen für jede Wahl von U_0, C, $\bar{C}$ identisch erfüllt sind.

Satz 2. *Es sei γ eine beliebige reelle Zahl. Das Randwertproblem (2) mit $U = U_0$ auf $\mathfrak{R}$ und der Normforderung $\iint V k\, dx\, dy = \gamma$ hat genau ein Lösungssystem U, V. U_0, k, γ sind beliebig vorgegebene Größen. $A, B \ldots \bar{C}, U_0$ und k genügen den Voraussetzungen zu (2).*

Beweis. Sei $k=1$, was ohne Einschränkung angenommen werden darf. Das vorliegende Randwertproblem mit Normforderung ist nach Satz 1 mit dem Integralgleichungssystem (6) äquivalent. Die Kerne $K_{11} \ldots K_{22}$ haben bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y) und (ξ, η) gegen einen gemeinsamen Grenzwert eine Singularität erster Ordnung. Es sei $\mathfrak{F}'$ ein zu $\mathfrak{F}$ kongruentes, geeignet liegendes Gebiet. Wir bezeichnen mit (ξ', η') den Punkt in $\mathfrak{F}'$, der dem Punkt (ξ, η) in $\mathfrak{F}$ entspricht. Man kann (6) in bekannter Weise auf eine Integralgleichung

[9]) Lichtenstein, L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzykl. math. Wiss. II 3/1, 248.

[10]) Vgl. [9]), S. 250—251.

umschreiben, indem man definiert:

$$z(\xi,\eta)=\begin{cases}U(\xi,\eta), & \text{für } (\xi,\eta) \text{ in } \mathfrak{F},\\ V(\xi',\eta'), & \text{für } (\xi,\eta) \text{ in } \mathfrak{F}';\end{cases}$$

$$\mathfrak{K}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)=\begin{cases}K_{11}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) & \text{für } (\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2) \text{ in } \mathfrak{F}\\ \text{und analog für } K_{12},\ K_{21},\ K_{22}.\end{cases}$$

Und nun verfährt man für die Absolutglieder in (6) analog. Man erhält dann eine Integralgleichung der Form

$$z(\xi,\eta)=\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\mathfrak{K}(\xi,\eta;x,y)\,z(x,y)\,dx\,dy+\mathfrak{L}(\xi,\eta). \tag{8}$$

Nach einmaliger Iteration ist der iterierte Kern

$$\mathfrak{K}_2(\xi,\eta;x,y)=\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\mathfrak{K}(\xi,\eta;s,t)\,\mathfrak{K}(s,t;x,y)\,ds\,dt$$

quadratisch integrabel. Nach Hilfssatz 1 kann $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'$ so eingeengt werden, daß

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}(\mathfrak{K}_2(\xi,\eta;x,y))^2\,d\xi\,d\eta\,dx\,dy\leq p<1 \tag{9}$$

wird. Wegen (9) hat die homogene iterierte Gleichung (8) nur die Lösung $z=0$ und in bekannter Weise (8) genau eine Lösung z. Wegen der Äquivalenz ist dieses z bzw. das Lösungspaar u, v eine Lösung des Differentialgleichungssystems und erfüllt Norm- und Randwertbedingung.

Wir ziehen aus Satz 2 einige Folgerungen.

Satz 3. *Das homogene Randwert-Normproblem* (2)

$$U_x-V_y=AU+BV,\qquad U_y+V_x=\bar{A}U+\bar{B}V \tag{10}$$

mit $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* $\iint V\,k\,dx\,dy=0$ *hat nur das Lösungssystem* $U=0$, $V=0$.

Beweis. Dies ist eine Lösung und nach Satz 2 die einzige.

Satz 4. *a) Es gibt kein Randwertproblem der Form* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *welches als einziges Lösungssystem nur* $U=0$, $V=0$ *besitzt.*

b) Vielmehr hat jedes solches Randwertproblem mindestens ein Lösungssystem U_H, V_H *mit* $U_H=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* U_H, V_H *nicht beide Null in* $\mathfrak{F}$ *und damit sicher die unendlich vielen Lösungen* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$ ($\varkappa$ *eine Konstante*).

Beweis. Zu a) Stellt man zu dem Randwertproblem noch die Normforderung $\iint V\,k\,dx\,dy=\gamma$ mit $\gamma\neq 0$, so erhält man sicher ein Lösungssystem mit $V\not\equiv 0$.

Zu b). Aus a) folgt, daß stets ein solches U_H, V_H vorhanden ist.

Bemerkung. Satz 4 zeigt, daß die Aussage I (S. 388) leer ist. Ohne Gebietseinschränkung vgl. [3]).

Es soll jetzt die Gesamtheit der Lösungen des Randwertproblems (2) aus Randwert-Normproblemen aufgebaut werden.

Satz 5. *a) Das Randwertproblem* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *hat stets unendlich viele Lösungen.*

b) Man erhält die Gesamtheit, indem man die unendlich vielen Randwert-Normprobleme (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* $\iint V\, k\, dx\, dy = \gamma_0$ *löst. Dabei durchläuft* γ_0 *die Gesamtheit der reellen Zahlen.*

Beweis. Zu a). Irgendeine Lösung U_I, V_I findet man nach Satz 2. Die in Satz 4 angegebenen Lösungen $\varkappa U_H, \varkappa V_H$ können hinzuaddiert werden.

Zu b). Der Prozeß liefert für jedes γ_0 eine Lösung des Randwertproblems. Angenommen es gebe eine Lösung von (2) U_1, V_1 mit $U_1 = U_0$ auf $\mathfrak{R}$, die durch diesen Prozeß nicht gefunden werden kann. $\iint V_1\, k\, dx\, dy$ habe den Wert γ_1. Das Randwert-Normproblem mit $\iint V\, k\, dx\, dy = \gamma_1$ habe die Lösung U_0, V_0. Die Differenzen $U_1 - U_0 = W$, $V_1 - V_0 = Z$ genügen den Voraussetzungen des Satzes 3 und damit folgt $W = 0$, $Z = 0$ in $\mathfrak{F}$, welches ein Widerspruch zur Annahme ist. Daher ist U_1, V_1 bei dem Prozeß schon mit erfaßt und Satz 5 ist bewiesen.

Satz 6. *Ist* U_I, V_I *irgendeine Lösung von* (2) *mit* $U_I = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$; U_H, V_H *eine Lösung von* (10) *mit* $U_H = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *wobei* U_H, V_H *nicht beide in* $\mathfrak{F}$ *Null sind, so stellt* $U = \varkappa U_H + U_I$, $V = \varkappa V_H + V_I$ *die Gesamtheit der Lösungen des Randwertproblems* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *dar* ($\varkappa$ *eine Konstante*).

Beweis. Nach Satz 2 ist ein solches U_I, V_I immer vorhanden. Wählt man $\varkappa$ in der Form

$$\varkappa = \frac{\gamma_0 - \iint V_I\, k\, dx\, dy}{\iint V_H\, k\, dx\, dy},$$

so wird durch $U = \varkappa U_H + U_I$, $V = \varkappa V_H + V_I$ jedes Randwert-Normproblem aus Satz 5b gelöst. Es ist $\iint V_H\, k\, dx\, dy \neq 0$, da aus $\iint V_H\, k\, dx\, dy = 0$ wegen $U_H = 0$ auf $\mathfrak{R}$ nach Satz 3 folgt $U_H = 0$, $V_H = 0$, welches ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes ist. Damit ist alles bewiesen.

Satz 6 gibt eine vollständige Lösung des Randwertproblems. Nach Satz 2 kann man eine Lösung des Randwertproblems durch eine Normforderung eindeutig festlegen. Es kann dies auch in Anlehnung an Riemann durch eine „Punktforderung" geschehen[11]).

Satz 7. *Es seien* γ, γ_1, γ_2 *irgendwelche vorgegebenen reellen Zahlen mit* $(\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 \neq 0$. *Hat das homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *eine Lösung* U_H, V_H *derart, daß im beliebigen Punkt* $(\xi, \eta) < \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$

$$\gamma_1 U_H(\xi, \eta) + \gamma_2 V_H(\xi, \eta) \neq 0 \tag{11}$$

[11]) In Nr. 19 seiner Dissertation zeigt Riemann, daß man eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen dadurch eindeutig in einem Gebiet $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ festlegen kann, daß man auf dem Rand $\mathfrak{R}$ den Realteil und in einem beliebigen Punkt $(\xi, \eta) < \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ den Imaginärteil willkürlich vorschreibt. Bezeichnet man Real- und Imaginärteil mit U, V, so entspricht die obige Fragestellung dem Randwertproblem mit Punktvorgabe: $U_x - V_y = 0$, $U_y + V_x = 0$. Dabei ist U auf $\mathfrak{R}$ und V im Punkte (ξ, η) willkürlich vorgeschrieben.

ist, so hat das Randwertproblem (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der Vorgabe in einem Punkte* $\gamma_1 U(\xi, \eta) + \gamma_2 V(\xi, \eta) = \gamma$ *genau eine Lösung.*

Beweis. Die Konstante $\varkappa$ in Satz 6 wird durch die Punktvorgabe eindeutig festgelegt. Es ist

$$\varkappa = \frac{\gamma - (\gamma_1 U_I(\xi, \eta) + \gamma_2 V_I(\xi, \eta))}{\gamma_1 U_H(\xi, \eta) + \gamma_2 V_H(\xi, \eta)}.$$

Bemerkungen. Die Voraussetzung (11) ist wesentlich. Es kann nämlich notwendig $U_H = 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ eintreten, so daß die Wahl $\gamma_2 = 0$ dann nicht zulässig ist. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft. In Analogie zu den Verhältnissen bei dem CAUCHY-RIEMANNschen System[11]) könnte man geneigt sein anzunehmen, daß die Wahl $\gamma_1 = 0$ immer zulässig ist. Bei den in Satz 8 zugelassenen Systemen ist dies tatsächlich immer der Fall, daß sie jedoch allgemein nicht notwendig möglich ist, wird durch ein Beispiel gezeigt.

Satz 8. *Die Bedingung* $B_x + \bar{B}_y = 0$ *in* $\mathfrak{F}$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß bei dem Randwertproblem* (10) *mit* $U = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *die Lösungsgesamtheit aus* $U = 0$, V *besteht. Die Gesamtheit kann explizit angegeben werden.*

Beweis. a) Setzt man in (10) $U = 0$, so erhält man für V: $-V_y = BV$, $V_x = \bar{B}V$ und dieses System hat nur dann von $V = 0$ verschiedene Lösungen, wenn die „Integrabilitätsbedingung" $B_x + \bar{B}_y = 0$ in $\mathfrak{F}$ erfüllt ist. Solche muß es aber nach Satz 4a) haben, da anderenfalls die Annahme $U = 0$ nicht statthaft ist.

b) Ist $B_x + \bar{B}_y = 0$, so erhält man aus (10) durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten nach y und anschließender Addition, wobei man die Gleichungen (10) nochmals berücksichtigt eine Gleichung der Form

$$(12)\quad U_{xx} + U_{yy} - (A + \bar{B})U_x + (B - \bar{A})U_y + (\bar{B}A - B\bar{A} - A_x - \bar{A}_y)U = 0.$$

Mit $U = 0$ auf $\mathfrak{R}$ folgt aus (12) für geeignet eingeschränktes $\mathfrak{F}$ notwendig $U = 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$[12]). Für die explizite Darstellung der Lösung vgl. [3]).

Wir kommen zurück auf das angekündigte Beispiel.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ das durch den Einheitskreis abgeschlossene Gebiet $x^2 + y^2 \leq 1$. Wir betrachten das System

$$U_x - V_y = -6y\,U - 6x\,V, \qquad U_y + V_x = 6x\,U - 6y\,V$$

mit $U = 0$ auf $\mathfrak{R}$. Lösungen sind $U = -\varkappa \sin 3(x^2 + y^2 - 1)$, $V = \varkappa \cos 3(x^2 + y^2 - 1)$. Es ist $V = 0$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = r_0^2$ mit $r_0 = \sqrt{1 - \frac{\pi}{6}} < 1$. Daher ist für alle Punkte (x, y), die auf diesem Kreis liegen, die Wahl $\gamma_1 = 0$ in (11) nicht zulässig.

[12]) LICHTENSTEIN, L., Neuere Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Enzykl. math. Wiss. II 3/2, 1297.

§ 3.

Das allgemeine Randwert- und Randwert-Normproblem.

Um alle Sätze und Probleme auf das allgemeine System (1) zu übertragen, werden wir (1) auf ein System der Form (2) zu reduzieren suchen. Es genügt aber für die verschiedenen Problemstellungen nicht, nur die bekannte existenzmäßige Möglichkeit einer solchen Übertragung aufzuzeigen, sondern es werden genaue Zusammenhänge zwischen (1) und (2) benötigt. Insbesondere werden wir für das allgemeine System (1) äquivalente Integralgleichungssysteme angeben, die an Stelle von (4) und (6) treten und eine Verallgemeinerung von diesen sind[5]).

Wir betrachten (1) unter den dort gegebenen Voraussetzungen. Man nennt (1) in dem abgeschlossenen Gebiet $F+R$ *elliptisch*, wenn dort die quadratische Form

$$(13)\qquad Q \equiv \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} dx^1\,dx^1 - \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\} dx^1\,dx^2 + \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} dx^2\,dx^2$$

mit der Diskriminante

$$(14)\qquad D \equiv \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\}^2$$

definit ist. Es ist daher $D>0$ in $F+R$. Führt man die Ausdrücke

$$(15)\qquad q = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{a}^2 \end{vmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ \bar{b}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix}$$

ein, so gilt wie man leicht verifiziert: $1 = r\,q - p^2$. Daher ist $q \neq 0$, $r \neq 0$ in $F+R$. Wir dürfen Q stets positiv definit annehmen und Q/D als quadratische Grundform (Metrik) einer RIEMANNschen Geometrie in der x^1, x^2-Ebene deuten. Mit

$$(16)\qquad g_{11} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix}, \qquad g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{2D} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\}, \qquad g_{22} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix}$$

erhalten wir das Bogenelement $(ds)^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$[13]). Wir führen nun zwei bezüglich der Metrik orthogonale Felder von Einheitsvektoren $\dot{x}^i = \alpha^i(x^1, x^2)$, $\dot{x}^i = \bar{\alpha}^i(x^1, x^2)$ ein, die wir durch

$$(17)\qquad g_{ik}\,\alpha^i\,\alpha^k = 1, \qquad g_{ik}\,\alpha^i\,\bar{\alpha}^k = 0, \qquad g_{ik}\,\bar{\alpha}^i\,\bar{\alpha}^k = 1$$

festlegen. Diese und die mit ω_1, ω_2 bezeichneten Differentialformen

$$(18)\qquad \omega_1 = \alpha_i\,dx^i, \qquad \omega_2 = \bar{\alpha}_i\,dx^i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = g_{ik}\,\alpha^k, \qquad \bar{\alpha}_i = g_{ik}\,\bar{\alpha}^k$$

sind wegen der durch (16) mit dem Ausgangssystem erzeugten Kopplung für (1) von ausgezeichneter Bedeutung. Es gelten dann mit

$$g_{ik}\,g^{kl} = \delta_i^l = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \\ 0 & \text{für } i \neq l \end{cases}$$

[13]) Über oben und unten stehende gleiche Indizes ist in diesem Paragraphen stets von 1 bis 2 zu summieren.

die Relationen

$$(19)\quad g^{ik}\alpha_i\alpha_k = 1\,,\quad g^{ik}\alpha_i\bar{\alpha}_k = 0\,,\quad g^{ik}\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_k = 1\,,\quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D}}\,.$$

Ist S eine in F stetig differenzierbare Funktion von x^1, x^2, so nennt man $S_\alpha = \alpha^i S_i$, $S_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}^i S_i$ $\left(S_i \equiv \frac{\partial S}{\partial x^i}\right)$ mit der Umkehrung $S_i = \alpha_i S_\alpha + \bar{\alpha}_i S_{\bar{\alpha}}$ die invarianten Ableitungen bezüglich der Formen ω_1, ω_2. Indem man (1) linear kombiniert[14])

$$(20)\qquad (\bar{b}^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^1 - (b^k\bar{\alpha}_k)\,\mathfrak{Q}^2,\qquad (\bar{b}^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^1 - (b^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^2$$

erhält man mit den *Normalfunktionen*

$$(21)\qquad U = u,\qquad V = p\,u + r\,v$$

[vgl. (15)] die *Normalform* zu (1)

$$(22)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{N}^1 &\equiv U_\alpha - V_{\bar{\alpha}} - a\,U - b\,V - c = 0,\\ \mathfrak{N}^2 &\equiv U_{\bar{\alpha}} + V_\alpha - \bar{a}\,U - \bar{b}\,V - \bar{c} = 0.\end{aligned}$$

Nach (21) und (15) sind die U, V unabhängig von dem willkürlichen Vektorfeld α^i, $\bar{\alpha}^k$ und bestimmen in ein-eindeutiger Weise die u, v. Die Koeffizienten $a \ldots \bar{c}$ sind durch elementare algebraische Rechnungen aus den Koeffizienten von (1) und α^i bestimmt. Sie sind bei geeigneter Voraussetzung über das willkürliche Vektorfeld α^i unter den Voraussetzungen zu (1) in $F + R$ stetig differenzierbar. Nehmen wir die Lösungen u, v von (1) als Invariante gegen Transformationen der x^i an, so ergeben sich die Normalfunktionen U, V in (22) als Invariante 1. gegen Koordinatentransformationen, 2. gegen Transformationen des isometrischen Vektorfeldes $\alpha^i, \bar{\alpha}^k$ (von diesem hängen sie ja gar nicht ab), 3. gegen konforme Transformationen[15]).

Mit (18) läßt sich $(ds)^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ in der Form $(ds)^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ schreiben. Seien nun die zu (1) gemachten Voraussetzungen für die Koeffizienten in einem Gebiet F^* mit der stetig gekrümmten, geschlossenen Randkurve R^* erfüllt derart, daß F^* das Gebiet F ganz im Innern enthält $(F^* > F)$, so existieren in dem geeignet eingeschränkten F^* Koordinatentransformationen $x = \varphi(x^1, x^2)$, $y = \psi(x^1, x^2)$ derart, daß $(ds)^2$ die Form annimmt

$$(23)\qquad (ds)^2 \equiv (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = \sigma^2\left((dx)^2 + (dy)^2\right)\,[16]).$$

Dabei haben φ, ψ in $F + R$ stetige erste und einer HÖLDER-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Sind Δ_1, Δ_B der erste und

[14]) Man vergleiche für die Durchführung [4]). Die hier gegebene Normierung weicht von der dortigen nur unwesentlich ab.

[15]) Unter konformen Transformationen verstehen wir solche, die (1) in $\lambda\,\mathfrak{Q}^1 = 0$, $\mu\,\mathfrak{Q}^2 = 0$ überführen mit $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ in $F + R$.

[16]) Siehe [12]), S. 1297—98 und die dort angegebene Literatur.

zweite BELTRAMIsche[17]) und Δ_L der LAPLACEsche Operator, so gilt $\Delta_B \varphi = 0$, $\Delta_B \psi = 0$, $\Delta_B = \frac{1}{\sigma^2} \Delta_L$ und $\sigma^2 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} = \frac{1}{\Delta_1 \psi}$ [18]). $F + R$ werde bei dieser Transformation umkehrbar eindeutig auf das Gebiet $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ mit stetig gekrümmtem Rand $\mathfrak{R}$ abgebildet. Insbesondere ist σ^2 in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ wesentlich positiv und stetig differenzierbar, kann daher als Normierungsfunktion k [vgl. zu (2)] dienen. Aus (23) folgt $\omega_1 = \sigma \cos\varphi \, dx + \sigma \sin\varphi \, dy$, $\omega_2 = -\sigma \sin\varphi \, dx + \sigma \cos\varphi \, dy$ und da, wie man leicht zeigt, die Normalform (22) bei den konformen und orthogonalen Transformationen der Ableitungsrichtungen invariant bleibt, darf $\varphi = 0$ gesetzt werden[19]). Dies führt zu $\omega_1 = \sigma \, dx$, $\omega_2 = \sigma \, dy$. Daher ist in (22) $U_\alpha = \frac{1}{\sigma} U_x$, $U_{\bar\alpha} = \frac{1}{\sigma} U_y$ und (22) geht mit $a = \frac{1}{\sigma} A \ldots \bar c = \frac{1}{\sigma} \bar C$ in das spezielle System (2) über und $A \ldots \bar C$ erfüllen die Voraussetzungen zu (2).

Wir führen analog zu § 1 allgemeine GREENsche Funktionen $g^{\mathrm{I}}(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$, $g^{\mathrm{II}}(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$ ein mit den Eigenschaften:

1. $$\Delta_B g^{\mathrm{I}} = 0, \quad \Delta_B g^{\mathrm{II}} = \frac{k}{\iint k\,[\omega_1\,\omega_2]}$$ [20]).

Dabei ist k für das Gebiet F in der x^1, x^2-Ebene eine Normierungsfunktion mit analogen Eigenschaften wie zu (2). Für $x^i \to \xi^i$ wird g^{I}, g^{II} wie $-\frac{1}{4\pi} g_{ik}(\xi^1, \xi^2)(x^i - \xi^i)(x^k - \xi^k)$ unendlich.

2. Mit Punkt P: (x^1, x^2) auf R ist $g^{\mathrm{I}}(P; \xi^1, \xi^2) = 0$, $\frac{\partial g^{\mathrm{II}}(P; \xi^1, \xi^2)}{\partial n_p} = 0$.

3. g^{I}, g^{II} ist symmetrisch in (x^1, x^2), (ξ^1, ξ^2) und es ist

$$\iint_F g^{\mathrm{II}}(x^i, \xi^i)\, k\,[\omega_1\,\omega_2] = 0.$$

[17]) Ist Φ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so ist

$$\Delta_1 \Phi = \frac{g_{11}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}\right)^2 - 2 g_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + g_{22}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}\right)^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

In den mit (1) verbundenen invarianten Ableitungen läßt $\Delta_B \Phi$ die einfache Darstellung zu

$$\Delta_B \Phi = \Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{\bar\alpha\bar\alpha} - \bar q \, \Phi_\alpha - q \, \Phi_{\bar\alpha}$$

mit $[d\omega_1] = q\,[\omega_1\,\omega_2]$, $[d\omega_2] = \bar q\,[\omega_2\,\omega_1]$ [vgl. [4]) S. 415].

[18]) BIANCHI, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 67—69. Leipzig 1910.

[19]) In (23) setzen wir allgemeiner $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = \sigma^2\{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2\}$. Werden durch $\widetilde\Omega_1 = \sigma\Omega_1$, $\widetilde\Omega_2 = \sigma\Omega_2$ neue Formen eingeführt, so transformieren sich die Ableitungsrichtungen in (22), da Formen und invariante Ableitungen kontragredient miteinander verknüpft sind: $\frac{1}{\sigma} U_\alpha = U_{\widetilde\alpha}$, $\frac{1}{\sigma} U_{\bar\alpha} = U_{\bar{\widetilde\alpha}}$. Bildet man in (22) $\frac{1}{\sigma}\mathfrak{R}^1$, $\frac{1}{\sigma}\mathfrak{R}^2$, so ändert sich die Gestalt von (22) nicht. Nun ist $\omega_1 = \widetilde\Omega_1 \cos\varphi + \widetilde\Omega_2 \sin\varphi$, $\omega_2 = -\widetilde\Omega_1 \sin\varphi + \widetilde\Omega_2 \cos\varphi$. Bilden wir in (22) $\mathfrak{R}^1\cos\varphi + \mathfrak{R}^2\sin\varphi$, $-\mathfrak{R}^1\sin\varphi + \mathfrak{R}^2\cos\varphi$, so erhalten wir mit den neuen Ableitungsrichtungen $U_\beta = U_{\widetilde\alpha}\cos\varphi + U_{\bar{\widetilde\alpha}}\sin\varphi$, $U_{\bar\beta} = -U_{\widetilde\alpha}\sin\varphi + U_{\bar{\widetilde\alpha}}\cos\varphi$ wieder eine Normalform.

[20]) $[\omega_1\,\omega_2] = (\alpha_1\bar\alpha_2 - \alpha_2\bar\alpha_1)\,[dx^1\,dx^2] = \frac{1}{\sqrt{D}}\,[dx^1\,dx^2]$ [vgl. [19])] ist das „äußere Produkt" der Formen ω_1, ω_2.

Dabei bedeutet n die zur Tangentenrichtung von R bezüglich der Metrik orthogonale Richtung, die ins Innere von F zeigt. Also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}\,ds = \Phi_x\,\omega_1 + \Phi_{\bar{x}}\,\omega_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,ds = \Phi_{\bar{x}}\,\omega_1 - \Phi_x\,\omega_2.$$

Die Existenz solcher GREENschen Funktionen ist sicher, denn g^{I} geht bei den Koordinatentransformationen (23) in G^{I} von § 1 und g^{II} in ein G^{II} über, welches mit $\left(\text{wegen } \Delta_B = \frac{1}{\sigma^2}\,\Delta_L\right) k_1(x, y) = k\left(\varphi^{-1}(x, y), \psi^{-1}(x, y)\right) \cdot \sigma^2(x, y)$ normiert ist[21]).

Nunmehr legen wir unseren Betrachtungen das System (1) bzw. (22) zugrunde und gelangen in bekannter Weise[4]) zu dem folgenden System von Integralgleichungen, die dem Randwertproblem (1) mit $u = u_0$ auf R äquivalent sind,

$$\begin{aligned} U(\xi^i) &= \iint_F \{k_{11}(\xi^i, x^i)\,U(x^i) + k_{12}(\xi^i, x^i)\,V(x^i)\}\,[\omega_1\,\omega_2] + k_1(\xi^i) + l_1(\xi^i), \\ V(\xi^i) &= \iint_F \left\{k_{21}(\xi^i, x; k)\,U(x^i) + \left(k_{22}(\xi^i, x^i; k) + \frac{k(x^i)}{\iint k\,[\omega_1\,\omega_2]}\right) V(x^i)\right\} \times \\ &\qquad \times [\omega_1\,\omega_2] + k_2(\xi^i; k) + l_2(\xi^i; k). \end{aligned} \tag{24}$$

Nach (21) kann man diese durch $u = U$, $v = \dfrac{V - pU}{r}$ unmittelbar in u, v umschreiben. In (24) sind die Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} k_{11} &= g^{\mathrm{I}}_x\,a + g^{\mathrm{I}}_{\bar{x}}\,\bar{a}, & k_{12} &= g^{\mathrm{I}}_x\,b + g^{\mathrm{I}}_{\bar{x}}\,\bar{b}, \\ k_{21} &= g^{\mathrm{II}}_x\,\bar{a} - g^{\mathrm{II}}_{\bar{x}}\,a, & k_{22} &= g^{\mathrm{II}}_x\,\bar{b} - g^{\mathrm{II}}_{\bar{x}}\,b, \\ k_1 &= \iint_F (g^{\mathrm{I}}_x\,c + g^{\mathrm{I}}_{\bar{x}}\,\bar{c})\,[\omega_1\,\omega_2], & k_2 &= \iint_F (g^{\mathrm{II}}_x\,\bar{c} - g^{\mathrm{II}}_{\bar{x}}\,c)\,[\omega_1\,\omega_2], \\ l_1 &= \oint_R u_0\,g^{\mathrm{I}}_n\,ds, & l_2 &= \oint_R u_0\,g^{\mathrm{II}}_s\,ds. \end{aligned} \tag{25}$$

Diese Integralgleichungen enthalten σ^2 nicht mehr. Sie zeigen, wie vorteilhaft die Verwendung der mit (1) direkt verknüpften invarianten Ableitungen und Formen ω_1, ω_2 ist.

Nunmehr sind wir in der Lage, alle Sätze aus §§ 1, 2 auch für das allgemeinere System (1) auszusprechen. Jedoch sollen die Randvorgaben noch erweitert werden. Die Normalform (22) bleibt bei den „orthogonalen" Transformationen der U, V

$$\begin{aligned} \hat{U} &= a_{11}\,U - a_{12}\,V, & U &= \frac{a_{11}}{E}\,\hat{U} + \frac{a_{12}}{E}\,\hat{V} \\ \hat{V} &= a_{12}\,U + a_{11}\,V, & V &= -\frac{a_{12}}{E}\,\hat{U} + \frac{a_{11}}{E}\,\hat{V} \end{aligned} \tag{26}$$

[21]) Dabei ist die Umkehrung von $x = \varphi(x^1, x^2)$, $y = \psi(x^1, x^2)$ [vgl. zu (23)] mit $x^1 = \varphi^{-1}(x, y)$, $x^2 = \psi^{-1}(x, y)$ bezeichnet. Dies ist wegen $\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x \neq 0$ möglich.

mit $E=(a_{11})^2+(a_{12})^2>0$ in $F+R$ erhalten [4) S. 413]. Man erhält aus der ersten Gleichung von (22)

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\frac{a_{11}}{E}\hat{U}_\alpha+\frac{a_{12}}{E}\hat{V}_\alpha+\frac{a_{12}}{E}\hat{U}_{\bar\alpha}-\frac{a_{11}}{E}\hat{V}_{\bar\alpha}\\ &=\left\{\frac{1}{E}(a_{11}a-a_{12}b)-\left(\frac{a_{11}}{E}\right)_\alpha-\left(\frac{a_{12}}{E}\right)_{\bar\alpha}\right\}\hat{U}+\cdots.\end{aligned}$$

Indem man in (22) $\mathfrak{R}^1$, $\mathfrak{R}^2$ linear kombiniert: $a_{11}\mathfrak{R}^1-a_{12}\mathfrak{R}^2$, $a_{12}\mathfrak{R}^1+a_{11}\mathfrak{R}^2$, erhält man für $\hat{U}$, $\hat{V}$ eine Normalform

$$(28)\qquad \hat{U}_\alpha-\hat{V}_{\bar\alpha}-\hat{a}\hat{U}-\hat{b}\hat{V}-\hat{c}=0,\qquad \hat{U}_{\bar\alpha}+\hat{V}_\alpha-\hat{\hat{a}}\hat{U}-\hat{\hat{b}}\hat{V}-\hat{\hat{c}}=0.$$

Definition. *Wir nennen φ_1,φ_2 Feldfunktionen, wenn φ_1,φ_2 in $F+R$ stetig differenzierbar, in F zweimal stetig differenzierbar sind, in $F+R$ keine gemeinsame Nullstelle haben: $(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2>0$ und auf R willkürlich vorgegebene Randwerte $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ annehmen.*

Die Koeffizienten in (28) $\hat{a}\ldots\hat{c}$ sind in $F+R$ stetig, in F stetig differenzierbar, wenn die Koeffizienten in (1) die dortigen Voraussetzungen erfüllen und a_{11}, a_{12} Feldfunktionen sind. Diese Voraussetzungen sind etwas geringer als in § 1, reichen aber für die Überführung auf äquivalente Integralgleichungssysteme noch aus[5a), 7)].

Wir betrachten zu (1) das allgemeine Randwertproblem, wo $\mu_1(s)u+\mu_2(s)v=u_0(s)$ auf R vorgeschrieben wird. Dabei sind μ_1,μ_2,u_0 willkürlich vorgeschriebene zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit $(\mu_1(s))^2+(\mu_2(s))^2>0$ auf R.

Wir nehmen für das folgende immer an, daß zu μ_1,μ_2 Feldfunktionen φ_1,φ_2 existieren. Setzen wir mit (15) $a_{11}=\varphi_1-\frac{\varphi_2}{r}p$, $a_{12}=-\frac{\varphi_2}{r}$, so folgt mit (21), (26) unter Beachtung von $1=rq-p^2$

$$\begin{aligned}(29)\qquad \hat{U}&=\left(\varphi_1-\frac{\varphi_2}{r}p\right)U+\frac{\varphi_2}{r}V=\varphi_1u+\varphi_2v\\ \hat{V}&=(\varphi_1p-\varphi_2q)u+(\varphi_1r-\varphi_2p)v.\end{aligned}$$

Sind φ_1,φ_2 Feldfunktionen, so sind auch a_{11}, a_{12} solche mit den Randwerten $\mu_1-\frac{\mu_2}{r}p$, $-\frac{\mu_2}{r}$, denn es ist

$$(a_{11})^2+(a_{12})^2=\frac{1}{r}((\varphi_1)^2r-2\varphi_1\varphi_2p+(\varphi_2)^2q)>0\quad\text{in } F+R.$$

Es erhebt sich die Frage, wann solche Feldfunktionen vorhanden sind, denn von den allgemeinen Randwertproblemen sind uns nur solche zugänglich. Nach dem Kroneckerschen Satz und dessen Umkehrung sind solche Feldfunktionen dann und nur dann vorhanden, wenn das Vektorfeld $\{\mu_1(s),\mu_2(s)\}$ auf R von der Charakteristik Null ist, d.h.

wenn der Vektor $\{\mu_1, \mu_2\}$ bei einem Umlauf auf R die Gesamtdrehung Null erfährt[22]).

Wir wollen ein einfaches hinreichendes Kriterium angeben, wann solche Feldfunktionen sicher existieren.

Satz 10. *Genügen $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ den Voraussetzungen des allgemeinen Randwertproblems und ist wenigstens μ_1 oder μ_2 auf R ohne Vorzeichenwechsel im engeren Sinne [d.h.: Es ist wenigstens $|\mu_1(s)| > 0$ oder $|\mu_2(s)| > 0$], so existieren Feldfunktionen.*

Beweis. φ_1, φ_2 seien Lösungen der LAPLACEschen Gleichung $\Delta\varphi_1 = 0$, $\Delta\varphi_2 = 0$ mit den Randwerten $\varphi_1(s) = \mu_1(s)$, $\varphi_2(s) = \mu_2(s)$ auf R. Dann sind φ_1, φ_2 in $F + R$ stetig differenzierbar, in F zweimal stetig differenzierbar[23]). Ohne Einschränkung werde $\mu_1(s) \geq \varepsilon > 0$ auf R angenommen. Da eine Potentialfunktion ihr Maximum und Minimum auf R annimmt, folgt $\varphi_1 \geq \varepsilon > 0$ in $F + R$ und damit $(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 > 0$.

Nunmehr können alle Sätze des § 1, § 2 auch für das allgemeine Problem (1) mit der Randvorgabe $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ ausgesprochen werden. Wir übertragen nur Satz 2, da die anderen fast wörtlich erhalten bleiben. Es ist dabei der folgende Umstand zu beachten, auf den mich Herr W. HAACK hinwies. Um für (28) die Abschätzung (9) zu gewährleisten, muß noch gezeigt werden, daß in $F + R$ gilt: $|a_{11}|$, $|a_{12}| < \Phi$, $\left|\frac{\partial a_{11}}{\partial x^i}\right|$, $\left|\frac{\partial a_{12}}{\partial x^i}\right| < \Psi$. Dabei sind Φ, Ψ von F unabhängige Konstante. Ohne Einschränkung darf $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 = 1$ auf R angenommen werden. Das Vektorfeld $\{a_{11}, a_{12}\}$ ist auf R von der Charakteristik Null. Auf R werde $a_{11} = \cos\vartheta(s)$, $a_{12} = \sin\vartheta(s)$ gesetzt. $\vartheta(s)$ ist eine eindeutige, zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s. Bestimmt man $\alpha(x^1, x^2)$ aus $\Delta\alpha = 0$ und $\alpha = \vartheta(s)$ auf R, so sind Feldfunktionen $a_{11} = \cos\alpha$ $a_{12} = \sin\alpha$ explizit konstruiert. Überschreiten μ_1, μ_2 und ihre zwei ersten Ableitungen auf R dem absoluten Betrag nach gewisse von F, Φ, Ψ abhängige Höchstwerte nicht, was wir in Satz 9 voraussetzen wollen, so findet man sofort solche Abschätzungen für a_{11}, a_{12} und in bekannter Weise[24]) folgen für a_{11}, a_{12} die obigen Ungleichungen.

Satz 9. *Existieren zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen φ_1, φ_2, so hat das allgemeine Randwertproblem (1) mit $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ auf R und der zusätzlichen Normforderung*

$$\iint_F \{(\varphi_1 p - \varphi_2 q)\, u + (\varphi_1 r - \varphi_2 p)\, v\}\, k\, dx^1\, dx^2 = \gamma \tag{30}$$

genau ein Lösungssystem u, v. Dabei ist k eine beliebige Normierungsfunktion und γ eine gegebene reelle Zahl.

---

[22]) ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, Berlin 1935. Notwendig: S. 467—68, insbesondere für Vektorfelder S. 478—79; hinreichend: S. 499—500.

[23]) Siehe L. LICHTENSTEIN[9]), S. 243.

[24]) LICHTENSTEIN, L., Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rend. Circ. mat. Palermo 28, 1—40 (1909), S. 27.

Beweis. (1) kann auf (22) und mit den zu (29) angegebenen a_{11}, a_{12} nach (26) auf (28) umgeschrieben werden. Das allgemeine Randwertproblem wird für (28) gemäß (29) $\hat{U} = u_0$ auf R. Die Normforderung (30) wird für (28) nach (29) $\int\int \hat{V}\, k\, dx^1\, dx^2 = \int\int \hat{V}\, k_1 [\omega_1\, \omega_2]$ mit $k_1 = \frac{k}{\sqrt{D}}$ nach [20]). Nach den Entwicklungen von § 3 ist dieses Problem existenzmäßig vollständig gleich dem in Satz 2 gestellten.

Ganz andere Verhältnisse liegen bei der Nichtexistenz von Feldfunktionen vor. Wir betrachten das Gebiet $x^2 + y^2 \leq 1$ und stellen das Randwertproblem: $U_x - V_y = 0$, $U_y + V_x = 0$ mit der Randvorgabe $\sin s \cdot U + \cos s \cdot V = u_0$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ mit der Bogenlänge s. Man zeigt leicht, daß Feldfunktionen sicher nicht existieren [2]) S. 205], was sich aber sogleich auf andere Weise ergeben wird. Seien nämlich zu $\mu_1(s) = \sin s$, $\mu_2(s) = \cos s$ Feldfunktionen vorhanden, so hätte die homogene Randwertaufgabe ($u_0 = 0$) nach Satz 4 von $U = 0$, $V = 0$ verschiedene Lösungen und die inhomogene Randwertaufgabe hätte nach Satz 5 oder 6 für jedes u_0 Lösungen. Beide Aussagen sind nicht richtig. Setzt man $U = \varphi_y$, $V = \varphi_x$, so geht obige Randwertaufgabe in die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie über: $\Delta\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -u_0(s)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Daraus erschließt man leicht, daß die homogene Aufgabe nur die Lösung $U = 0$, $V = 0$ besitzt und die inhomogene nur dann Lösungen besitzt, wenn $\oint\limits_{\mathfrak{R}} u_0\, ds = 0$ ist. Damit ist gezeigt, daß Feldfunktionen φ_1, φ_2 bei der vorgelegten Aufgabe sicher nicht vorhanden sind.

Wird zu dem allgemeinen elliptischen System (1) die Randvorgabe $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ gestellt und existieren zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen φ_1, φ_2, so nennen wir diese Problemstellung ein allgemeines Randwertproblem erster Art.

Für den Fall, daß zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen nicht existieren, sei auf zwei demnächst erscheinende Arbeiten [24a]) von Herrn W. Haack verwiesen.

§ 4.

Das allgemeine Randwert- und Randwert-Normproblem im großen.

Nach den Entwicklungen des § 3 dürfen wir das erste Randwertproblem eines allgemeinen linearen elliptischen Systems in der Form (2) annehmen mit der Randvorgabe $U = U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$. Unseren bisherigen Sätzen lag für diese Problemstellung die durch (9) gegebene Gebietseinschränkung zugrunde.

Betrachten wir das Randwertproblem (2) ohne Gebietseinschränkung für $\mathfrak{F}$ oder, wie wir sagen wollen, im großen, so treten neue

[24a]) Zusatz bei der Korrektur: Haack, W., Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Nachr. **7**, 1—30 (1952). Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. **8**, 123—132 (1952).

Schwierigkeiten auf, da der zentrale Satz 2 dann nicht richtig bleibt. Wäre nämlich Satz 2 für beliebige Gebiete $\mathfrak{F}$ richtig, so müßte es auch Satz 3 sein. Wir zeigen, daß dies nicht der Fall ist.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{R}$ der Kreis $x^2+y^2=r^2$ mit Radius r und $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ das Gebiet, welches aus allen Punkten mit $x^2+y^2\leq r^2$ besteht. Betrachtet wird das System

$$U_x - V_y = \lambda\,(2\,y\,U + 2\,x\,V)$$
$$U_y + V_x = \lambda\,(-2\,x\,U + 2\,y\,V)$$

mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. λ ist eine zunächst willkürliche reelle Zahl. Lösungen sind:

$$U = \varkappa \sin\lambda\,(x^2+y^2-r^2), \qquad V = \varkappa\cos\lambda\,(x^2+y^2-r^2), \tag{31}$$

mit $\varkappa$ einer willkürlichen Konstanten[25]). Hat λ einen der Werte

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{r^2} \quad \text{mit} \quad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm\cdots, \tag{32}$$

so ist die Normbedingung $\iint V\,dx\,dy=0$ erfüllt, denn es ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}} V\,dx\,dy = \varkappa\,\pi\,\frac{\sin\lambda\,r^2}{\lambda}. \tag{5}$$

Man erkennt sofort, daß für die Gültigkeit des Satzes 2 (mit $k=1$) das Gebiet so eingeschränkt werden muß, daß $r<\sqrt{\left|\frac{\pi}{\lambda}\right|}$ ist.

Wir können uns daher nur auf die Ergebnisse des § 1 und auf einen Satz aus [3]) stützen, den wir hier nochmals formulieren.

Satz 11. *Jedes homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *hat gewiß ein Lösungssystem* U_H, V_H, *wobei* U_H, V_H *in* $\mathfrak{F}$ *nicht beide identisch verschwinden und damit sicher die unendlich vielen Lösungen* $U=\varkappa\,U_H$, $V=\varkappa\,V_H$. *Dabei ist* $\varkappa$ *eine willkürliche Konstante.*

Satz 11 zeigt, daß Eigenwertaufgaben in der üblichen Form hier nicht auftreten können. Ein allgemeines Eigenwertproblem zu (10) hätte doch die Form

$$U_x - V_y + A_1\,U + A_2\,V = \lambda\,(B_1\,U + B_2\,V)$$
$$U_y + V_x + \bar{A}_1\,U + \bar{A}_2\,V = \lambda\,(\bar{B}_1\,U + \bar{B}_2\,V) \tag{33}$$

mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. $A_1 \ldots \bar{B}_2$ sind dabei Funktionen von x, y. In bekannter Sprechweise sagt dann Satz 11 aus, daß jedes System (33) jede reelle Zahl λ als Eigenwert besitzen würde[26]).

[25]) Für geeignet eingeschränktes Gebiet $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 6 die Lösungsmenge (31) die Gesamtheit.

[26]) Sinnvoller scheint es dagegen zu sein, die Zahlen λ_k (32) als Eigenwerte anzusprechen, da bei geeignet eingeschränktem Gebiet $\mathfrak{F}$ nach dieser Formulierung Eigenwerte nicht auftreten (Satz 3), ein Vorkommnis, welches in Analogie zur Eigenwerttheorie bei elliptischen Differentialgleichungen steht.

Nach Satz 8 gibt es homogene Randwertprobleme (10) mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$ derart, daß die Lösungsgesamtheit aus $U=0$, V besteht. Für uns erweist sich hier die entsprechende Fragestellung für V von Wichtigkeit.

Satz 12. *Es gibt kein System* (10) *mit der Randvorgabe* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *welches als Lösungsgesamtheit* U, $V=0$ *besitzt.*

Beweis. Angenommen es gebe ein solches System, so müßte U eine Lösung des Systems

$$U_x = A\,U, \qquad U_y = \bar{A}\,U \tag{34}$$

sein, mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. Das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ kann sicher in ein Rechteck eingeschlossen werden, so daß für alle $(x, y) < \mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ die folgenden Ungleichungen gelten: $m \leq x \leq M$, $n \leq y \leq N$, mit m, M, n, N geeigneten Zahlen. Wir betrachten die erste Gleichung (34) auf der Geraden $y=y_0$ mit $n<y_0<N$. Diese Gerade wird vom Rand $\mathfrak{R}$ in endlich oder unendlich vielen Punkten geschnitten. Für alle Punkte (x, y_0), die auf dieser Geraden liegen, wird $U_x = A(x, y_0)\,U$ eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Lösung

$$U(x, y_0) = \varkappa\, e^{\int^x A(\xi, y_0)\,d\xi}.$$

Ist (x, y_0) ein Schnittpunkt von $y=y_0$ mit $\mathfrak{R}$, so folgt, wegen der Vorgabe $U=0$ auf $\mathfrak{R}$, daß $U=0$ ist für alle Punkte $(x, y_0) < \mathfrak{F}+\mathfrak{R}$. Diese Schlußweise wird durchgeführt für alle y_0 und in entsprechender Weise für die zweite Gleichung in (34). Man erhält sofort $U=0$ in $\mathfrak{F}$. Damit ist ein System aufgefunden, welches nur die Lösung $U=0$, $V=0$ besitzt und dies ist ein Widerspruch zu Satz 11.

Jetzt machen wir für das Weitere die

Voraussetzung. *Es habe das homogene System* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *als Lösungsgesamtheit* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$. *Dabei ist* U_H, V_H *irgendein Lösungssystem von* (6) *mit* $U_H=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *wobei* U_H, V_H *nicht beide in* $\mathfrak{F}$ *identisch verschwinden. (*$\varkappa$ *ist eine willkürliche Konstante.)*

Sicher ist diese Lösungsmenge nach Satz 11 immer vorhanden. Für geeignet eingeschränktes Gebiet $\mathfrak{F}$ ist diese Lösungsmenge nach Satz 6 gleich der Lösungsgesamtheit.

Satz 13. *Unter obiger Voraussetzung gibt es stets eine geeignete Normierungsfunktion* k[27]) *derart, daß das Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der zusätzlichen Normforderung* $\iint_{\mathfrak{F}} V\,k\,dx\,dy=0$ *als einzige Lösung* $U=0$, $V=0$ *in* $\mathfrak{F}$ *besitzt.*

Beweis. Sei die Lösungsgesamtheit U, V des Randwertproblems gegeben durch $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$, wie dies nach Voraussetzung möglich ist.

[27]) Wir nennen $k=k(x, y)$ eine Normierungsfunktion, wenn k in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetig und wesentlich positiv ist und in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar ist. Vgl. § 1.

1. Der Fall $V_H = 0$ in $\mathfrak{F}$ kann nach Satz 12 nicht eintreten.
2. Es sei $V_H \geq 0$ in $\mathfrak{F}$. Dann liefert die Normforderung

$$\iint V\,k\,dx\,dy = \varkappa \iint V_H\,k\,dx\,dy = 0.$$

Daraus folgt $\varkappa = 0$, da doch $k > 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ und daher $U = 0$, $V = 0$ in $\mathfrak{F}$. Analog bei $V_H \leq 0$ in $\mathfrak{F}$.

3. Es verbleibt nur der Fall, daß V sowohl positiver als auch negativer Werte fähig ist. Es ist $V_H(x, y)$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetig, daher gibt es gewiß einen inneren Punkt $(x_0, y_0) < \mathfrak{F}$, wo V_H positiv ist. Es sei $V_H(x_0, y_0) = 2M$. Wegen der Stetigkeit gibt es einen Kreis K_δ vom Radius δ um (x_0, y_0): $x - x_0 = \delta \cos\varphi$, $y - y_0 = \delta \sin\varphi$ derart, daß alle Punkte (x, y) der abgeschlossenen Kreisfläche $\mathfrak{F}_\delta$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2$ zu $\mathfrak{F}$ gehören und daß $V_H(x, y) > M$ für alle $(x, y) < \mathfrak{F}_\delta$. Der größte Wert des absoluten Betrages von V_H werde in $(\xi_0, \eta_0) < \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ angenommen:

$$|V_H(\xi_0, \eta_0)| = N.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta$ die Menge aller Punkte, die zu $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ aber nicht zu $\mathfrak{F}_\delta$ gehören. Aus $\iint V\,k\,dx\,dy = \varkappa \iint_{\mathfrak{F}} V_H\,k\,dx\,dy = 0$ folgt:

$$\varkappa \iint_{\mathfrak{F}_\delta} V_H\,k\,dx\,dy = -\varkappa \iint_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} V_H\,k\,dx\,dy. \tag{35}$$

Mit leichten Abschätzungen folgt aus (35)

$$|\varkappa|\,M \iint_{\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy \leq |\varkappa|\,N \iint_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy. \tag{36}$$

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß eine Normierungsfunktion k so gefunden werden kann, daß

$$\iint_{\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy > 1, \qquad \frac{N}{M} \iint_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy < 1$$

ist. Aus (36) folgt $|\varkappa| < |\varkappa|$. Dieser Widerspruch kann nur durch $\varkappa = 0$ behoben werden. Damit ist Satz 13 bewiesen.

Hilfssatz. *Um den Mittelpunkt (x_0, y_0) des Kreises K_δ werde ein Kreis K_η mit dem Radius η gelegt derart, daß das Gebiet $\mathfrak{F}_\eta$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \eta^2$ das Gebiet $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ ganz im Innern enthält (Bild). Die Funktion*

$$k(x, y) = \gamma \cdot e^{\frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \beta^2}}$$

mit $\gamma = \dfrac{M}{(2\eta)^4\,N\,e^{1/\delta^2}}$ *ist eine für $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ zulässige Normierungsfunktion. Verfügt man über die Zahl β^2 mit $0 < \beta^2 < \delta^2$ geeignet so ist*

$$\text{a)}\ \frac{N}{M} \iint_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy < 1, \qquad \text{b)}\ \iint_{\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy > 1.$$

Beweis. Es ist k eine überall positive, stetig differenzierbare Funktion von x, y, also gewiß eine Normierungsfunktion für $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$[27]). Für die folgenden Abschätzungen setzen wir $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. Mit $\mathfrak{F}_\eta-\mathfrak{F}_\delta$ wird das Gebiet bezeichnet, dessen Punkte die Ungleichung $\delta^2 \leq (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \eta^2$ befriedigen. In den Integralen wird die Substitution $\frac{1}{r^2+\beta^2}=z$ mit $r\,dr=-\frac{dz}{2z^2}$ benutzt.

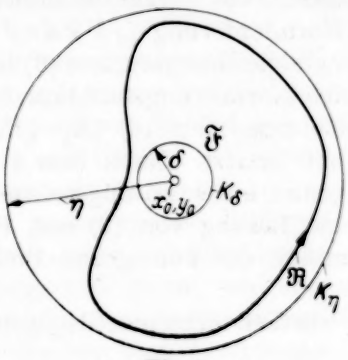


Fig. 1.

a) $$\frac{N}{M}\iint\limits_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy < \frac{N}{M}\iint\limits_{\mathfrak{F}_\eta-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy = \gamma\,\frac{N}{M}\int_0^{2\pi}\int_\delta^\eta e^{\frac{1}{r^2+\beta^2}}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \pi\gamma\,\frac{N}{M}\int_{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}} \frac{e^z}{z^2}\,dz < \pi\gamma\,\frac{N}{M}\,(\eta^2+\beta^2)^2\int_{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}} e^z\,dz$$

$$= \pi\gamma\,\frac{N}{M}\,(\eta^2+\beta^2)^2\left(e^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}-e^{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}\right) < \pi\gamma\,\frac{N}{M}\,(2\eta^2)^2\,e^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}} <$$

$$< \pi\gamma\,\frac{N}{M}\,(2\eta^2)^2\,e^{\frac{1}{\delta^2}} = \frac{\pi}{4} < 1$$

wegen der Bedeutung von γ.

b) $$\iint\limits_{\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy = \gamma\int_0^{2\pi}\int_0^\delta e^{\frac{1}{r^2+\beta^2}}\,r\,dr\,d\varphi = \pi\gamma\int_{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\beta^2}} \frac{e^z}{z^2}\,dz >$$

$$> \pi\gamma\,\beta^4\int_{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\beta^2}} e^z\,dz > \pi\gamma\,\beta^4\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}-e^{\frac{1}{\delta^2}}\right).$$

Nun sind γ, δ vorgegebene Zahlen, die von β unabhängig sind. Es ist $\lim\limits_{\beta\to 0}\beta^4(e^{1/\beta^2}-e^{1/\delta^2})=\infty$. Daher kann ein β mit $0<\beta^2<\delta^2$ so gefunden werden, daß obiger Ausdruck größer als 1 wird, womit alles bewiesen ist.

Satz 14. *Hat das homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *als Lösungsgesamtheit* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$, *so hat das inhomogene Randwertproblem* (2) *mit* $U=U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *stets Lösungen. Ist* U_I, V_I *irgendeine Lösung von* (2) *mit* $U_I=U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *so ist* $U=\varkappa U_H+U_I$, $V=\varkappa V_H+V_I$ *die Lösungsgesamtheit des Randwertproblems* (2).

Beweis. Man sieht leicht, daß es genügt, die Existenz irgendeiner Lösung von (2) zu zeigen. Wir betrachten daher (2) mit $U=U_0$ auf $\mathfrak{R}$ und der zusätzlichen Normforderung $\iint V\,k\,dx\,dy=0$. Dieses Problem ist äquivalent dem Integralgleichungssystem (6) mit $\gamma=0$. Nach Satz 13 ist es stets möglich, eine Normierungsfunktion k so zu finden, daß das homogene Integralgleichungssystem (6) ($K_1=K_2=0$, $L_1=L_2=0$) nur die Lösung $U=0$, $V=0$ besitzt. Nach Satz 1 aus [3]) erschließt man daraus die Existenz genau eines Lösungspaares von (6). Wegen der Äquivalenz ist dies eine Lösung von (2) mit $U=U_0$ auf $\mathfrak{R}$. Addiert man die Lösungsgesamtheit des homogenen Problems hinzu, so erhält man die Behauptung.

Der Satz 7 bleibt wörtlich erhalten, dagegen muß Satz 2 jetzt so formuliert werden.

Satz 15. γ *sei eine beliebige reelle Zahl. Es gibt stets eine geeignet gewählte Normierungsfunktion* k *so, daß das Randwertproblem* (2) *mit* $U=U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der Normforderung* $\iint V\,k\,dx\,dy=\gamma$ *genau ein Lösungssystem* U, V *besitzt.* k *ist dabei von* U_0, γ, C, C *unabhängig.*

Nach § 3 können die vorstehenden Sätze leicht auf das allgemeine Randwertproblem (1) mit der Randvorgabe $\mu_1(s)\,u+\mu_2(s)\,v=u_0(s)$ auf R übertragen werden. Für das Gebiet F bleibt beim allgemeinen Fall (1) nur die Einschränkung bestehen, die durch die Möglichkeit der Koordinatentransformation (23) gegeben ist.

(Eingegangen am 20. November 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 409—442 (1952).

Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare.

Von

Martin Barner in Freiburg i. Br.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit Kurvenpaaren als einheitlichen geometrischen Gebilden. Nachdem zunächst die Ableitungsgleichungen aufgestellt sind, gewinnt man die Hauptsätze, wobei auf das Verhalten der Größen bei Parametertransformation und den zulässigen Umnormungen zu achten ist.

Im Mittelpunkt der geometrischen Interpretation der aufgestellten „FRENETschen Formeln" stehen in einem ersten Abschnitt berührende Kurven dritter Ordnung und damit verbundene Kegel, Quadriken, Korrelationen und Projektivitäten, in einem zweiten Abschnitt weiterhin Figuren, die auch mit der von dem Kurvenpaar erzeugten Regelfläche verknüpft sind. Auf die Theorie der Regelflächen wird dabei nicht eingegangen.

Um die Symmetrie in bezug auf beide Kurven des Paares zu wahren, hat man meist nicht eindeutig bestimmte, sondern ein- und mehrparametrige Gesamtheiten von Begleitfiguren zu betrachten. Diese Freiheit erweist sich dann aber als vorteilhaft. Man kommt so leicht zur Deutung eines vollen Invariantensystems durch Doppelverhältnisse. Außerdem sind die Figuren in vielfacher Weise untereinander verknüpft, was zu geometrischen Sätzen Anlaß gibt.

Diese können nicht alle explizit ausgesprochen werden. In einer Reihe von Bemerkungen, die beiden Abschnitten angefügt sind, werden die wichtigsten Eigenschaften erwähnt und die Bedingungen angegeben. Die Einfachheit der auftretenden Ausdrücke erlaubt ihren — und damit auch den geometrischen — Zusammenhang zu überblicken, auch wo darauf nicht besonders hingewiesen werden konnte.

§ 1.

Begleittetraeder und Ableitungsgleichungen.

Zwei punktweise aufeinander bezogene Kurven des dreidimensionalen projektiven Raumes bezeichnen wir als ein *Kurvenpaar*. Es sei ein gemeinsamer Parameter t eingeführt, so daß zu dem Punkt $R(t)$ der einen Kurve C der Punkt $\bar{R}(t)$ der andern Kurve $\bar{C}$ gehört.

Dabei werden die Stellen eines Kurvenpaares von der Untersuchung ausgeschlossen, in denen die Schmiegebene an die eine Kurve den zugeordneten Punkt der anderen enthält und in denen sich die Tangenten in zugeordneten Punkten treffen.

Es sei dann $S(t)$ der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve C im Punkte $R(t)$ mit der Schmiegebene an die Kurve $\bar{C}$ im Punkte $\bar{R}(t)$; entsprechend sei auch $\bar{S}(t)$ definiert. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen sind an jeder Stelle des Kurvenpaares die Punkte

$$R(t), \quad S(t), \quad \bar{S}(t), \quad \bar{R}(t) \tag{1.1}$$

linear unabhängig, sie bilden ein Tetraeder, das wir als *Begleittetraeder* benützen.

Wir beziehen das Kurvenpaar und die damit verbundenen Punkte auf ein projektives Koordinatensystem. Die Koordinatenvektoren der Punkte (1) bezeichnen wir mit gleichnamigen gotischen Buchstaben:

$$\mathfrak{r}(t), \quad \mathfrak{s}(t), \quad \bar{\mathfrak{s}}(t), \quad \bar{\mathfrak{r}}(t). \tag{1.2}$$

Die Normierung dieser Vektoren denken wir uns so eingerichtet, daß die Punkte $\mathfrak{r}', \mathfrak{s}', \bar{\mathfrak{s}}', \bar{\mathfrak{r}}'$ jeweils in der den Punkten $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}$ gegenüberliegenden Seitenebene des Begleittetraeders liegen[1]). Dann lauten die *Ableitungsgleichungen:*

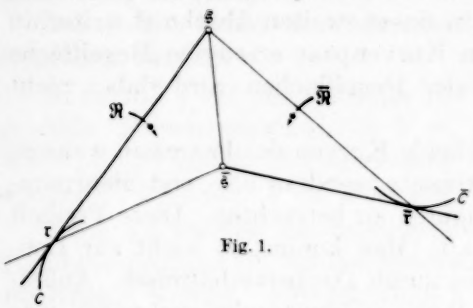


Fig. 1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}' &= a\,\mathfrak{s} \\ \mathfrak{s}' &= \bar{A}\,\mathfrak{r} + b\,\bar{\mathfrak{s}} \\ \bar{\mathfrak{s}}' &= A\,\bar{\mathfrak{r}} + \bar{b}\,\mathfrak{s} \\ \bar{\mathfrak{r}}' &= \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Das Studium von Kurvenpaaren als einheitlichen geometrischen Gebilden läuft auf eine Diskussion dieser „FRENETschen Gleichungen" hinaus. Diese Gleichungen sind auch dann sinnvoll, wenn eine der Kurven in einen Punkt oder in eine Gerade entartet. Man hat dann aber eine Gerade als „Tangente" und eine Ebene durch diese Gerade als „Schmiegebene" zusätzlich zu definieren. Diese besonderen Kurvenpaare werden gekennzeichnet durch:

$a = 0$: $\mathfrak{r}$ ist ein fester Punkt,

$b = 0$: $\mathfrak{r}$ durchläuft eine Gerade,

$A = 0$: $\mathfrak{r}$ beschreibt eine ebene Kurve.

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, wollen wir im folgenden die Koeffizienten

$$a, A, b, \bar{b}, \bar{A}, \bar{a}$$

[1]) Vgl. G. BOL, Projektive Differentialgeometrie, Teil 1, § 58, Aufgabe 11 und Aufgabe 13, S. 238. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1950.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Dr. G. BOL durchgeführt. Benützt werden die dort dargestellten Methoden und Bezeichnungsweisen. Wir zitieren fortan kurz: G. BOL, P. D.

von Null verschieden voraussetzen, d.h. wir nehmen an, daß unser Kurvenpaar aus zwei nichtentarteten (gewundenen) Raumkurven besteht.

Der gemachte Ansatz bringt es mit sich, daß die Vektoren (2) bis auf konstante Faktoren fest normiert sind. Bei der Umnormung

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}} &= k_1 \mathfrak{r} \\ \hat{\mathfrak{s}} &= k_2 \mathfrak{s} \\ \hat{\bar{\mathfrak{s}}} &= \bar{k}_2 \bar{\mathfrak{s}} \\ \hat{\bar{\mathfrak{r}}} &= \bar{k}_1 \bar{\mathfrak{r}} \end{aligned} \qquad k_i, \bar{k}_i = \text{const} \tag{1.4}$$

transformieren sich die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen nach (3) wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{k_1}{k_2} a, & \hat{\bar{a}} &= \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \bar{a}, \\ \hat{A} &= \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} A, & \hat{\bar{A}} &= \frac{k_2}{k_1} \bar{A}, \\ \hat{b} &= \frac{k_2}{\bar{k}_2} b, & \hat{\bar{b}} &= \frac{\bar{k}_2}{k_2} \bar{b}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Größen

$$b\bar{b}, \qquad a\bar{A}, \qquad \bar{a}A \tag{1.6}$$

behalten ihren Wert bei einer solchen Umnormung bei.

Gegenüber Parametertransformation sind die Tetraedereckpunkte (1) auf Grund ihrer geometrischen Definition invariant. Die Koeffizienten in (3) sind also Halbinvariante[2]) vom Gewicht 1. Demnach sind — dies ist für das Folgende von Wichtigkeit —

$$\frac{b\bar{b}}{a\bar{A}}, \qquad \frac{b\bar{b}}{\bar{a}A}, \qquad \frac{a\bar{A}}{\bar{a}A} \tag{1.7}$$

invariant sowohl gegenüber Parametertransformationen, als auch gegen Umnormierungen der Art (4).

Der Existenzsatz für lineare Differentialgleichungssysteme liefert uns — angewandt auf die Ableitungsgleichungen (3) — wie üblich den *Hauptsatz: Zwei Kurvenpaare*

$$\mathfrak{r}(t), \qquad \bar{\mathfrak{r}}(t); \qquad \tilde{\mathfrak{r}}(t), \qquad \tilde{\bar{\mathfrak{r}}}(t)$$

können dann und nur dann projektiv so aufeinander abgebildet werden, daß sich Punkte mit gleichen Parameterwerten entsprechen, wenn die Funktionen

$$a\bar{A}, \qquad \bar{a}A, \qquad b\bar{b}, \qquad \left(\ln \frac{b}{a}\right)', \qquad \left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)' \tag{1.8}$$

für beide Kurvenpaare übereinstimmen. Denn sind die Funktionen (8) einander gleich, so auch die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen

[2]) G. Bol, P. D. § 1, S. 6.

(3) bis auf drei Konstanten, denen nach (5) in die Rechnung einzugehen erlaubt ist.

Als invarianter Parameter bietet sich

$$t^* = \int \sqrt{b\bar{b}}\, dt$$

an. Ist doch $b\bar{b}$ eine in bezug auf die Kurven des Paares symmetrische, nicht verschwindende Halbinvariante (vom Gewicht 2), die ihren Wert bei Umnormungen [s. (6)] nicht ändert. Bezogen auf t^* wird

$$b(t^*) \cdot \bar{b}(t^*) = 1$$

und es gilt: *Zwei Kurvenpaare*

$$\mathfrak{r}(t^*), \qquad \bar{\mathfrak{r}}(t^*); \qquad \tilde{\mathfrak{r}}(t^*), \qquad \bar{\tilde{\mathfrak{r}}}(t^*)$$

lassen sich dann und nur dann projektiv aufeinander abbilden, wenn die Größen

$$a\,\bar{A}, \qquad \bar{a}\,A, \qquad \left(\ln \frac{b}{a}\right)', \qquad \left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)'$$

als Funktionen des invarianten Parameters für beide Kurvenpaare übereinstimmen.

Die Seitenebenen des Begleittetraeders bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}), & \bar{\mathfrak{R}} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}) \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}), & \bar{\mathfrak{S}} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}), \end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei

$$D = (\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}) \tag{1.10}$$

eine Konstante ist; denn aus (3) folgt unmittelbar: $D' = 0$.

Die Bezeichnungsweise ist so gewählt, daß duale Größen einander entsprechen. So ist $\mathfrak{R}$ die Schmiegebene von $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{s}$ ist der gemeinsame Punkt der Tangente von $\mathfrak{r}$ und der Schmiegebene von $\bar{\mathfrak{r}}$; entsprechend ist $\mathfrak{S}$ die durch die Tangente von $\mathfrak{r}$ und durch $\bar{\mathfrak{r}}$ bestimmte Ebene (vgl. Fig. 1).

Es gilt die Multiplikationstabelle:

(1.11)

	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{s}$	$\bar{\mathfrak{s}}$	$\bar{\mathfrak{r}}$
$\mathfrak{R}$	0	0	0	-1
$\mathfrak{S}$	0	0	1	0
$\bar{\mathfrak{S}}$	0	-1	0	0
$\bar{\mathfrak{R}}$	1	0	0	0

Aus den Definitionsgleichungen (9) findet man mit Hilfe von (3) die Ableitungsgleichungen für die Ebenenvektoren:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}' &= A\,\mathfrak{S} \\
\mathfrak{S}' &= \bar{a}\,\mathfrak{R} + b\,\overline{\mathfrak{S}} \\
\overline{\mathfrak{S}}' &= a\,\overline{\mathfrak{R}} + \bar{b}\,\mathfrak{S} \\
\overline{\mathfrak{R}}' &= \bar{A}\,\overline{\mathfrak{S}}.
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

Hieraus folgt: Aus jeder Gleichung, gültig für Punktkoordinaten, erhält man durch Ersetzen nach dem Schema

$$
\begin{pmatrix} \mathfrak{r}, & \mathfrak{s}, & \overline{\mathfrak{s}}, & \overline{\mathfrak{r}}, & a, & A, & b, & \bar{b}, & \bar{A}, & \bar{a} \\ \mathfrak{R}, & \mathfrak{S}, & \overline{\mathfrak{S}}, & \overline{\mathfrak{R}}, & A, & a, & b, & \bar{b}, & \bar{a}, & \bar{A} \end{pmatrix} \tag{1.13}
$$

die entsprechende, gültig für Ebenenkoordinaten.

Der Übergang von einer Kurve zur andern innerhalb des Paares geschieht durch Ersetzen der überstrichenen Größen durch unüberstrichene und umgekehrt. Auch in Zukunft soll die Bezeichnungsweise immer in dieser Art eingerichtet werden.

Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ und entsprechend jede Ebene $\mathfrak{P}$ des Raumes läßt sich in der Form

$$\mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{r} + p_1\,\mathfrak{s} + p_2\,\overline{\mathfrak{s}} + p_3\,\overline{\mathfrak{r}} \tag{1.14}$$

bzw.

$$\mathfrak{P} = a_0\,\mathfrak{R} + a_1\,\mathfrak{S} + a_2\,\overline{\mathfrak{S}} + a_3\,\overline{\mathfrak{R}} \tag{1.15}$$

darstellen; die p_i heißen *lokale Punkt-*, die a_i *lokale Ebenenkoordinaten* bezüglich des Begleittetraeders.

Die *Inzidenzbedingung* für einen Punkt $\mathfrak{p}$ und eine Ebene $\mathfrak{P}$ erhält nach der Multiplikationstabelle (1.11) in lokalen Koordinaten die Gestalt:

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{p} \equiv -a_0\,p_3 + a_1\,p_2 - a_2\,p_1 + a_3\,p_0 = 0^{3}). \tag{1.16}$$

Hieraus folgt insbesondere, daß die Fläche zweiter Klasse

$$\langle \mathfrak{P}, \mathfrak{P} \rangle \equiv \sum_{i,k=0}^{3} A_{ik}\,a_i\,a_k = 0 \qquad (A_{ik} = A_{ki}) \tag{1.17}$$

dann und nur dann Tangentenebenenmannigfaltigkeit der Fläche zweiter Ordnung

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\,p_i\,p_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1.18}$$

---

[3]) Dieser Ausdruck lehrt auch, daß beim Übergang von Punkt- zu Ebenenkoordinaten in Skalarprodukten die Vorzeichen zu wechseln sind.

ist, wenn die auftretenden Matrizen die Bedingung erfüllen:

$$(1.19)\qquad \begin{pmatrix} -a_{33} & a_{32} & -a_{31} & a_{30} \\ a_{23} & -a_{22} & a_{21} & -a_{20} \\ -a_{13} & a_{12} & -a_{11} & a_{10} \\ a_{03} & -a_{02} & a_{01} & -a_{00} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \Delta E,$$

wobei Δ ein verfügbarer Faktor ist und E die Einheitsmatrix darstellt.

Ein Punkt $\mathfrak{p}$ verhält sich stationär, wenn $\mathfrak{p}' - \varrho\,\mathfrak{p} = 0$. Hieraus gewinnt man mit Hilfe von (3) die *Stationaritätsbedingung:*

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} -p_0' + \varrho\, p_0 &= \bar{A}\, p_1 \\ -p_1' + \varrho\, p_1 &= a\, p_0 + \bar{b}\, p_2 \\ -p_2' + \varrho\, p_2 &= \bar{a}\, p_3 + b\, p_1 \\ -p_3' + \varrho\, p_3 &= A\, p_2. \end{aligned}$$

Man kann die lokalen Koordinaten etwa der Kurve $\mathfrak{r}$ in der Umgebung einer festen Stelle durch Reihen darstellen. Diese *kanonischen Reihen* folgen aus der Taylorentwicklung mit Hilfe von (3) zu:

$$(1.21)\qquad \begin{aligned} p_0 &= 1 \quad + a\,\bar{A}\,\frac{t^2}{2!} + \frac{(a^2 A)'}{a}\,\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_1 &= a\,t + a'\,\frac{t^2}{2!} + \{a'' + a^2 A + a\,b\,\bar{b}\}\,\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_2 &= \quad a\,b\,\frac{t^2}{2!} + \frac{(a^2 b)'}{a}\,\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_3 &= \quad\quad a\,A\,b\,\frac{t^3}{3!} + \frac{(a^3 A\,b^2)'}{a^2 b}\,\frac{t^4}{4!} + \cdots. \end{aligned}$$

Von Wichtigkeit sind für uns insbesondere die Entwicklungen, die aus (21) folgen:

$$(1.22)\qquad \begin{aligned} p_0\,p_2 - \alpha\,p_1^2 &= a\,\{b - 2\alpha\,a\}\,\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{a}\,\{(a^2 b)' - 6\alpha\,a^2 a'\}\,\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_0\,p_3 - \gamma\,p_1\,p_2 &= a\,b\,\{A - 3\gamma\,a\}\,\frac{t^3}{3!} + \\ &\quad + \frac{1}{a^5 b}\,\{(a^3 A\,b^2)'\,a^3 - 2\gamma\,(a^7 b^2)'\}\,\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ p_1\,p_3 - \bar{\alpha}\,p_2^2 &= 2a^2 b\,\{2A - 3\bar{\alpha}\,b\}\,\frac{t^4}{4!} + \\ &\quad + \frac{5}{a^3 b}\,\{(a^5 A\,b^2)' - 4\,\bar{\alpha}\,a^3 b^2\,(a^2 b)'\}\,\frac{t^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

§ 2.

Berühr-C_3, Berührquadriken, Berührkorrelationen und Projektivitäten.

In diesem Abschnitt sprechen wir von Figuren, die lokal mit dem Kurvenpaar verknüpft sind, d.h. von berührenden Kurven dritter Ordnung, Kegeln, Kegelschnitten und Quadriken. Beginnen wir mit den Kurven dritter Ordnung.

Berühr-C_3 nennen wir eine Kurve dritter Ordnung, die mit jeder Kurve des Paares an der betrachteten Stelle Punkt, Tangente und Schmiegebene gemeinsam hat. In lokalen Koordinaten läßt sich eine solche C_3 darstellen in der Form[4]):

$$\begin{aligned} p_0 &= c_0 \\ p_1 &= c_1 s \\ p_2 &= c_2 s^2 \\ p_3 &= c_3 s^3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diese Parameterdarstellung der C_3 ist dadurch ausgezeichnet, daß für $s=0$ bzw. $s=\infty$ die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ selbst erzielt werden — einen solchen Parameter nennen wir *speziellen projektiven Parameter*. Dieser gestattet nur noch die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen

$$s^* = \sigma s \qquad \sigma \neq 0, \text{ fest.} \tag{2.2}$$

Verfügen wir in (1) über den Proportionalitätsfaktor und in willkürlicher Weise — der einfacheren Rechnung wegen — auch über den speziellen projektiven Parameter, so gilt: *Jede Berühr-C_3 besitzt eine Parameterdarstellung*

$$\mathfrak{y}(s) = \alpha\,\mathfrak{r} + s\,\mathfrak{s} + s^2\,\bar{\mathfrak{s}} + \bar{\alpha}\,s^3\,\bar{\mathfrak{r}}; \tag{2.3}$$

mittels (2) *führt man den allgemeinsten speziellen projektiven Parameter auf der C_3 ein.*

Dual hierzu — die Berühr-C_3 bilden ihrer Definition nach eine in sich duale Gesamtheit[5]) — kann man diese beschreiben durch

$$\mathfrak{Y}(s) = \beta\,\mathfrak{R} + s\,\mathfrak{S} + s^2\,\mathfrak{S} + \bar{\beta}\,s^3\,\bar{\mathfrak{R}}. \tag{2.4}$$

(4) sind die Schmiegebenen von (3), (3) die Kehlpunkte von (4), wobei die Beziehungen bestehen

$$3\alpha\,\bar{\beta} = 3\bar{\alpha}\,\beta = 1. \tag{2.5}$$

Eine Berühr-C_3 liegt auf den quadratischen Flächen

$$\begin{aligned} k &\equiv p_0\,p_2 - \alpha\,p_1^2 = 0 \\ h &\equiv p_0\,p_3 - \gamma\,p_1\,p_2 = 0 \qquad \text{mit } \gamma = \alpha\,\bar{\alpha}. \\ \bar{k} &\equiv p_1\,p_3 - \bar{\alpha}\,p_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Entwicklungen (1.22) zeigen, daß jede dieser Flächen jede Kurve des Paares dann und nur dann dreipunktig berührt, wenn

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\bar{b}}{2\bar{a}}. \tag{2.7}$$

(7) *kennzeichnet die 3-Punkte-C_3.*

[5]) Vgl. auch G. Bol, P. D. § 21, S. 84.
[4]) G. Bol, P. D. § 22, S. 87.

Dual hierzu:

$$\beta = \frac{b}{2A}, \qquad \bar{\beta} = \frac{\bar{b}}{2\bar{A}} \tag{2.8}$$

kennzeichnet die 3-Ebenen-C_3:

3-Punkte-C_3 und 3-Ebenen-C_3 fallen im allgemeinen nicht zusammen. Spezielle Kurvenpaare, für die sich 3-Punkte-C_3 und 3-Ebenen-C_3 an jeder Stelle decken, nennen wir *Deckungspaare*. Setzt man (7) und (8) in (5) ein, so folgt: *Deckungspaare sind durch*

$$\frac{3b\bar{b}}{4a\bar{A}} = \frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A} = 1 \tag{2.9}$$

charakterisiert. Die linken Seiten von (9) haben sich in (1.7) als ausgezeichnete Invarianten eines Kurvenpaares gezeigt.

Die Kegel

$$h \equiv p_0 p_2 - \alpha p_1^2 = 0$$

seien *Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Kurvenpaares genannt. Es sind dies die Projektionskegel der Berühr-C_3 aus dem Kurvenpunkt $\bar{\mathfrak{r}}$. Jeder von ihnen trägt eine einparametrige Schar von Berühr-C_3 auf sich. Die Entwicklungen (1.22) zeigen: *Die Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *sind die Kegel mit der Spitze in* $\bar{\mathfrak{r}}$, *die* $\bar{\mathfrak{r}}$ *vierpunktig und* $\mathfrak{r}$ *zweipunktig berühren*. Unter ihnen gibt es einen eindeutig bestimmten, der $\mathfrak{r}$ sogar dreipunktig berührt, den *Schmiegkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bezüglich des Paares. Er ist Projektionskegel der 3-Punkte-C_3 aus* $\bar{\mathfrak{r}}$, α hat für ihn den Wert (7). *Der Projektionskegel aus* $\bar{\mathfrak{r}}$ *der 3-Ebenen-C_3*, für den nach (8), (5)

$$\alpha = \frac{2\bar{A}}{3\bar{b}}$$

ist, *berührt* $\bar{\mathfrak{r}}$ nach (1.22) *nicht nur vier-, sondern fünfpunktig*.

Es folgt: *Im Büschel der Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bildet der Projektionskegel der 3-Punkte-C_3 und der Projektionskegel der 3-Ebenen-C_3 mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis*

$$\frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A}. \tag{2.10}$$

Entsprechend deutet man die dazu symmetrische Invariante im Büschel der Berührkegel von $\mathfrak{r}$. Man kommt so auch zu einer Deutung der Invarianten

$$\frac{\bar{a}A}{a\bar{A}}, \tag{2.11}$$

die insbesondere dann gleich 1 ist, wenn die genannten Doppelverhältnisse in beiden Büscheln denselben Wert haben. Solche Kurvenpaare, die uns immer wieder durch ihre Symmetrieeigenschaften auffallen werden, bezeichnen wir nach PANTAZI[6]). *Für* PANTAZI-*Paare hat* (11)

[6]) PANTAZI hat verschiedene Eigenschaften dieser Kurvenpaare angegeben. Diese und andere werden unten genannt werden. Siehe A. PANTAZI: Sur le problème de KOENIGS. Disquisit. math. et phys. Bucaresti **1**, 357—368 (1941).

den Wert 1. Nach (9) folgt: *Deckungspaare sind spezielle* PANTAZI-*Paare.*

Das Büschel der Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ mit dem projektiven Parameter α erzeugt durch Schnitt andere binäre Gebiete, insbesondere ein Kegelschnittbüschel in der Schmiegebene $\mathfrak{R}$ von c. Diese Kegelschnitte

$$p_0 p_2 - \alpha p_1^2 = 0, \qquad p_3 = 0 \tag{2.12}$$

werden auch erzeugt als die dualen Gebilde der Berührkegel von $\mathfrak{r}$, das sind die *Berührkegelschnitte von* $\mathfrak{R}$:

$$a_1 a_3 - \bar{\beta} a_2^2 = 0 \tag{2.13}$$

die alle mit $\mathfrak{R}$ vier und mit $\bar{\mathfrak{R}}$ zwei Ebenen gemeinsam haben. Der Kegelschnitt (12) wird von der Ebenenmannigfaltigkeit (13) eingehüllt, wobei

$$4\alpha\bar{\beta} = 1$$

ist. *Die Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *schneiden in der Schmiegebene* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{r}$ *die Berührkegelschnitte von* $\mathfrak{R}$ *aus.* Unter diesen hat der *Schmiegkegelschnitt von* $\mathfrak{R}$ *bezüglich des Paares* mit $\bar{\beta} = \frac{\bar{b}}{2\bar{A}}$ sogar drei Ebenen mit $\bar{\mathfrak{R}}$ gemeinsam, während der Berührkegelschnitt mit $\bar{\beta} = \frac{2a}{3b}$ sogar fünf Ebenen mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam hat. Zusammenfassend heben wir hervor, daß in dem Büschel (12) außer den ausgearteten Elementen die Kegelschnitte mit

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \alpha = \frac{3b}{2a}, \qquad \alpha = \frac{\bar{A}}{2\bar{b}}, \qquad \alpha = \frac{2\bar{A}}{3\bar{b}} \tag{2.14}$$

geometrisch ausgezeichnet sind.

Die Quadriken

$$k \equiv p_0 p_3 - \gamma p_1 p_2 = 0 \tag{2.15}$$

tragen für jedes γ ein einparametriges System von Berühr-C_3. Sie bilden das Quadrikbüschel durch die Tangenten an die Ausgangskurven und die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$, $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$. Wir nennen sie *Berührquadriken.* Sie berühren jede Kurve des Paares dreipunktig. Für

$$\gamma = \frac{A}{3a}$$

wird $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig berührt. Somit: *Im Büschel der Berührquadriken bilden die* $\mathfrak{r}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{r}}$ *vierpunktig berührenden Quadriken mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis*

$$\frac{A\bar{a}}{\bar{A}a}. \tag{2.16}$$

Eine indirekte Deutung dieser Vollinvarianten gaben wir bereits in (11). Insbesondere: PANTAZI-*Paare lassen eine 4-Punkte-Berührquadrik zu.*

Entsprechendes gilt für die dualen Gebilde

$$K \equiv a_0 a_3 - \Gamma a_1 a_2 = 0.$$

Jede solche Fläche zweiter Klasse besteht aus den Tangentenebenen der Quadrik (15), für die $\gamma\Gamma = 1$. *Die Berührquadriken bilden eine bezüglich des Kurvenpaars in sich duale Gesamtheit von Quadriken.* Sie haben also auch drei Ebenen mit dem Kurvenpaar gemeinsam. *Gibt es eine 4-Punkte-Berührquadrik, so gibt es auch eine 4-Ebenen-Berührquadrik und umgekehrt, nämlich bei den* PANTAZI-*Paaren.*

Die Auszeichnung der Berührquadriken wird besonders deutlich, wenn wir sie durch einen Grenzprozeß definieren. *Es gibt ein Büschel von Quadriken, die an einer Stelle t_0 die Schmiegebenen in einander zugeordneten Punkten des Paares berühren und das Punktepaar einer benachbarten Stelle t_1 enthalten. Läßt man beide Punkte zusammenrücken, so entsteht in der Grenze das Büschel der Berührquadriken.* Setzen wir nämlich unter Benützung des Symbols (1.18)

$$(2.17) \qquad f_1(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)\rangle, \qquad f_2(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{y}(t)\rangle, \qquad f_3(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \bar{\mathfrak{y}}(t)\rangle$$

und entsprechend die symmetrischen Größen $\bar{f}_i(t)$, so lauten unsere Forderungen

$$(2.18) \qquad f_i(t_0) = \bar{f}_i(t_0) = 0, \qquad f_1(t_1) = \bar{f}_1(t_1) = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Nach dem ROLLEschen Satz hat $f_1' = f_2$ und $\bar{f}_1' = \bar{f}_2$ zwischen t_0 und t_1 jeweils eine weitere Nullstelle und ebenso schließt man auf eine Nullstelle von $f_2', \bar{f}_2'$ im Intervall. Die Bedingungen

$$(2.19) \qquad f_1 = f_2 = f_2' = f_3 = \bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_2' = \bar{f}_3 = 0,$$

an der Stelle t_0 betrachtet, sind linear unabhängig. Es ist ja

$$f_2' \equiv a\,\langle \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{y}}\rangle \qquad (\mathrm{mod}\, f_1, f_3).$$

Sind t_0 und t_1 genügend benachbart, so folgt nach einem Satz von G. BOL[7]) daraus auch die lineare Unabhängigkeit der ursprünglichen Bedingungen (18). (19) definiert aber gerade die Berührquadriken.

Man folgert hieraus auch den Satz: *Die Berührquadriken sind die einzigen Quadriken, die drei Punkte und drei Ebenen mit jeder Kurve des Paares gemeinsam haben.*

Es ist nützlich, auch von berührenden Korrelationen und Projektivitäten zu sprechen und die eben angewandte Methode hierauf zu verallgemeinern. Sei also

$$(2.20) \qquad [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] \equiv \sum_{i,k=0}^{3} b_{ik}\, p_i \bar{p}_k$$

eine Bilinearform, die eine Korrelation definieren möge. Setzen wir

$$g_1(t) = [\mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)], \qquad g_2(t) = [\mathfrak{x}(t), \mathfrak{y}(t)], \qquad g_3(t) = [\mathfrak{x}(t), \bar{\mathfrak{y}}(t)],$$

[7]) G. BOL, Zur Definition von Schmiegfiguren in der Differentialgeometrie. Arch. d. Math. 1, 362—370 (1949). Vgl. auch G. BOL P. D. § 10, § 11, § 63.

so kennzeichnet

$$\begin{aligned} &g_1(t_0) = g_1(t_1) = g_1(t_2) = 0 \\ &g_2(t_0) = g_2(t_1) = 0 \\ &g_3(t_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

eine Korrelation, die an einer Stelle $t_0 : \mathfrak{x}(t_0)$ *überführt in die Schmiegebene von* $\mathfrak{x}(t_0)$, *in* $t_1 : \mathfrak{x}(t_1)$ *abbildet auf eine Ebene durch die Tangente an* $\mathfrak{x}(t_1)$, *in* t_2 *gehört zu* $\mathfrak{x}(t_2)$ *eine Ebene durch* $\mathfrak{x}(t_2)$. Lassen wir die Punkte zusammenrücken, so gehen diese Forderungen in die wegen

$$\begin{aligned} g_1 &= [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] \\ g_1' &= a\,([\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] + [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}]) \\ g_1'' &\equiv a\,b\,[\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}] + 2a^2\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] + a\,b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_1, g_1'} \\ g_1''' &\equiv 3a^2\,b\,([\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + [\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}]) + a\,A\,b\,([\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + [\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}]) \\ &\qquad \pmod{g_1, g_1', g_1'', g_2, [\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}], [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}], [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}]} \\ g_2 &= [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] \\ g_2' &\equiv a\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] + b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_1} \\ g_2'' &\equiv a\,b\,([\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + [\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}]) + a\,b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + A\,b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \\ &\qquad \pmod{g_1, g_1', g_2, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}], [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}]} \\ g_3 &= [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \\ g_3' &\equiv a\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + A\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_2} \\ g_3'' &\equiv a'\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + A'\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_2, g_2', \ldots} \end{aligned} \tag{2.22}$$

linear unabhängigen Bedingungen

$$g_1 = g_1' = g_1'' = g_2 = g_2' = g_3 = 0 \tag{2.23}$$

über. Wir können hierfür auch sagen, *der Kurvenpunkt wird an der betreffenden Stelle in nullter Ordnung auf seine Schmiegebene, in erster Ordnung auf eine Ebene durch die Tangente, in zweiter Ordnung auf eine Ebene durch den Kurvenpunkt abgebildet.*

Korrelationen, die diese Forderungen an einer bestimmten Stelle für beide Kurven des Paares erfüllen, nennen wir *Berührkorrelationen.* Sie ergeben sich nach (22), (23) in lokalen Koordinaten zu

$$a_i = d_i\,p_i, \qquad d_i \text{ beliebig.} \tag{2.24}$$

Die Berührkorrelationen sind genau die Korrelationen, die Berühr-C_3 *in Berühr-*C_3 *überführen, so daß die Eigenschaft eines Parameters, spezieller projektiver Parameter zu sein, dabei erhalten bleibt.*

Unter den Berührkorrelationen gibt es ein Büschel von Nullsystemen, zu denen die *Berührkomplexe*[8]) gehören ($d_0 = d_3$, $d_1 = d_2$), und ein Büschel

[8]) Man vergleiche hierzu auch S. Finikoff, Couple de courbes stratifiables. Rev. Univ. Tucumán **6**, 289—312 (1948).

von Polaritäten, die sich auf die Berührquadriken beziehen ($d_0 = -d_3$, $d_1 = -d_2$). Letztere Eigenschaft kennzeichnet die Berührquadriken. Diese sind auch die Inzidenzgebilde der Berührkorrelationen, falls diese nicht entarten. Die Nullsysteme führen die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ über und dies charakterisiert die Nullsysteme unter den Berührkorrelationen, falls das Ausgangspaar kein PANTAZI-Paar ist. PANTAZI-Paare andererseits sind die Kurvenpaare, die auch Berührkorrelationen der genannten Art zulassen, die keine Nullsysteme sind.

Es läßt sich nun gerade *eine* eindeutig bestimmte, symmetrische, berührende Korrelation durch einen Grenzprozeß festlegen. Zu den Bedingungen (21) und den dazu symmetrischen fügen wir die Forderungen hinzu, in t_1 möge $\mathfrak{r}(t_1)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(t_1)$ jeweils in seine Schmiegebene, in t_2 möge einer der Ausgangspunkte, etwa $\mathfrak{r}(t_2)$ sogar in eine Ebene durch die Tangente abgebildet werden, d.h. also:

$$g_3(t_1) = \bar{g}_3(t_1) = g_2(t_2) = 0\ ^{9}). \tag{2.25}$$

Läßt man die Punkte nun zusammenrücken, so entstehen außer (23) und den dazu symmetrischen Relationen noch die Bedingungen

$$g_3' = \bar{g}_3' = g_2'' = 0, \tag{2.26}$$

und mittels (22) gewinnt man hieraus in lokalen Koordinaten:

$$a_0 = \frac{a}{A}\, p_0, \qquad a_1 = p_1, \qquad a_2 = p_2, \qquad a_3 = \frac{\bar{a}}{\bar{A}}\, p_3. \tag{2.27}$$

Diese Korrelation führt die Punkte der 3-Punkte-C_3 in die Ebenen der 3-Ebenen-C_3 über.

PANTAZI-Paare spielen, wie wir schon sahen, in verschiedener Weise eine Sonderrolle. Für sie ist z.B. die Korrelation (27) involutorisch, sie führt hier $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ über. Zusammenfassend heben wir hervor: *Mit* PANTAZI-*Paaren ist ein ausgezeichnetes Nullsystem verbunden. Es führt jeden der Ausgangspunkte in erster Ordnung in seine Schmiegebene, in zweiter Ordnung in eine Ebene durch die Tangente und in dritter Ordnung in eine Ebene durch den Kurvenpunkt über. Der zugehörige Komplex ist 3-Tangentenkomplex*[10]).

Führt das Nullsystem eines PANTAZI-Paares etwa $\mathfrak{r}$ an einer Stelle sogar in dritter Ordnung in seine Schmiegebene über, so ist dieses Nullsystem an dieser Stelle stationär. Gilt dies überall, so ist das Nullsystem

[9]) $\bar{g}_2(t_2) = 0$ wird *nicht* gefordert, würde jedoch an Stelle der im Text angegebenen Bedingung, $\bar{g}_2(t_2) = 0$, auf die gleiche Korrelation führen.

[10]) PANTAZI-Paare spielen auf Grund dieses Zusammenhangs auf Komplexflächen eine große Rolle. Deren Theorie kann mit ihrer Hilfe besonders anschaulich aufgebaut werden. Vgl.: M. BARNER, Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I, II. Math. Annalen 1952 (im Erscheinen).

fest längs des Kurvenpaares, jede Kurve ist Komplexkurve, demselben Komplex zugehörig. Wir sprechen von einem *Komplexpaar*. *Komplexpaare sind durch*

$$a = c\,A, \qquad \bar{\alpha} = c\,\bar{A}, \qquad c = \text{const.} \tag{2.29}$$

gekennzeichnet.

Bemerkungen. 1. Hat der Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ bezüglich des Paares mit $\mathfrak{r}$ fünf Punkte gemein, so hat der Schmiegkegelschnitt von $\overline{\mathfrak{R}}$ bezüglich des Paares mit $\overline{\mathfrak{R}}$ fünf Ebenen gemeinsam und umgekehrt. Kennzeichnend hierfür ist

$$\frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A} = 1. \tag{2.30}$$

Es folgt: Bei den Deckungspaaren und nur bei diesen haben die Schmiegkegel (bzw. Schmiegkegelschnitte) von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares mit $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ fünf aufeinanderfolgende Punkte (Schmiegebenen) gemein.

2. Die Berühr-C_3 mit

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{2A}{3b} \tag{2.31}$$

ist in sich dual, aber nicht symmetrisch. Sie hat mit $\mathfrak{r}$ drei Punkte und mit $\mathfrak{R}$ drei Ebenen gemeinsam und ist dadurch bestimmt. Sie liegt also auf dem Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares und schneidet in der Schmiegebene von $\bar{\mathfrak{r}}$ den Schmiegkegelschnitt von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares aus. Die Berühr-C_3 (31) wird andererseits in dem Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ von *dem* Berührkegel von $\mathfrak{r}$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührt. Dual: Die Schmiegebenen von (31) schneiden in $\mathfrak{R}$ einen Berührkegelschnitt aus, der mit $\mathfrak{R}$ fünf Ebenen gemeinsam hat. Auch ist sie der Schnitt des Schmiegkegels von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares mit *der* Berührquadrik, die $\mathfrak{r}$ vierpunktig berührt. (31) ist 3-Punkte-C_3, wenn (30) gilt.

3.

$$\left(\ln \frac{b}{a}\right)' = 0 \tag{2.32}$$

kennzeichnet den Fall, daß der Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig berührt. Genau in diesem Fall existiert eine $\mathfrak{r}$ vierpunktig berührende Berühr-C_3, deren Invarianten den Wert (31) haben, so daß alles in Bemerkung 2 Gesagte auf diese Berühr-C_3 zutrifft. Ist die Berühr-C_3 3-Punkte-C_3, so gilt überdies (30), und der erste Teil der Bemerkung 1 tritt in Kraft. Man folgert: *Nur die Deckungspaare mit*

$$\left(\ln \frac{b}{a}\right)' = \left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)' = 0 \tag{2.33}$$

lassen eine 4-Punkte-C_3 zu. Wir beweisen: *Läßt ein Kurvenpaar eine 4-Punkte-C_3 zu, so besteht es aus einer doppelt durchlaufenen Kurve dritter Ordnung.*

Damit nämlich jeder Punkt der Berühr-C_3 (3) stationär ist, muß nach (1.20) [in (3) ist s als Funktion von t zu betrachten]

$$\begin{aligned} -\alpha' + \varrho\,\alpha &= \bar{A}\,s \\ -s' + \varrho\,s &= a\,\alpha + \bar{b}\,s^2 \\ -2s\,s' + \varrho\,s^2 &= \bar{a}\,\bar{\alpha}\,s^3 + b\,s \\ -(\bar{\alpha}s^3)' + \varrho\,\bar{\alpha}s^3 &= A\,s^2. \end{aligned}$$

Elimination von $s'(t)$ und ϱ führt auf

$$(b - 2a\,\alpha) + (\ln\alpha)'\,s + \left(\frac{\bar{A}}{\alpha} + \bar{a}\,\bar{\alpha} - 2\bar{b}\right)s^2 = 0$$

$$\left(\frac{A}{\bar{\alpha}} + \alpha\,a - 2b\right) + (\ln\bar{\alpha})'\,s + \qquad (\bar{b} - 2\bar{\alpha}\bar{a})\,s^2 = 0\,,$$

und das identische Verschwinden dieser Ausdrücke liefert (7), (9), (33).

Man beachte auch die dualen Aussagen. Das Bedingungssystem (9), (33) ist natürlich in sich dual.

4. Es gibt einen $\bar{\mathfrak{r}}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$, falls gilt:

$$\left(\ln\frac{\bar{A}^3}{\bar{a}\,\bar{b}^2}\right)' = 0\,.$$

5. Im Büschel der Berührkegelschnitte von $\mathfrak{r}$ bilden z. B. der Schmiegkegelschnitt von $\mathfrak{r}$ bezüglich des Paares und der Schnitt der Schmiegebene $\mathfrak{R}$ mit dem Projektionskegel der 3-Ebenen-C_3 mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis $\frac{4}{3}$.

6. Im Büschel der Berührquadriken eines Pantazi-Paares bilden die 4-Punkte-Berührquadrik und die 4-Ebenen-Berührquadrik mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis 9.

7. Es gibt eine $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührende Berührquadrik, wenn

$$\left(\ln\frac{A^3\,b^2}{a^5}\right)' = 0\,.$$

8. Es gibt im allgemeinen eine eindeutig bestimmte 4-Punkte-Quadrik der Eigenschaft, daß die 3-Punkte-C_3 auf ihr liegt. Ein ganzes Büschel solcher Quadriken gibt es nur, wenn entweder die Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ vierpunktig berühren (diese Schmiegkegel spannen dann das genannte Büschel auf), oder wenn eine $\mathfrak{r}$ oder $\bar{\mathfrak{r}}$ vierpunktig berührende 3-Punkte-C_3 existiert. Entartet das Paar in eine doppelt durchlaufene C_3, so gibt es natürlich ∞^2 Quadriken der genannten Art, und diese Eigenschaft ist kennzeichnend.

Insbesondere liegt bei Deckungspaaren die 3-Punkte-C_3 auf der 4-Punkte-Berührquadrik. Die Schmiegebenen der 3-Punkte-C_3 sind hier

Tangentenebenen der 4-Ebenen-Berührquadrik. Beides charakterisiert die Deckungspaare.

9. Die Ebenen $\mathfrak{E}(t)$ hüllen eine Kurve ein. Der Kehlpunkt ergibt sich nach (1.11), (1.12) zu:

$$\frac{1}{a}\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'\mathfrak{r}+\mathfrak{s}-\frac{b}{\bar{a}}\,\bar{\mathfrak{r}}. \tag{2.34}$$

Die Projektion dieses Kehlpunktes von $\mathfrak{r}$ auf die Gerade $(\mathfrak{s},\bar{\mathfrak{r}})$ liefert den Punkt $\mathfrak{s}-\frac{b}{\bar{a}}\,\bar{\mathfrak{r}}$, während die Tangente an die Kurve $\bar{\mathfrak{s}}(t)$ diese Gerade in $\mathfrak{s}+\frac{A}{\bar{b}}\,\bar{\mathfrak{r}}$ trifft. Diese beiden Punkte bilden also mit $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ das Doppelverhältnis

$$-\frac{b\bar{b}}{\bar{a}A}.$$

Zieht man noch den Kehlpunkt der Torse $\bar{\mathfrak{E}}(t)$ heran, so kommt man entsprechend zu den Punkten

$$\bar{\mathfrak{r}}-\frac{\bar{a}}{a\,b}\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'\mathfrak{r},\qquad \mathfrak{r}-\frac{a}{\bar{a}\,\bar{b}}\left(\ln\frac{\bar{b}}{a}\right)'\bar{\mathfrak{r}},$$

wenn man von $\mathfrak{s}$ bzw. $\bar{\mathfrak{s}}$ aus projiziert. Sie bilden mit $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ auf $(\mathfrak{r},\bar{\mathfrak{r}})$ das Doppelverhältnis

$$\frac{1}{b\,\bar{b}}\left(\ln\frac{\bar{b}}{a}\right)'\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'. \tag{2.35}$$

Entsprechend dual.

Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen hat Herr Süss[10a]) Kurvenpaare behandelt, bei denen in zugeordneten Punkten die Tangente der einen Kurve zur Schmiegebene der anderen parallel ist. Von unserem Standpunkt aus bedeutet dies, daß etwa $\mathfrak{s}$ sich in der unendlich fernen Ebene bewegt.

Die Schmiegebene von $\mathfrak{s}$ wird in Dualisation von (34) dargestellt durch

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{A}\left(\ln\frac{b}{\bar{A}}\right)'\mathfrak{R}+\mathfrak{E}-\frac{b}{\bar{A}}\,\bar{\mathfrak{R}}.$$

Diese Ebene ist fest, falls $\mathfrak{D}'-\varrho\,\mathfrak{D}=0$, und dies führt nach (1.12) auf die Bedingung

$$\left(\ln\frac{\bar{d}}{A}\right)'+\frac{\bar{a}\,A}{\bar{d}}-\bar{d}=0,$$

wobei

$$\bar{d}=\left(\ln\frac{b}{\bar{A}}\right)'$$

gesetzt ist. Hierdurch sind also die von Herrn Süss betrachteten Kurvenpaare in unserer Schreibweise charakterisiert.

[10a]) W. Süss, Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum. Archiv der Math. 3, 137—141 (1952).

10. Aus (1.3) gewinnt man die Ableitungsgleichungen in Geradenkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})' = b(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) \\
&(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{b}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}) + A(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) + a(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}) \\
&(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})' = \bar{a}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) + a(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}) \\
&(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{b}(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s}) \\
&(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})' = b(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}) + \bar{A}(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}) + \bar{a}(\bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{s}) \\
&(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{A}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) + A(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}).
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Man sieht hieraus z.B.: Die Bilder der beiden Regelflächen $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ im Geradenraum definieren ihrerseits im R_5 eine Regelfläche, die bei PANTAZI-Paaren und nur bei diesen eine Torse ist. Bei einem Komplexpaar ist der Kehlpunkt dieser Torse fest, er bestimmt den linearen Komplex, dem jede Kurve des Paares angehört.

Die Berührkomplexe sind dargestellt durch $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) + \delta(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Unter ihnen gibt es je einen, der mit $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar drei Tangenten gemein hat. Es entsteht wieder das Doppelverhältnis (11). Es folgt auch: Bei Dekkungspaaren existiert ein 3-Tangenten-Komplex und dieser ist zugeordneter Komplex der 3-Punkte-C_3 (3-Ebenen-C_3). Damit ein Berührkomplex vier Tangenten etwa mit $\mathfrak{r}$ gemein hat, muß sein:

$$\left(\ln \frac{A}{a}\right)' = 0.$$

11. Bei Komplexpaaren gehören die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ und $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ ebenfalls dem ausgezeichneten Komplex an. PANTAZI-Paare, die keine Komplexpaare sind, gestatten nur dann einen Komplex, der jeweils drei aufeinanderfolgende Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ und $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ enthält, wenn gilt:

$$\left(\ln \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a\,b}\right)' = 0;$$

dieser Komplex enthält jeweils sogar vier dieser Geraden, wenn:

$$\bar{b} + c_1 A + c_2 a = 0 \qquad (c_i = \text{const, nicht beide} = 0).$$

Der zugehörige Komplex ist dann fest längs des Kurvenpaares. Dies ist also nach Bemerkung 9 zum Beispiel dann bei einem PANTAZI-Paar der Fall, wenn die Kehlpunkte von $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}})$ bzw. $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ liegen.

12. Je zwei der folgenden Aussagen ziehen die anderen nach sich:

1. Der Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares berührt $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig.
2. Es gibt einen $\mathfrak{r}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\mathfrak{r}$.
3. Es gibt eine $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührende Berührquadrik.
4., 5., 6. Die hierzu dualen Aussagen.

7. Es gibt einen Berührkomplex, der mit $\mathfrak{r}$ vier Tangenten gemein hat. Solche Kurvenpaare sind durch

$$a = c_1 b = c_2 A \qquad (c_i = \text{const})$$

gekennzeichnet.

13. Zwei der folgenden Aussagen bedingen die anderen:

1. Die Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich eines PANTAZI-Paares berühren $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ vierpunktig.
2. Ein PANTAZI-Paar läßt jeweils einen $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ zu.
3. Es gibt eine 5-Punkte-Berührquadrik.
4., 5., 6., Die hierzu dualen Aussagen.
7. Es handelt sich um ein Komplexpaar.

Charakteristisch ist hier

$$(2.37) \qquad a = c_1 A = c_2 b, \qquad \bar{a} = c_1 \bar{A} = c_3 \bar{b} \qquad (c_i = \text{const}).$$

14. Kurvenpaare, für die (37) gilt, sind dann und nur dann in doppelt durchlaufene C_3 entartet, wenn zwischen den Konstanten in (37) die Bedingung besteht:

$$3c_1 - 4c_2 c_3 = 0.$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn einem Deckungspaar eine der Eigenschaften von Bemerkung 13 (außer 7.) zukommt. Es gibt aber sehr wohl Deckungspaare, die zugleich Komplexpaare sind, die nicht in eine doppelt durchlaufene C_3 entarten.

15. Unter den Berührkorrelationen gibt es ein Büschel von Nullsystemen und ein Büschel von Polaritäten. Die folgenden Aussagen gelten für beide Gebilde in gleicher Weise.

In einem Büschel involutorischer Berührkorrelationen hat das Doppelverhältnis der Korrelationen, die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in erster Ordnung in ihre Schmiegebene (die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in zweiter Ordnung in eine Ebene durch die Tangente — bei Polaritäten: die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$) überführen, mit den ausgearteten Elementen den Wert (11). Diese Ordnungen erhöhen sich wenn $a = \text{const}\, A$ bzw. $\bar{a} = \text{const}\, \bar{A}$.

Es gibt dann und nur dann eine involutorische Berührkorrelation, die zwei Berühr-C_3 mit den Invarianten $\alpha, \bar{\alpha}; \hat{\beta}, \hat{\bar{\beta}}$ ineinander überführt, wenn zwischen diesen die Beziehung besteht:

$$\alpha \hat{\bar{\beta}} - \bar{\alpha} \hat{\beta} = 0.$$

Also: Nur bei PANTAZI-Paaren gibt es eine involutorische Berührkorrelation, die die 3-Punkte-C_3 in die 3-Ebenen-C_3 abbildet. Und allgemeiner: Wir greifen eine beliebige Berühr-C_3 heraus, denken uns diese aber fest

gewählt. Gibt es eine involutorische Berührkorrelation, die diese C_3 als Ebenenmannigfaltigkeit auf die 3-Punkte-C_3 und ferner diese C_3 als Punktmannigfaltigkeit auf die 3-Ebenen-C_3 abbildet, so ist das Kurvenpaar ein PANTAZI-Paar.

In jedem der genannten Fälle heißt dies: Gibt es ein Nullsystem, das das Gewünschte leistet, so gibt es auch eine Polarität und umgekehrt.

16. Die verschiedenen Gebilde, die wir betrachteten, sind untereinander geometrisch verknüpft. Die Zuordnung der Parameter ist dabei meist eine projektive, so daß das Doppelverhältnis ausgezeichneter Elemente sich dabei überträgt. Man gelangt so in verschiedener Weise zu den Invarianten (1.7) und daraus folgenden geometrischen Aussagen.

17. Genau wie die berührenden Korrelationen untersucht man lokal definierte Projektivitäten, die die beiden Kurven in gewisser Weise miteinander vertauschen. Wir skizzieren den Vorgang kurz. Möge

$$\{\mathfrak{p}, \mathfrak{P}\} \equiv \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik}\, p_i\, a_k = 0$$

die Projektivität definieren; setzen wir

$$h_1 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{R}}\}, \qquad h_2 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}, \qquad h_3 = \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\},$$

so gelangt man wie oben zu den Bedingungen für die Berührprojektivitäten (die symmetrischen Relationen hat man hinzuzufügen):

$$h_1 = h_1' = h_1'' = h_2 = h_2' = h_3 = 0.$$

Es wird:

$$h_1 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{R}}\}$$

$$h_1' = a\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{R}}\} + \bar{A}\{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}$$

$$h_1'' \equiv a\,b\{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{R}}\} + 2a\,\bar{A}\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\} + \bar{A}\,\bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_1\, h_1')$$

$$h_1''' \equiv \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{A}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} + 3a\,\bar{b}\,\bar{A}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + 3a\,b\,\bar{A}\{\bar{\mathfrak{s}}\,\overline{\mathfrak{S}}\} + a\,b\,A\{\bar{\mathfrak{r}}, \overline{\mathfrak{R}}\}$$
$$(\mathrm{mod}\, h_1, h_1', h_2, \{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{R}}\}, \{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\}, \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\})$$

$$h_2 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}$$

$$h_2' \equiv a\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\} + \bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_1)$$

$$h_2'' \equiv \bar{a}\,\bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} + 2a\,\bar{b}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + a\,b\{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{S}}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_1, h_1', h_2, h_2')$$

$$h_3 = \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\}$$

$$h_3' \equiv a\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + \bar{a}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_2)$$

$$h_3'' \equiv a'\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + \bar{a}'\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} \quad (\mathrm{mod}\, \ldots).$$

Die *Berührprojektivitäten* mögen nach Definition an einer Stelle jeden der Kurvenpunkte in nullter Ordnung in den zugehörigen Punkt der anderen Kurve, in erster Ordnung auf einen Punkt der Tangente an die

andere Kurve und in zweiter Ordnung in einen Punkt der Schmiegebene der anderen Kurve abbilden. Für sie ist dann

$$p_i^* = e_i\, p_{3-i}.$$

Also: Gerade die involutorischen Berührprojektivitäten ($e_0 e_3 = e_1 e_2$) führen Berühr-C_3 so in sich über, daß die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ vertauscht werden.

Auch hier gelangt man zu einer eindeutig bestimmten, symmetrischen Projektivität, indem man neben (38) und den dazu symmetrischen Bedingungen verlangt:

$$h_2'' = h_3' = \bar{h}_3' = 0.$$

Man erhält:

$$(2.39)\quad p_0^* = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\, p_3, \qquad p_1^* = \bar{b}\, p_2, \qquad p_2^* = b\, p_1, \qquad p_3^* = \frac{a\,b}{\bar{a}}\, p_0.$$

Diese Projektivität führt die 3-Punkte-C_3 in sich über. Sie ist involutorisch und wird auch erzeugt durch Spiegelung an dem Geradenpaar

$$(2.40)\qquad (a\sqrt{\bar{b}}\,\bar{\mathfrak{r}} \pm \bar{a}\sqrt{\bar{b}}\,\mathfrak{r},\ \sqrt{b}\,\bar{\mathfrak{s}} \pm \sqrt{\bar{b}}\,\mathfrak{s}).$$

Pantazi-Paare sind auch hier wieder ausgezeichnet. Bei ihnen führt die Projektivität (39) jeden der Ausgangspunkte sogar in dritter Ordnung in einen Punkt der gegenüberliegenden Schmiegebene über.

Eine Überführung der beiden Kurven ineinander in höherer Ordnung tritt bei Pantazi-Paaren ein, falls eine oder mehrere der Bedingungen erfüllt sind:

$$(2.41)\qquad \left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)' = 0, \quad \left(\ln\frac{b}{\bar{b}}\right)' = 0, \left(\ln\frac{A}{\bar{A}}\right)' = 0.$$

Gelten alle drei Relationen, so gehen die beiden Kurven durch Spiegelung an einem festen Geradenpaar auseinander hervor.

Spezielle Pantazi-Paare kann man also dadurch erzielen, daß man auf eine gegebene Kurve eine involutorische Projektivität anwendet.

18. Die Frage nach der Möglichkeit, zwei Kurven an einer bestimmten Stelle in einer gewissen Ordnung ineinander überführen zu können, hat in Sonderfällen Interesse, wenn etwa eine der beiden Kurven eben ist, d.h. z.B. $A = 0$. Insbesondere möchte man wissen, ob man zu einer gegebenen (gewundenen) Kurve eine punktweise auf sie bezogene ebene Kurve angeben kann, so daß an jeder Stelle eine „möglichst gut berührende" Projektivität beide Kurven aufeinander abbildet. Natürlich können wir diese Frage nur im Prinzip beantworten und aufzeigen, wie diese präzis lauten muß.

Von (39) ausgehend kann man verlangen, daß diese Projektivität an jeder Stelle die Punkte beider Kurven sogar in zweiter Ordnung vertauscht. Dies führt auf $\left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)' = 0$. Eine weitere Bedingung läßt sich nun wegen $A = 0$ und der daraus folgenden Tatsache, daß immer

$h_1''', \bar{h}_1''' \neq 0$, nicht angeben, ohne bereits in den Ansatz eine Forderung an die gegenseitige Lage der beiden Kurven hineinzustecken. (Dies kann man auch nicht vermeiden, wenn man weitgehend auf Symmetrie verzichtet.) Wir können verlangen $h_2''' = 0$, woraus dann folgt

$$\left(\ln \frac{b}{\bar{b}}\right)' = 0.$$

Da jetzt auch $\bar{h}_2''' = h_3''' = \bar{h}_3''' = 0$, so heißt dies, $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ wird an jeder Stelle in dritter Ordnung zwar nicht in den gegenüberliegenden Punkt, aber doch in einen Punkt der Verbindungsgeraden mit diesem übergeführt.

(Die geometrische Charakterisierung der angegebenen Bedingungen ist natürlich von dem Verschwinden von A unabhängig.)

19. Korrelationen, die die Punkte der einen Kurve an einer Stelle in einer gewissen Ordnung auf die Schmiegebenenmannigfaltigkeit der anderen abbilden, kann man entsprechend definieren. Geht man wie bei den behandelten Korrelationen und Projektivitäten vor, so gelangt man wieder zu einer eindeutig bestimmten Korrelation

$$(2.42) \qquad a_0 = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{A}\,p_3, \qquad a_1 = \bar{b}\,p_2, \qquad a_2 = b\,p_1, \qquad a_3 = \frac{a\,b}{A}\,p_0,$$

die die Berühr-C_3 (31) mit der dazu symmetrischen vertauscht.

Nur bei PANTAZI-Paaren führt diese Korrelation die Punkte $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ über. „Berührung" in höherer Ordnung tritt weiterhin ein, wenn eine oder mehrere der Größen

$$(2.43) \qquad \left(\ln \frac{A}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{b}{\bar{b}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{\bar{A}}{a}\right)'$$

verschwinden. Die Korrelation (42) ist fest, wenn bei einem PANTAZI-Paar alle die Größen (43) Null sind.

§ 3.

Kurvenpaare und Doppelverhältnisscharen.

Mit einem Kurvenpaar sind an einer Stelle die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ und auch die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$, $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ invariant verbunden. Jede dieser Geraden bildet längs des Kurvenpaares eine Regelfläche, deren Eigenschaften natürlich irgendwie auch für das Kurvenpaar charakteristisch sind. Wir wollen diesen Zusammenhang hier nicht bis in die Einzelheiten verfolgen, auch deshalb nicht, weil das geometrische Gebilde eines Kurvenpaares auf einer Regelfläche vom Gesichtspunkt der Theorie der Regelflächen aus in interessanter Weise gefaßt werden kann[11]). Trotzdem gibt es eine Reihe von Fragen, für die unsere Auffassung, d.h.

[11]) Vgl. G. BOL, Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen. Math. Z. 52, 791—809 (1950).

unser Bezugssystem besonders geeignet ist — nur von diesen soll hier die Rede sein.

Wir betrachten etwa die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und die sie berührenden Quadriken, die durch

$$f_1 = f_1' = \bar{f}_1 = \bar{f}_1' = f_4 = f_4' = 0 \tag{3.1}$$

gekennzeichnet sind, wobei $f_1, \bar{f}_1$ in (2.17) definiert wurde und

$$f_4 = \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle$$

gesetzt ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
f_1 &= \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{r} \rangle \\
f_1' &= 2a \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \rangle \\
f_1'' &\equiv 2a \left(a \langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle + b \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle\right) \quad (\mathrm{mod}\, f_1, f_1') \\
f_1''' &\equiv 2ab \left(\left(\ln \frac{b}{a}\right)' \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle + 3a \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle + A \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle\right) \quad (\mathrm{mod}\, f_1, f_1', f_1''), \\
f_4 &= \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle \\
f_4' &= a \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle + \bar{a} \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle \\
f_4'' &\equiv a \left(\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)' \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle + 2\bar{a} \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle\right) \quad (\mathrm{mod}\, f_4, f_4', f_1, f_1')
\end{aligned} \tag{3.2}$$

und (1) führt also auf die Gleichungen dieser Quadriken in lokalen Koordinaten:

$$2a\, p_0 p_2 - 2\bar{a}\, p_1 p_3 + a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 = 0. \tag{3.3}$$

Jede solche Quadrik gibt in Verbindung mit dem Kurvenpaar Veranlassung zu einer projektiven Abbildung der Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ auf sich[12]). Schneiden wir nämlich eine Quadrik (3) mit den Schmiegebenen $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\bar{\mathfrak{r}}$, so gibt es Geradenvierecke auf der Quadrik, deren Eckpunkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{p}}$ der Reihe nach auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, in $\mathfrak{R}$, in $\bar{\mathfrak{R}}$, auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ liegen (in der Figur gestrichelt). Die Zuordnung der Punkte $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ ist eine projektive. Setzen wir

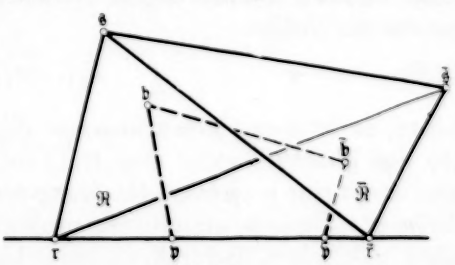


Fig. 2.

$$\mathfrak{p} = s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}, \qquad \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r} + \bar{s}\,\bar{\mathfrak{r}} \tag{3.4}$$

und $\mathfrak{b}$ als Linearkombination von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\bar{\mathfrak{s}}$ und entsprechend $\bar{\mathfrak{b}}$, so führen die Bedingungen

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = 0$$

[12]) Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der von G. Bol in der unter [11]) zitierten Arbeit eingeführten Grundabbildung.

auf

$$\mathfrak{b} = \tau\mathfrak{r} + s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}$$

(3.5)

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\tau}\,\bar{\mathfrak{r}} + a\,\mathfrak{s} \quad + \bar{s}\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}\,,$$

wobei

$$-2\tau = \frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} + 2s\,a_{12} + s^2\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11}$$

$$2\bar{\tau} = \frac{a}{\bar{a}}\,a_{11} + 2\bar{s}\,a_{12} + \bar{s}^2\,\frac{\bar{a}}{a}\,a_{22}.$$

Zuletzt liefert

$$\langle \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = 0$$

die gesuchte Projektivität:

$$s\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11} + 2a_{12} + \bar{s}\,\frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} = 0. \tag{3.6}$$

Wählt man für jede Erzeugende der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ eine Quadrik (3), so gibt es zu dieser Quadrik eine Kurvenschar auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, deren Tangenten den einen Regulus von (3) bilden. Wegen

$$\mathfrak{p}' = s'\,\mathfrak{r} + s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} \tag{3.7}$$

genügt nach (5) diese Schar der RICCATIschen Differentialgleichung

$$-2s' = \frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} + 2s\,a_{12} + s^2\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11}, \tag{3.8}$$

d.h. die Scharkurven bilden die Erzeugenden projektiv aufeinander ab — man spricht von einer Doppelverhältnisschar.

Dieser Zusammenhang zwischen berührenden Quadriken und Doppelverhältnisscharen ist wohlbekannt. Für uns hier handelt es sich jedoch darum, daß diese Gebilde auf ein bestimmtes Punktepaar $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ bezogen sind, und wir können sagen: *Nehmen wir zu den Invarianten des Kurvenpaares die Größen*

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{22} \tag{3.9}$$

hinzu, so ist damit neben unserem Kurvenpaar eine Doppelverhältnisschar (8) *und gleichbedeutend eine* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *an jeder Stelle berührende Quadrik* (3) *und damit eine projektive Abbildung von* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *auf sich auf jeder Erzeugenden definiert.* Diese so erzielbaren projektiven Abbildungen sind dabei unter allen möglichen dadurch ausgezeichnet, daß sie $\mathfrak{r}$ in $\bar{\mathfrak{r}}$ überführen.

Einem Punkte $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$ der Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ denken wir uns an jeder Stelle den Punkt $s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}$ der Geraden $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zugeordnet. Es trifft nämlich die Tangentenebene an die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ im Punkte $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$ die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ in dem genannten Punkte. Beachten wir diese eineindeutige Zuordnung der beiden Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$, so gilt: Die Doppelpunkte der Abbildung (6) sind die Punkte der Erzeugenden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, in denen die Tangenten hindurchgehender zugehörender Scharkurven (8)

die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. In diesen Punkten enthält also die zugehörende Quadrik (3) die Verbindungsgerade aufeinander bezogener Punkte von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Somit trifft insbesondere an diesen Stellen die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ die Quadrik (3).

Besonders wichtig ist natürlich der Fall, daß die Abbildung (6) involutorisch ist. Dieser ist durch $a_{12} = 0$ und die folgenden geometrischen Eigenschaften gekennzeichnet. Die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ werden durch (6) miteinander vertauscht, d.h. diese Ausgangspunkte liegen harmonisch zu den Doppelpunkten. Desgleichen trennen die Schnittpunkte der Quadrik (3) mit der Geraden $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$ harmonisch. Die Zuordnung auf dieser Geraden wird jetzt auch durch die Polarität an (3) erzeugt. Ferner gibt es in diesem und nur in diesem Fall eine Berühr-C_3 (2.3) auf der Quadrik (3). Diese Berühr-C_3 ist eindeutig bestimmt, und umgekehrt gehört zu jeder Berühr-C_3 genau eine Quadrik (3) mit $a_{12} = 0$[13]). Die Beziehung wird vermittelt durch:

$$2a\,\alpha + a_{11} = 0, \qquad 2\bar{a}\,\bar{\alpha} - a_{22} = 0. \tag{3.10}$$

Ausgezeichnete Berühr-C_3 führen auf ausgezeichnete Quadriken (3) und damit auf ausgezeichnete Doppelverhältnisscharen (8) und ausgezeichnete Involutionen (6). — Wir wollen diese Zusammenhänge im einzelnen nicht verfolgen, sondern uns anderen, mit dem Kurvenpaar invarliant verbundenen Gebilden zuwenden, die durch (9) definiert sind.

Da ist zunächst der Fall zu beachten, daß die soeben aufgeführten Zusammenhänge gegenstandslos werden, weil alle Größen (9) verschwinden. Diese Quadrik (3) hat die Gleichung

$$2a\,p_0 p_2 - 2\bar{a}\,p_1 p_3 = 0 \tag{3.11}$$

und ist unter den $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ berührenden Quadriken dadurch ausgezeichnet, daß die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ ganz auf ihr liegt. Sie berührt sogar die Kurven $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$, es ist ja

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle' = \langle \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle' = \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle = 0,$$

jedoch dann und nur dann noch

$$\langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle' = 0,$$

falls

$$A\,\bar{a} - \bar{A}\,a = 0,$$

d.h. falls das Kurvenpaar ein PANTAZI-Paar ist. PANTAZI-*Paare sind auch dadurch charakterisiert, daß sie an jeder Stelle eine Quadrik zulassen, die die beiden Regelflächen berühren, die von der Verbindungsgeraden ihrer Punkte und der Schnittgeraden ihrer Schmiegebenen erzeugt werden.*

[13]) Denkt man sich die Geraden der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ mittels der Kurvenschar $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$, $s = \text{const}$ aufeinander abgebildet, so definiert (6) und (8) jeweils eine „projektive Bewegung" in dem binären Gebiet. Ist $a_{12} = 0$, so ist diese Bewegung in verschiedener Weise ausgezeichnet. Auf diese Zusammenhänge gehen wir hier nicht ein.

Zu der Quadrik (11) gehört auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ die Kurvenschar $\mathfrak{r} + s\,\bar{\mathfrak{r}}$ mit $s = \text{const}$ und entsprechend auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ eine Kurvenschar, deren Tangenten zumindest die Gerade $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ treffen. Setzen wir

$$\mathfrak{q} = a\,\mathfrak{s} + u(t)\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}, \tag{3.12}$$

so wird

$$\mathfrak{q}' \equiv \left(u' + \frac{a\,b}{\bar{a}} + \left(\ln\frac{\bar{a}}{a}\right)' u - \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\,u^2\right)\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} + a\,\bar{A}\,\mathfrak{r} + u\,\bar{a}\,A\,\bar{\mathfrak{r}} \pmod{\mathfrak{q}},$$

und es ist

$$\mathfrak{q}' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}},$$

falls

$$u' + \frac{a\,b}{\bar{a}} + \left(\ln\frac{\bar{a}}{a}\right)' u - \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\,u^2 = 0. \tag{3.13}$$

Zu der so bestimmten Doppelverhältnisschar auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ gehört die Quadrik

$$2A\,p_0\,p_2 - 2\bar{A}\,p_1\,p_3 = 0, \tag{3.14}$$

die im Falle eines PANTAZI-Paares mit (11) zusammenfällt und allgemein die Eigenschaft hat, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zu berühren und $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ zu enthalten.

Gibt es auf der Regelfläche $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ eine Kurve, deren Schmiegebene an jeder Stelle durch die Gerade $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ geht? Eine solche Kurve gehört zu der Schar (12), (13), und wegen

$$\mathfrak{q}'' \equiv a\,\bar{A}\,a\,\mathfrak{s} + u\,\bar{a}\,A\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'}$$

existiert eine solche Kurve nur bei PANTAZI-Paaren. Bei diesen hat aber jede Kurve der Schar diese Eigenschaft.

Die Figur, die bei PANTAZI-Paaren hier vorliegt, die beiden Regelflächen $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ mit der an jeder Stelle berührenden Quadrik (11), (14) und den dazugehörenden Kurvenscharen, ist in bezug auf beide Regelflächen völlig symmetrisch, und keine Scharkurve ist vor den anderen ausgezeichnet. *Mit* $\mathfrak{r}$ *und* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bildet also jedes andere Kurvenpaar der Schar* $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$, $s = \text{const}$, *und jedes Kurvenpaar der Schar* (12), (13) *auf* $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ *ein* PANTAZI-*Paar*.

Greifen wir aus der Doppelverhältnisschar auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ jeweils eine Kurve heraus, etwa

$$\mathfrak{p}_0 = s_0\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}, \qquad \mathfrak{q}_0 = a\,\mathfrak{s} + u_0(t)\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}.$$

Ihre Schmiegebenen werden, wie wir soeben sahen, aufgespannt von den Punkten

$$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q}_0, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}},$$

d.h. also von

$$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q}_0, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{r}.$$

Diese Schmiegebenen enthalten also die Gerade $(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0)$. $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0$ *durchlaufen somit Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0)$. Wir können

unserem oben ausgesprochenen Satz auch die Form geben: *Zu einem Kurvenpaar* $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}$ *gibt es dann und nur dann eine weitere Kurve* $\mathfrak{t}$, *so daß die Kurven* $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}$ *bzw.* $\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{x}}$ *Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ *bzw.* $(\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{x}})$ *sind, falls das Kurvenpaar ein* PANTAZI-*Paar ist.* In diesem Fall gibt es eine ganze Kurvenschar solcher Kurven $\mathfrak{t}$, die eine Doppelverhältnisschar einer Regelfläche bilden. Je zwei Kurven dieser Schar haben dieselbe Eigenschaft[14]).

Wir kommen zurück zum allgemeinen Fall der Quadriken (3), unter denen wir jetzt diejenigen auswählen, die das Kurvenpaar sogar dreipunktig berühren. Wir nennen diese *Berührquadriken von* $(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}})$. Die Bedingungen

$$f_1''' = \bar{f}_1''' = 0$$

führen nach (2) auf

$$a_{22} = \bar{b}, \qquad a_{11} = -b. \tag{3.15}$$

Zu diesen gehört auch die Schmiegquadrik der Regelfläche $(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}})$, für die weiterhin $f_4''' = 0$, also

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)'. \tag{3.16}$$

Als Doppelverhältnisschar ist der Schmiegquadrik die Schar der Asymptotenlinien zugeordnet.

Zu den Berührquadriken von $(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}})$ *gehören genau die Kurvenscharen* (8), *deren Kurven auf jeder Erzeugenden Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}})$ *in den Punkten* $\mathfrak{x}$ *und* $\bar{\mathfrak{x}}$ *berühren.* Stellen nämlich, in denen die Kurven zweier Scharen sich berühren, berechnen sich allgemein aus der quadratischen Gleichung

$$\tau - \tau^* = 0,$$

und diese Punkte fallen genau dann in die Ausgangspunkte, falls

$$a_{11} - a_{11}^* = 0, \qquad a_{22} - a_{22}^* = 0. \tag{3.17}$$

Ist die eine Schar die Schar der Asymptotenlinien, so führt dies für die andere gerade auf (15).

Denken wir uns umgekehrt auf einer Regelfläche eine Doppelverhältnisschar gegeben, so gibt es auf jeder Erzeugenden genau zwei (im allgemeinen verschiedene) Punkte, in denen eine Kurve der Schar eine Asymptotenlinie berührt. Wählen wir diese so entstehenden Kurven als Ausgangskurven, so kommen wir auf die betrachtete Figur. *Nehmen wir zu den Invarianten des Kurvenpaares die Größe* a_{12} *hinzu, so haben wir*

[14]) $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{x}}$ nennt man deshalb auch asymptotisch Transformierte erster Stufe voneinander, $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}$ asymptotisch Transformierte zweiter Stufe. Wir haben den Ausdruck PANTAZI-Paare der Kürze wegen gewählt, auch weil A. PANTAZI es war, der den hier der Vollständigkeit halber angegebenen Zusammenhang in der S. 416, Fußnote [6]) zitierten Arbeit dargestellt hat. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist vermutlich viel älter. Man vgl. etwa: G. FUBINI-E. ČECH, Geometria proiettiva differenziale I, II. — A. TERRACINI, Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari. Appendice IV[a] (Bologna 1927).

ein volles Invariantensystem einer Doppelverhältnisschar. Ausgeschlossen sind dabei Doppelverhältnisscharen, deren Kurven Asymptotenlinien auf der betrachteten Erzeugenden in zusammenfallenden Punkten berühren.

Unter den Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gibt es weitere ausgezeichnete — wir stellen die folgende Liste zusammen:

$$
\begin{aligned}
a_{12} = \quad & 0: \text{ Berührquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) \text{ trägt 3-Punkte-} C_3 . \\
& \infty: \text{ Die beiden Ebenen } \mathfrak{E}, \bar{\mathfrak{E}}. \\
& \frac{1}{2}\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)': \text{ Schmiegquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}). \\
& \pm\sqrt{-b\,\bar{b}}: \text{ Berührquadriken von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}), \text{ die } (\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}) \text{ berühren.} \\
(3.18) \quad & -\frac{1}{3}\left(\ln \frac{b}{a}\right)': \text{ Berührquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}), \text{ die mit } \mathfrak{r} \text{ sogar vier} \\
& \qquad \text{aufeinanderfolgende Punkte gemeinsam hat.} \\
& \frac{1}{3}\left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)': \text{ Berührquadrik, die } \bar{\mathfrak{r}} \text{ sogar vierpunktig berührt.} \\
& \left(\ln \frac{\bar{a}}{b}\right)': \mathfrak{r} \text{ ist Ort von Wendepunkten der zugehörigen Schar (8).} \\
& -\left(\ln \frac{a}{\bar{b}}\right)': \bar{\mathfrak{r}} \text{ ist Wendepunktsort der zugehörigen Schar (8).}
\end{aligned}
$$

Die Richtigkeit der ersten drei Behauptungen ist evident bzw. bewiesen. Um die Richtigkeit der vierten zu zeigen, hat man auszudrücken, daß die Doppelpunkte der Abbildung (6), (15) zusammenfallen. Die fünfte Aussage erhält man aus der Forderung $f_1''' = 0$ nach (2). Um die beiden letzten Bedingungen zu bestätigen, braucht man die Größe [vgl. (7)]:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}'' \equiv & \left\{ s'' + s(a\bar{A} - \bar{a}A) - s'\left[(\ln \bar{a})' + s\frac{a\,b}{\bar{a}}\right]\right\}\mathfrak{r} + \\
& + \left\{ 2s' + \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a} + s\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)' - s^2\frac{a\,b}{\bar{a}}\right\} a\,\mathfrak{s} \pmod{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}.
\end{aligned}
$$

Ein Wendepunkt einer Scharkurve wird durch

$$\mathfrak{p}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'} \tag{3.19}$$

gekennzeichnet, wenn dabei $s(t)$ der Differentialgleichung (8) mit (15) genügt. $\bar{\mathfrak{r}}$ selbst ist Wendepunkt der hindurchlaufenden Scharkurve, wenn (19) für $s = 0$ erfüllt ist. Dies führt auf

$$s'' - s'(\ln \bar{a})' = 0, \qquad 2s' + \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a} = 0,$$

wobei sich s'' aus (8) mit (15) zu

$$2s'' + \left(\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\right)' + 2a_{12}s' = 0$$

berechnet. Elimination von s'' und s' aus diesen Gleichungen führt auf den in der Liste (18) an letzter Stelle angegebenen Wert von a_{12}.

Wählt man unter (18) etwa die Quadriken mit a_{12}: $0, \infty, \sqrt{-b\,\bar{b}}$ als Grundelemente aus, so ist für jede weitere Quadrik des Büschels das

Doppelverhältnis

$$D\left(0, \infty, a_{12}, \sqrt{-b\,\bar{b}}\right) = \frac{a_{12}}{\sqrt{-b\,\bar{b}}}. \tag{3.20}$$

Insbesondere ergibt sich so eine geometrische Deutung der Invarianten

$$\frac{\left(\ln \frac{\bar{a}}{a}\right)'}{2\sqrt{-b\,\bar{b}}}, \qquad \frac{-\left(\ln \frac{b}{a}\right)'}{3\sqrt{-b\,\bar{b}}}, \qquad \frac{\left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)'}{3\sqrt{-b\,\bar{b}}}. \tag{3.21}$$

Eine weitere Deutung dieser Größen, die nur reelle Gebilde benützt, erzielt man mittels der Projektivitäten (6), die den Punkt $\mathfrak{r}$ in $\bar{\mathfrak{r}}$ überführen. Es gibt also einen Punkt $\mathfrak{a}_1$, der das Bild von $\bar{\mathfrak{r}}$ ist, und einen Punkt $\mathfrak{a}_2$, der auf $\mathfrak{r}$ abgebildet wird. Das Doppelverhältnis der vier Punkte $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ hat nach (6) den Wert

$$D(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = -\frac{4a_{12}^2}{b\,\bar{b}}. \tag{3.22}$$

Insbesondere hat dieses Doppelverhältnis genau dann den Wert 4, wenn die zugehörige Quadrik die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ berührt.

In (21) *ist zusammen mit* (2.10) *die geometrische Deutung eines vollen Invariantensystems eines Kurvenpaares enthalten.*

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ mit dem Kurvenpaar $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$. Andererseits wird dieselbe Regelfläche auch erzeugt von den Schnittgeraden der Ebenen $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$, wobei jetzt die Ebenenscharen $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ durch das Kurvenpaar ausgezeichnet sind. Die geometrischen Überlegungen dieses Abschnitts lassen sich hierauf übertragen. Die $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ berührenden Quadriken (als Ebenenmannigfaltigkeit) hüllen natürlich wieder die Quadriken (3) ein, und auch die Berührquadriken von $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ — die definitionsgemäß mit $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ drei aufeinanderfolgende Ebenen gemeinsam haben — bilden die Tangentenebenenmannigfaltigkeiten der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$. Dies leuchtet ein, da bei der Auszeichnung dieser Quadriken die in sich dualen Asymptotenlinien eine Rolle spielten.

Darüber hinaus zeigt die Rechnung, die wir hier nicht durchführen, daß zu den ausgezeichneten Berührquadriken von $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ als Punktgebilde gerade wieder die Quadriken (3) mit den Werten (15), (18) gehören, so daß also z. B. gilt: *Eine Berührquadrik von* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, *die vier Punkte mit* $\mathfrak{r}$ *gemein hat, hat auch vier aufeinanderfolgende Ebenen mit* $\mathfrak{S}$ *gemeinsam* usw.

Diese Gegebenheiten in Verbindung mit der Liste (18) liefern eine Reihe geometrischer Aussagen, unter denen wir die folgenden Beispiele auswählen:

Hat die Schmiegquadrik einer Regelfläche vier Punkte mit einer Kurve auf der Regelfläche gemeinsam, so berührt sie auch vier aufeinanderfolgende Ebenen, die durch die Tangente an die Kurve und die Erzeugende bestimmt sind, — diese Kurve ist Fleknodalkurve. $\mathfrak{r}$ *wird durch*

$$\left(\ln \frac{a\,b^2}{\bar{a}^3}\right)' = 0 \tag{3.23}$$

als Fleknodalkurve gekennzeichnet.

Eine 4-Punkte-Berührquadrik von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *hat auch mit* $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ *vier Ebenen gemeinsam, kurz gesagt, sie berührt den Streifen* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{S}$ *(bzw.* $\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{S}}$*) vierfach. Dies ist genau dann der Fall, wenn* $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ *Wendepunktsorte der zugehörigen Kurvenscharen* (8) *durchlaufen*[15]*). Die analytische Bedingung hierfür lautet:*

$$\left(\ln \frac{a\,\bar{a}}{b\,\bar{b}}\right)' = 0. \tag{3.24}$$

Wir wissen nun auch schon viel über die berührenden Quadriken von $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Diese werden ja eingehüllt von den berührenden Quadriken von $(\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{R}})$. Formale Dualisation der Betrachtungen und Formeln dieses Abschnitts führt also auf diese Gebilde, über die wir hier deshalb nicht weiter sprechen wollen. Man gewinnt so auch den Zusammenhang zu den Kurvenpaaren $\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}$ bzw. $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$, deren Untersuchung als selbständige Kurvenpaare auch Rückschlüsse auf das Ausgangspaar zuließen (vgl. Bemerkung 12).

Wir wollen zum Abschluß noch angeben, in welcher Weise die begonnene Theorie weitergeführt werden kann. Die Begleitfiguren haben wir hier nur in ihren lokalen Eigenschaften untersucht. Sie bilden jedoch längs des Kurvenpaares je nachdem Hüllflächen, Geradenkongruenzen, die wieder Brennflächen haben, insbesondere erzeugen die Berühr-C_3 Flächen längs des Kurvenpaares. Insofern gibt die vorliegende Theorie eine Basis für die Behandlung solcher C_3-Flächen, deren erzeugende Kurven dritter Ordnung zwei singuläre Kurven einhüllen. Hierauf kommen wir vielleicht an anderer Stelle zurück.

Aber auch überall dort, wo ein geometrisches Problem ein Kurvenpaar auszeichnet, ist die vorliegende Theorie mit Erfolg anzuwenden. Es wäre deshalb wertvoll, die Beziehungen zu der Theorie der Regelflächen (definiert durch ihre nicht zusammenfallenden Fleknodalkurven) und zu der Theorie der Doppelverhältnisscharen auf einer Regelfläche[16]) herzustellen.

Bemerkungen. 1. Durch (10) werden auch im Falle $a_{12} \neq 0$ Berühr-C_3 und Quadriken (3) dadurch einander zugeordnet, daß sie sich nicht nur zwei-, sondern dreipunktig berühren. Zu einer Berühr-C_3 gehört so ein Quadrikbüschel — und damit ein Büschel der durch (9) gekennzeichneten geometrischen Gebilde — für die

$$a_{11},\quad a_{22} \text{ fest, und } a_{12} \tag{3.25}$$

projektiver Parameter ist. Zum gleichen Büschel gelangen wir, wenn wir uns ein Element dieses Büschels fixiert denken und die zugehörige Doppelverhältnisschar (8) betrachten. Eine beliebige Kurvenschar (8), deren Kurven die Kurven der festgewählten Schar in den Ausgangspunkten berühren [vgl. (17)], führt ebenfalls auf ein Element des genannten Büschels und alle Elemente haben diese Eigenschaft.

[15]) Die Kurvenschar besteht dann wieder aus Pantazi-Paaren.

[16]) Vgl. auch Fußnote [11]) auf S. 428.

Die Invarianten a_{11}, a_{22} kann man wegen (10) mit α und $\bar{\alpha}$ im Büschel der Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. von $\mathfrak{r}$ deuten. Wählt man außer den ausgearteten Elementen unter den Berührkegeln von $\bar{\mathfrak{r}}$ etwa noch den Schmiegkegel bezüglich des Paares, so hat für jeden anderen Kegel des Büschels das entstehende Doppelverhältnis den Wert

$$\frac{2a\alpha}{b}, \text{ also auch den Wert } -\frac{a_{11}}{b},$$

wenn (10) gilt.

2. In einem Büschel (25) gibt es genau ein Element, dessen zugehörige Abbildung (6) eine Involution ist, nämlich wenn $a_{12}=0$. Diese Involution

$$\mathfrak{s} + \frac{\bar{a}^2 a_{22}}{a^2 a_{11}} \bar{\mathfrak{s}} = 0 \tag{3.26}$$

hat somit für das Büschel und jedes Element dieses Büschels geometrische Bedeutung.

Ihre Doppelpunkte nennen wir *Medianpunkte des Kurvenpaares bezüglich des Büschels* oder auch *bezüglich eines Elements dieses Büschels.*

Das Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ definiert ein Beispiel einer solchen linearen Mannigfaltigkeit (25). Diese ist aber invariant mit dem Kurvenpaar verbunden — die Doppelpunkte der zugehörigen Involution mögen einfach *Medianpunkte des Kurvenpaares* heißen.

Wichtig für diese Zusammenhänge ist natürlich, daß ein beliebig herausgegriffenes Gebilde (9) und ein Kurvenpaar nach Bemerkung 1 immer genau ein Büschel (25) festlegt und damit auch die zugehörigen Medianpunkte. Diese durchlaufen auf der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ die *Mediankurven* des Kurvenpaares bezüglich des Gebildes (9), von dem wir ausgingen.

3. Ziehen wir noch die Berührprojektivitäten (vgl. § 2 Bemerkung 17) heran, um einen tieferen Einblick in die geometrischen Zusammenhänge zu gewinnen! Es gilt: *Die Spiegelgeraden* (2.40) *schneiden in* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *die Medianpunkte des Kurvenpaares aus, die Involution* (26) *auf* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *wird durch die Projektivität* (2.39) *erzeugt*, durch eine Projektivität also, die die Punkte des Kurvenpaares in höchstmöglicher Ordnung miteinander vertauscht.

Wir erläutern die Verhältnisse gleich am allgemeinen Büschel (25) von Gebilden (9). Wir betrachten zunächst die Berührprojektivitäten, die die Punkte der Kurven $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ an jeder Stelle sogar in erster Ordnung vertauschen. Diese lineare Gesamtheit besteht wieder aus lauter involutorischen Projektivitäten

$$p_0^* = \bar{a}^2 \bar{\lambda} p_3, \qquad p_1^* = a \bar{a} \bar{\lambda} p_2, \qquad p_2^* = a \bar{a} \lambda p_1, \qquad p_3^* = a^2 \lambda p_0 \tag{3.27}$$

mit den Spiegelgeraden

$$\left(\bar{a} \sqrt{\bar{\lambda}}\, \mathfrak{r} \pm a \sqrt{\lambda}\, \bar{\mathfrak{r}}, \sqrt{\bar{\lambda}}\, \mathfrak{s} \pm \sqrt{\lambda}\, \bar{\mathfrak{s}}\right). \tag{3.28}$$

(27) führt eine Berühr-C_3 in sich über, für die

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{2\bar{\alpha}\bar{a}}{2\alpha a}.$$

Mit

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}$$

bildet (27) die Quadriken (3) des Büschels (25) auf Quadriken desselben Büschels ab.

Es folgt: *Eine Projektivität* (27), *die die zu* (25) *gehörende Berühr-C_3 oder das zu* (25) *gehörende Büschel von Quadriken in sich überführt, ist eindeutig bestimmt und definiert die Medianpunkte des Kurvenpaares bezüglich* (25) *als Schnitt der Spiegelgeraden mit* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$.

Zu den in (27) sich entsprechenden Quadriken des Büschels $(a_{12}, -a_{12})$ gehören Doppelverhältnisscharen derart, daß die Kurven der einen Schar die Kurven der konjugierten der anderen Schar in den Medianpunkten berühren. Damit analytisch äquivalent ist die namengebende Definition der Mediankurven: Sie berühren auf jeder Erzeugenden Scharkurven in zwei Punkten, die harmonisch zu den Punkten des Kurvenpaares liegen[17]).

Die Quadrik in (25), auf der die Berühr-C_3 liegt (d.h. $a_{12} = 0$), wird von (27) in sich übergeführt, und zwar geradenweise, so daß Geraden, die mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ in einer Schar liegen, in sich abgebildet werden. Die Involution (26) entsteht somit auch dadurch, daß man auf dieser Quadrik Geradenvierecke betrachtet, deren weitere Ecken auf der Berühr-C_3 liegen. (27) wird dann als involutorische Projektivität dadurch bestimmt, daß sie die entstehenden Geradenvierecke auf sich abbildet.

4. Bei geeigneter Wahl des speziellen projektiven Parameters kann man den Kurven dritter Ordnung, die jede Kurve des Paares zweipunktig berühren, die Gestalt geben:

$$\bar{\mathfrak{y}}(s) = (\alpha_0 + s\,\alpha_1)\,\mathfrak{r} + s\,\mathfrak{s} + s^2\,\bar{\mathfrak{s}} + (\bar{\alpha}_1 s^2 + \bar{\alpha}_0 s^3)\,\bar{\mathfrak{r}}.$$

Auf einer Quadrik (3) liegt ein einparametriges System solcher 2-Punkte-C_3 mit:

$$2a\,\alpha_0 + a_{11} = 0, \qquad -2\bar{a}\,\bar{\alpha}_0 + a_{22} = 0, \qquad 2a\,\alpha_1 - 2\bar{a}\,\bar{\alpha}_1 + 2a_{12} = 0.$$

Es gilt nun: Geradenvierecke auf der Quadrik (3), deren Ecken außer auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ auf einer der 2-Punkte-C_3 liegen, definieren auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gerade wieder die Involution (26), deren Fixpunkte die zugehörigen Medianpunkte sind.

[17]) Auf diese und ähnliche Zusammenhänge gehen wir hier absichtlich nicht ein. Es handelt sich dabei um eine „innere" Eigenschaft der Doppelverhältnisschar mit dem Kurvenpaar, die völlig davon absieht, daß sich dieses Gebilde auf einer Regelfläche befindet. Über die inneren Eigenschaften gewinnt man am besten einen Überblick mittels der von Hesse eingeführten hyperbolischen Abbildung: Die Doppelverhältnisschar definiert ein binäres Gebiet, gedeutet als Kegelschnitt einer Hilfsebene. Dem Kurvenpaar entsprechen zwei Punkte dieses Kegelschnitts, die sich in Abhängigkeit von t auf diesem bewegen (vgl. hierzu die auf S. 428, Fußnote [11]) zitierte Arbeit von G. Bol). — Uns kam es hier darauf an, einige „äußere" Eigenschaften der Medianpunkte und der harmonischen Punkte anzugeben, Eigenschaften also, die von der Lage auf der Regelfläche und dieser im Raum bestimmt sind.

5. Man kann nun fragen, ob es außer den Berührprojektivitäten (27) — die nach Voraussetzung die Punkte des Paares sogar in erster Ordnung vertauschen — noch andere gibt, die ein zu (25) gehöriges Büschel von Quadriken (3) auf sich abbilden. Dies leisten auch die Spiegelungen an dem Geradenpaar

$$(\bar{a}\sqrt{\bar{\mu}}\,\mathfrak{r} \mp a\sqrt{\mu}\,\bar{\mathfrak{r}}, \qquad \sqrt{\bar{\mu}}\,\mathfrak{s} \pm \sqrt{\mu}\,\bar{\mathfrak{s}}), \tag{3.29}$$

und zwar in der Weise, daß jede Quadrik des Büschels in sich selbst übergeführt wird, wobei:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Spiegelung an (29) läßt die Berühr-C_3

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = -\frac{2\bar{a}\,\bar{\alpha}}{2a\,\alpha}$$

fest, insbesondere also auch die zum Büschel gehörende Berühr-C_3 (10). Die Geraden (29) schneiden auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ das Punktepaar

$$s^2 - \frac{\bar{a}^2 a_{22}}{a^2 a_{11}} = 0$$

aus. Dieses ist auch dadurch bestimmt, daß es die Medianpunkte bezüglich (25) und die Punkte $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ harmonisch trennt und die von ihm durchlaufenen Kurven werden deshalb *harmonische Kurven* genannt. Unsere Charakterisierung der harmonischen Kurven setzt ihre direkte Beziehung zu dem Büschel (25) in Evidenz.

Die Elemente des Büschels von Projektivitäten (27) und die hier betrachteten stehen übrigens mit

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{\bar{\mu}}{\mu}$$

in der Beziehung, daß zusammengehörende Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ die Seiten eines Tetraeders bilden, d.h. die einen die Diagonalen des Vierseits des anderen sind, wobei natürlich $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ immer als Seiten fungieren.

6. Es gibt ein Element des Büschels (25), dessen zugehörige Doppelverhältnisschar die Mediankurven als Scharkurven enthält. Es ist für dieses:

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)'.$$

Wir müssen also unsere Liste (18) durch

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a^2 b}{\bar{a}^2 \bar{b}}\right)' \tag{3.30}$$

ergänzen: Die Doppelverhältnisschar (8) mit (15) und (30) enthält ihre Mediankurven als Scharkurven. Die Mediankurven sind insbesondere Asymptotenlinien, wenn:

$$\left(\ln \frac{a\,b}{\bar{a}\,\bar{b}}\right)' = 0. \tag{3.31}$$

Andererseits drückt

$$\left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right) = 0 \tag{3.32}$$

aus, daß die Mediankurven eines Büschels (25) der ausgezeichneten Schar mit $a_{12} = 0$ angehören. (32) bedeutet aber auch, daß die Tangenten der Mediankurven und der harmonischen Kurven die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. Hat eine dieser vier Kurven diese Eigenschaft, so auch die anderen.

Durchlaufen die Mediankurven des Ausgangspaares Asymptotenlinien und treffen ihre Tangenten die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$, so gelten die ersten beiden Bedingungen (2.41). Dort sahen wir, daß in diesem Fall die Projektivität (2,39) die Punkte des Paares in zweiter Ordnung ineinander überführt und sie sogar in dritter Ordnung auf ihre Verbindungsgerade abbildet. Insbesondere ist dann auch $a = \text{const}\, \bar{a}$, d.h. die Schmiegquadrik ist ausgezeichnete Quadrik im Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und wird durch (2.39) in sich übergeführt.

7. Kann eine der beiden Spiegelgeraden (28) eine Torse beschreiben? Dies ist in einem der beiden folgenden Fälle möglich:

a) Der Schnittpunkt dieser Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, das ist ein Medianpunkt, beschreibt eine Kurve, deren Tangente $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ trifft, d.h. es gilt (32).

b) Der Schnittpunkt der Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ beschreibt eine Kurve, deren Tangente $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ trifft. Dieser Schnittpunkt ist im allgemeinen jedoch nicht Kehlpunkt der Torse, dies ist den PANTAZI-Paaren vorbehalten. Die zweite Spiegelgerade beschreibt hier sicher keine Torse, wenn es sich nicht um die Spiegelgeraden (2.40) handelt, die zu den Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gehören. In diesem Fall durchläuft mit einer auch die andere Spiegelgerade eine Torse, nämlich falls $b = \text{const}\, \bar{b}$ ist.

8. Das Doppelverhältnis (20) bzw. (22) kann man mit der gleichen geometrischen Bedeutung in jedem Gebilde (9) definieren. (22) hängt mit dem Doppelverhältnis B, das die Doppelpunkte der Abbildung (6) mit $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ bilden, zusammen durch

$$2 + B + \frac{1}{B} = \frac{4 a_{12}^2}{a_{11} a_{22}}. \tag{3.33}$$

In einem Büschel (25) werden durch Vorgabe von B zwei Elemente ausgesondert, deren Quadriken (3) durch Spiegelung an (28) ineinander übergehen.

Die Elemente, für die beide Seiten von (33) konstant sind, spielen in Büscheln (25) eine besondere Rolle, in denen die Spiegelgeraden die Tangenten an die Mediankurven sind, d.h. (32) gilt. In diesem Fall sind die Koeffizienten in (6) bzw. (8) bis auf konstante Faktoren einander gleich und es folgt z.B.: Die Doppelpunkte der Abbildung (6) beschreiben Kurven, deren Tangenten $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. Diese Kurven gehören auch der zugehörigen Doppelverhältnisschar (8) an usw.

Ist das Ausgangspaar Fleknodalpaar der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, so hat das Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ immer die Eigenschaft (32) [vgl. (23)]. Ist nun etwa (33) mit (15) für die Asymptotenlinien konstant,

so haben wir eine spezielle Klasse von Regelflächen vor uns. G. Bol nennt sie Kreisregelflächen und gibt eine Reihe geometrischer Eigenschaften an[18]).

Hierunter fallen die Komplexregelflächen mit

$$a = c_1 \bar{a} = c_2 b = c_3 \bar{b}, \qquad c_i = \text{const}, \tag{3.34}$$

die also etwa dadurch gekennzeichnet sind, daß die 3-Punkte-C_3 des Fleknodalpaares auf der Schmiegquadrik liegt usw.

Übrigens gelangt man auf diese Weise an Hand der Liste (18) nicht zu weiteren speziellen Regelflächenklassen. Für Fleknodalpaare fallen die dort aufgezählten Gebilde zusammen. Diese Tatsache kennzeichnet gerade die Fleknodalpaare in verschiedener Weise.

9. Betrachten wir zwei Gebilde (9) eines Büschels (25) mit $a_{12}, \bar{a}_{12}$. Die Doppelverhältnisschar (8), die zum ersten Element gehört, wird von der Abbildung (6) des zweiten Elements übergeführt in eine Doppelverhältnisschar (8) mit:

$$\begin{aligned} a^*_{11} &= a_{11} + \frac{4\bar{a}_{12}}{a_{22}}\left\{-a_{12} + \bar{a}_{12} + \left(\ln \frac{a\, a_{11}}{\bar{a}\,\bar{a}_{12}}\right)'\right\} \\ a^*_{12} &= -a_{12} + 2\bar{a}_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)' \\ a^*_{22} &= a_{22}. \end{aligned}$$

Dies ist sicher dann ein Element des Büschels, wenn die angewandte Abbildung eine Involution ist. Dann ist

$$a^*_{12} = -a_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)',$$

und es entsteht so eine Abbildung des Büschels in sich, die involutorisch ist, wenn (32) gilt, und dann auch durch die Spiegelung (27) erzeugt wird.

Andererseits führt eine Abbildung die zugehörige Doppelverhältnisschar ($a_{12} = \bar{a}_{12}$) in ein Element von (8) mit $a^*_{12} = 0$ über, falls

$$a_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)' = 0$$

(vgl. Bemerkung 6), in ein Element des Büschels (25), falls

$$\bar{a}_{12} = \text{const}\, \frac{a}{\bar{a}}\, a_{11},$$

und letzten Endes in sich selbst, wenn (32) gilt und B in (33) konstant ist. Durch diese Eigenschaft sind also die in Bemerkung 8 genannten speziellen Gebilde (9) ebenfalls ausgezeichnet.

10. Bei Pantazi-Paaren hüllen die Quadriken (11) außer $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zwei weitere Gerade ein. In diesem Geradenpaar schneiden sich die Schmiegquadrik von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, die Schmiegquadrik von $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ und die Quadrik (11). Diese Geraden bestimmen also die Doppelpunkte der Abbildung (6) mit (15) und (16).

[18]) Vgl. Fußnote [11]) und [17]), S. 428 bzw. 438. Der Name rührt daher, daß das hyperbolische Bild des Fleknodalpaares in diesem Fall ein Kreis ist, wenn man es in der Doppelverhältnisschar der Asymptotenlinien betrachtet.

11. Die Fleknodalkurven der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ berechnen sich aus

$$\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\left(\ln\frac{\bar{a}\,\bar{b}^2}{a^3}\right)' + s\left\{E\left(\ln\frac{E^2}{a\,\bar{a}}\right)' - 4(a\bar{A} - \bar{a}A)\right\} - \frac{a\,b}{\bar{a}}\left(\ln\frac{a\,b^2}{\bar{a}^3}\right)' s^2 = 0$$

$$\text{mit} \quad E = \left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)'.$$

Hieraus folgt z. B., daß die Fleknodalkurven die Kurven eines PANTAZI-Paares harmonisch trennen, wenn dessen 3-Punkte-C_3 auf der Schmiegquadrik liegt. Die 3-Punkte-C_3 eines Kurvenpaares, dessen Verbindungsgerade eine Fläche zweiter Ordnung erzeugen, liegt im allgemeinen nicht auf dieser Quadrik. Ist dies der Fall, so ist das Kurvenpaar ein PANTAZI-Paar.

12. Das Vorzeichen von $b\bar{b}$ ist invariant sowohl bei Parametertransformation als auch bei Umnormungen (1.4). Nach (18) hat man die geometrische Bedeutung: Je nachdem ob $b\bar{b} < 0$ oder $bb > 0$, gibt es an jeder Stelle des betrachteten wendepunktfreien Kurvenpaarstücks zwei reelle Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, die $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ berühren — oder nicht.

Es wäre, um bei reellen Größen zu bleiben, zweckmäßig je nachdem durch $b\bar{b} = \pm 1$ einen invarianten Parameter festzulegen.

Beim Übergang zu dem Kurvenpaar $\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\bar{\mathfrak{s}}}$ *bzw. auch zu* $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ *bleibt die Größe* $b\bar{b}$[19]) *ungeändert.* Bezeichnen wir die Invarianten des Kurvenpaares $\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\bar{\mathfrak{s}}}$ mit einem $\hat{}$, so gilt nämlich:

$$\left(\ln\frac{\hat{a}}{\hat{b}}\right)' = \left(\ln\frac{b}{A}\right)', \qquad \left(\ln\frac{\hat{\bar{a}}}{\hat{\bar{b}}}\right)' = \left(\ln\frac{\bar{b}}{\bar{A}}\right)'$$

$$\left(\ln\frac{\hat{a}}{\hat{\bar{a}}}\right)' = 3\left(\ln\frac{\bar{A}}{A}\right)' + 2\left(\ln\frac{\bar{b}}{b}\right)', \qquad \hat{b}\,\hat{\bar{b}} = b\,\bar{b}$$

$$\hat{a}\,\hat{\bar{A}} = a\,\bar{A} + d' - d^2 - d\,(\ln\bar{A})' \quad \text{mit} \quad d = \left(\ln\frac{\bar{b}}{A}\right)'$$

$$\hat{\bar{a}}\,\hat{A} = \bar{a}\,A + \bar{d}' - \bar{d}^2 - \bar{d}\,(\ln A)' \quad \text{mit} \quad \bar{d} = \left(\ln\frac{b}{\bar{A}}\right)'.$$

[19]) Eigenartigerweise fällt die Größe $b\bar{b}$ auch zusammen mit der Größe $c_1 c_2$ in der BOLschen Theorie [vgl. Fußnote [11]), S. 428]. Der von uns eingeführte invariante Parameter ist also im wesentlichen die Bogenlänge des hyperbolischen Bildes des Kurvenpaares in der Doppelverhältnisschar der Asymptotenlinien [Fußnote [17]), S. 438].

(Eingegangen am 21. März 1952.)

Errata

in der Arbeit von H. Weyl auf S. 105—119 dieses Bandes.

1. In Fußnote [2]), S. 105, ersetze **55** durch **56**.
2. In Formel (10) unten auf S. 109 ersetze die einfachen durch doppelte Vertikalstriche.
3. Auf S. 117, Zeile 18, lies „nicht verschwindet" statt „verschwindet".